Praktische Anleitung

zum

gründlichen Unterricht in der Algebra.

Ausführliche Auflösung

der in

Dr. E. Heis' Sammlung von Beispielen

u. s. w.

enthaltenen Aufgaben.

Zweiter Teil.

Die Gleichungen und Progressionen.

In scientiis addiscendis magis exempla
prosunt quam praecepta.
Newton.

Zum Selbstunterricht bestimmt

von

A. Ruland.

Sechste, verbesserte Auflage

bearbeitet von

Dr. Karl Ruland,
Königl. Kreis-Schulinspektor.

Bonn
Verlag von Max Cohen & Sohn (Fr. Cohen)
1887.

Vorwort zur sechsten Auflage.

Der von meinem nunmehr verstorbenen Vater N. Ruland (weiland Lehrer an der höheren Stadtschule zu Linnich) unternommene Versuch, durch eine leicht faßliche und ausführliche Bearbeitung der vortrefflichen „Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Prof. Dr. E. Heis“ den Selbstunterricht in der Algebra zu fördern und zu erleichtern, hat eine überaus günstige Aufnahme gefunden. Der erste Teil der von demselben herausgegebenen „Praktischen Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Buchstabenrechnung“, welcher die allgemeine Arithmetik (Heis, Abschnitt I, II und III) eingehend behandelt, ist im vorigen Jahre bereits in fünfter Auflage erschienen. Der zweite Teil dieser Anleitung *), welcher die Auflösungen der Gleichungen und Progressionen (Heis, Abschnitt IV und V, A.) enthält, erscheint hiermit in sechster Auflage.

Da die Brauchbarkeit des vorliegenden Buches mithin hinlänglich erprobt und anerkannt sein dürfte, so habe ich mich bei Bearbeitung dieser neuen Auflage nicht entschließen können, von der einmal gewählten Form und der Art, wie die verschiedenen Auflösungen behandelt worden sind, abzugehen. Ich habe mich vielmehr damit begnügt, das Werk einer sorgfältigen Korrektur zu unterwerfen und es mit den neuesten Ausgaben der Sammlung u. s. w. von Heis in Übereinstimmung zu bringen. Auch ist

*) Der dritte Teil derselben, welcher die übrigen Abschnitte (V, B. bis VIII) der Sammlung u. s. w. von Heis behandelt, erschien 1880.

der neuen Orthographie und den Schriftzeichen für die abgekürzte Bezeichnung der Münzen, Maße und Gewichte Eingang verschafft worden.

Möge das Werk auch in dieser neuen Auflage seinen Zweck, dem Selbstlernenden ein treuer Führer und zuverläßiger Ratgeber zu werden, vollkommen erreichen und sich immer mehr neue Freunde erwerben!

Einsendungen von Druckfehlern und sachlichen Berichtigungen werde ich gerne entgegennehmen und gebührend berücksichtigen.

Crefeld, im November 1886.

Dr. Karl Nuland,
Königl. Kreis = Schulinspektor.

Inhalt.

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

		Seite
1.	Begriff einer Gleichung. §. 376 und 377	1
2.	Einteilung der Gleichungen. §. 378	2
3.	Ordnen und Auflösen der Gleichungen. §. 379	4

I. Gleichungen vom ersten Grade.

A.	Mit einer unbekannten Größe. §. 380 und §. 381	4—8
1.	Praktische Regeln zur Auflösung der Gleichungen. §. 382a .	8
2.	Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten vermittelst der regula falsi. §. 382b	9
3.	Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 61	11—41
	a) Aufgaben (1—100). §. 383a	11—25
	b) Wurzelgleichungen (101—125). §. 383b	25—29
	c) Exponentialgleichungen (126—156). §. 384a . .	29—36
	d) Wiederholungsbeispiele (157—198). §. 384b . .	36—41
4.	Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 63	42—135
	a) Aufgaben (1—119). §. 385a	42—87
	b) Bewegungsaufgaben (120—177). §. 385b . . .	87—117
	c) Aufgaben (178—206). §. 385c	117—126
	d) Mischungsaufgaben (207—222). §. 385d . . .	126—131
	e) Aufgaben (223—235). §. 385e	131—135

B. Mit mehreren unbekannten Größen.

1.	Methoden, lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen	136—141
	A. Additions- und Subtraktions-Methode. §. 386a .	136—137
	B. Substitutions-Methode	138
	C. Kombinations-Methode	138—139
	D. Methode vermittelst der regula falsi	139
	E. Methode von Bézout oder die französische Methode .	140
2.	Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 65a	141—187

Seite

a) Aufgaben (4—113). §. 386 b . . . . 141—181

b) Exponentialgleichungen (114—130). §. 386 c. . . 181—187

3. Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten mit Hülfe der Determinanten. Heis, Sammlung §. 66. §. 387 . . . . 187—219

4. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 67. §. 388 . 219—283

II. Gleichungen vom zweiten Grade.

A. Mit einer unbekannten Größe.

1. Ueber die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen. §. 389 283—285

2. Methoden, gemischte quadratische Gleichungen aufzulösen. §. 390 285—289

A. Durch Ergänzung des unvollständigen Quadrats in ein vollständiges 285

B. Durch Zurückführung einer gemischten quadratischen Gleichung in eine reine, worin das zweite Glied fehlt 286

C. Durch Zerlegung der gegebenen Gleichung in zwei binomische Faktoren 287

3. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 69 . . . . 289—357

a) Reine quadratische Gleichungen (3—25). §. 391 . . 289—293

b) Gemischte quadratische Gleichungen (27—136). §. 392 294—314

c) Exponentialgleichungen (137—153). §. 393 . . . 314—318

d) Die Wurzeln der quadratischen Gleichungen (154—165). §. 394 . . . . 318—322

e) Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade (166—182). §. 395 . . . . 322—337

f) Reciproke Gleichungen höheren Grades, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen (183—204). §. 396 . . . . 338—349

g) Wiederholungsbeispiele (205—231). §. 397 . . . 350—357

4. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 71 . . . . 357—388

a) Reine quadratische Gleichungen (1—26). §. 398 a 357—361

b) Gemischte quadratische Gleichungen (27—91). §. 398b 361—388

B. Mit mehreren unbekannten Größen.

1. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 73. §. 399 . . . . 389—432

Seite

2. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 75. §. 400 433—462

III. Diophantische Gleichungen und Kongruenzen.

A. Diophantische Gleichungen.

1. Begriff derselben. §. 401 463
2. Auflösungen der diophantischen Gleichungen in Heis, Sammlung §. 77a. §. 402. . . . . 463—474

B. Zahlen-Kongruenzen.

3. Erklärung kongruenter Zahlen. §. 403 474
4. Verschiedene Sätze über Zahlenkongruenzen. §. 404—§. 413 . 475—479
5. Auflösungen der Aufgaben über Zahlenkongruenzen in Heis, Sammlung. §. 78. §. 414. . . . . 439—491
6. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der diophantischen Gleichungen in Heis, Sammlung §. 79. §. 415 . . . . 491—517

Fünfter Abschnitt.

A. Progressionen.

1. Begriff und Einteilung derselben. §. 416 518

I. Arithmetische Progressionen.

2. Auflösungen der arithmetischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 81 . . . . 519—530
   a) Entwickelung der beiden Grundformeln (1—6). §. 417 519—521
   b) Entwickelung der übrigen Formeln (7—11). §. 418 521—524
   c) Bestimmung einzelner Glieder (12—23). §. 419 . 525—530
3. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 82 . . . . 530—543
   a) Aufgaben (1—14). §. 420 . . . . 530—534
   b) Regel vom falschen Satze. §. 421 . . . . . . 535—537
   c) Die verschiedenen Reihen nebst Summierung derselben (15—22). §. 422 . . . . 537—543

II. Geometrische Progressionen.

4. Auflösungen der geometrischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 83 . . . . 544—560

Seite

a) Entwickelung der beiden Grundformeln (1—4). §. 423 und §. 424 . . . . 544—546
b) Die unendlich abnehmenden Progressionen (5—8). §. 425 . . . . 546—547
c) Entwickelung der übrigen Formeln (9—24). §. 426 547—553
d) Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche (25). §. 427 . . . . 553—554
e) Die Kettenreihen. Summierung derselben und Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in eine Kettenreihe (26—33). §. 428 . . . . 554—558
f) Interpolierung und Summierung geometrischer Progressionen (34—40). §. 429 . . . . 558—560

5. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der geometrischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 84 560—592
Aufgaben (1—13). §. 430 . . . 560—566

Zinseszinsen- und Rentenrechnung.

a) Das nach einer bestimmten Zeit angewachsene Kapital zu bestimmen (14—27). §. 431 . . . . 566—569
b) Das Grundkapital wird gesucht (28—31). §. 432 . 570
c) Der Zinsfuß wird gesucht (32—37). §. 433 . . . 570—573
d) Die Zeit wird gesucht (38—45). §. 434 . . . . 573—575
e) Vermischte Beispiele (46—56). §. 435 . . . . 575—578
f) Von den Jahresrenten (57—70). §. 433 . . . . 578—592

Fehler, vor dem Gebrauche des Buches zu verbessern.

Seite 48 Z. 23 v. u. Anzahl st. Anzal.
„ 67 Z. 18 v. u. teilen st. theilen.
„ 106 Z. 7 v. o. 171 st. 161.
„ 157 Z. 9 v. o. Wert st. Werth.
„ 189 Z. 5 v. o. indes st. indeß.
„ 191 Z. 15 v. o. acht st. Acht.
„ 288 Z. 4 v. u. ist „kann" nach „Man" einzuschalten.
„ 288 Z. 22 v. o. $x_2=-3$ st. $x_2=3$.
„ 303 Z. 18 v. u. $\sqrt[3]{-54a^4+\overline{\frac{3481a^4}{64}}}$ st. $\sqrt[3]{-54a^4+\frac{3481a^4}{64}}$.
„ 313 Z. 15 v. u. $\sqrt{x-n}$ st. $\sqrt{x}=n$.
„ 338 Z. 1 v. o. höheren Grades st. höherer Grade.
„ 338 Z. 5 v. o. niedrigern st. niedrigen.
„ 430 Z. 8 v. u. Gleichungen st. Gleichung.
„ 431 Z. 5 v. o. $-u+2]$ st. $-u+z]$.
„ 432 Z. 4 v. o. $y_1=0$ st. $y_2=0$ und $y_2=-2$ st. $y_1=-2$.

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

1. Begriff einer Gleichung.

§. 376. Eine und dieselbe Zahl oder Größe kann man sich aus verschiedenen Rechnungsoperationen entstanden denken. So kann die Zahl 10 entstehen, entweder aus der Summe von $6+4$, oder aus der Differenz $15-5$, oder aus dem Produkte von 2.5, oder endlich aus dem Quotient von $20:2$, weshalb also auch $6+4=15-5$ und $2.5=20:2$ ist. Hieraus entspringt der Begriff von den Gleichungen. Eine Gleichung ist nämlich die Gleichstellung zweier gleichen Ausdrücke von Zahlen oder allgemeinen Größen durch das Gleichheitszeichen. Wenn $a=b+c$ und auch $a=mn-p$ ist, so wird die Größe a sowohl durch $b+c$, als auch durch $mn-p$ dargestellt, und der Ausdruck $b+c=mn-p$ ist also eine Gleichung. Hiernach besteht jede Gleichung aus zwei durch das Gleichheitszeichen von einander getrennten Teilen, die wieder aus mehreren durch + und — mit einander verbundenen Gliedern bestehen können. Der Teil zur Linken des Gleichheitszeichens wird der erste Teil oder die linke Seite, der Teil zur Rechten des Gleichheitszeichens der zweite Teil oder die rechte Seite der Gleichung genannt.

§. 377. Man unterscheidet drei Arten von Gleichungen, nämlich: identische, analytische und synthetische oder algebraische Gleichungen.

(1) Eine Gleichung heißt eine identische, wenn die beiden durch das Gleichheitszeichen mit einander verbundenen Ausdrücke aus denselben Größen bestehen und ganz auf dieselbe Weise zusammengesetzt sind, z. B.:

$$7=7;\ a=a;\ a+b=a+b;\ (m-n)^2=(m-n)^2 \text{ u. s. w.}$$

(2) Eine Gleichung wird eine analytische genannt, wenn die beiden gleichgestellten Ausdrücke notwendig gleiche Werte haben

müssen und sich demnach nur der Form nach von einander unterscheiden, wie z. B.:

$$7+4=8+3;\ 10-5=13-8;$$
$$a(a+b)=a^2+ab;\ (a-b)^2+4ab=(a+b)^2;$$
$$a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b).$$

(3) Gleichungen, welche teils aus bekannten (gegebenen), teils aus unbekannten (gesuchten) Größen zusammengesetzt sind, heißen synthetische oder algebraische Gleichungen. In diesen Gleichungen sind die beiden einander gleich gestellten Ausdrücke notwendig für jeden Wert der darin vorkommenden Größen nicht gleich. Es findet bei ihnen immer die Bestimmung statt, daß zwei Ausdrücke einander gleich sein sollen; dann will man aber untersuchen, welche Werte die darin vorkommenden Größen unter dieser Bedingung haben müssen. Verbindet man die beiden Ausdrücke $x+6$ und $18-x$ durch das Gleichheitszeichen, so erhält man die synthetische Gleichung:

$$x+6=18-x.$$

Nun ist ersichtlich, daß diese Gleichung nicht für jeden beliebigen Wert von x bestehen kann, und es fragt sich, für welchen Wert von x sie möglich ist. Nur für den Fall $x=6$, ist $x+6=18-x$. Wäre aber $x+4=18-x$, so kann x nur den Wert von 7 haben. In diesen Gleichungen hängt also der Wert der unbekannten Größe von dem Werte der Bekannten ab, während in den analytischen Gleichungen alle Größen von einander unabhängig sind.

Der Zweck der algebraischen Gleichungen ist nun, unbekannte Größen zu berechnen, und deshalb werden bei diesen Gleichungen die darin vorkommenden Größen in bekannte und unbekannte eingeteilt. Unter unbekannten Größen versteht man diejenigen, deren Wert durch den Wert der Bekannten bestimmt werden soll. Die unbekannten Größen werden gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets x, y, z, u, v bezeichnet. Ueberhaupt bezeichnet x jede noch zu suchende, also unbekannte Größe. Unter bekannten Größen versteht man diejenigen, durch welche die unbekannten bestimmt werden. Als solche werden entweder bestimmte Zahlen oder die Anfangsbuchstaben a, b, c, d, e u. s. w. betrachtet; in jenem Falle heißt die algebraische Gleichung eine numerische oder eine Zahlengleichung, in diesem Falle eine Buchstabengleichung.

2. Einteilung der Gleichungen.

§. 378. Die Gleichungen werden hinsichtlich der Anzahl der unbekannten Größen in solche mit einer unbekannten Größe und in solche mit mehreren Unbekannten eingeteilt.

Gleichungen ersterer Art sind:

$$x+12=20;\ (a-b)x=a^3-b^3;\ a-x=b+x.$$

Gleichungen der zweiten Art sind:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Die Gleichungen heißen bestimmte Gleichungen, wenn so viele Gleichungen gegeben sind oder sich aus einer Aufgabe entwickeln lassen, als unbekannte Größen in denselben vorkommen, weil in diesem Falle die Unbekannten einen bestimmten Wert haben, der allein von dem Werte der Bekannten abhängig ist; hingegen werden die Gleichungen unbestimmte genannt, wenn mehr Unbekannte vorkommen, als Gleichungen gegeben sind oder sich aus einer Aufgabe ergeben, weil in diesem Falle die Werte der Unbekannten nicht allein von dem Werte der Bekannten, sondern auch von dem Werte der Unbekannten abhängig sind. Zu einer solchen Gleichung führt die Aufgabe: „Zwei ganz positive Zahlen anzugeben, die zusammen 10 ausmachen.“ Heißen die beiden Zahlen x und y, so würden wir nur die einzige Gleichung $x+y=10$ aus dieser Aufgabe herleiten können. In dieser Gleichung kann x nur dann einen bestimmten Wert erhalten, wenn wir y einen solchen willkürlich beilegen, und es ist einleuchtend, daß in solchen Gleichungen die Unbekannten oft sehr viele Werte erhalten können, während in den bestimmten Gleichungen nur ein einziger Wert der Gleichung genügt.

Sowohl die bestimmten, als auch die unbestimmten Gleichungen werden nach der Beschaffenheit der darin vorkommenden unbekannten Größen eingeteilt, in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, vierten, überhaupt des n^{ten} Grades. Eine Gleichung des ersten Grades ist diejenige, in welcher die unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vorkommt; z. B.:

$$\tfrac{4}{5}x-3=x-7; \quad ax+b=cx+\frac{c}{a}.$$

Die Gleichung ist vom zweiten Grade, wenn die Unbekannte in der zweiten Potenz vorkommt; z. B.:

$$x^2=64; \quad x^2-2(a-b)x=ab.$$

Steht die Unbekannte in der dritten Potenz, so ist sie eine Gleichung vom dritten Grade; z. B.:

$$x^3=8; \quad x^3+ax=b.$$

Hieraus folgt, daß der Grad einer Gleichung durch den Exponenten bestimmt wird, womit die Unbekannte behaftet ist.

Die Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, vierten Grades heißen auch bezüglich einfache oder lineare, quadratische, kubische, biquadratische Gleichungen. Es kann der Grad einer Gleichung nicht eher beurteilt werden, als bis die in derselben nur ange-

deuteten Rechnungsoperationen ausgeführt sind, d. h. bis die Gleichung entwickelt und geordnet ist.

Die Gleichungen, in welchen die unbekannten Größen als Exponent vorkommen, heißen Exponential- oder transcendente Gleichungen; da sie sich durch Anwendung von Logarithmen auflösen lassen, so heißen sie auch logarithmische Gleichungen; z. B.:

$$a^x = b;\ 8^{x-3} = 64.$$

3. Ordnen und Auflösen der Gleichungen.

§. 379. Eine Gleichung auflösen heißt: für die unbekannte Größe eine Zahl oder einen Ausdruck finden, welcher, statt ihrer in die Gleichung gesetzt, derselben genügt oder die linke Seite der rechten identisch gleichmacht. Der für die Unbekannte gefundene Wert heißt Wurzel der Gleichung. Bei jeder Gleichung kommt es also darauf an, den Wert für die Unbekannte zu bestimmen; zu diesem Zwecke sind aber verschiedene Operationen mit der Gleichung vorzunehmen. Die erste dieser Operationen besteht darin, daß man die Gleichung gehörig ordnet, d. h. sie so umformt, daß die bekannten Größen auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, die unbekannten aber auf die andere Seite zu stehen kommen. Das dabei zu beobachtende Verfahren gründet sich auf den bekannten Grundsatz der Arithmetik: „Wenn mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen werden, so entstehen durch diese Operation wiederum gleiche Resultate." Da die bekannten Größen mit den Unbekannten in den einfachen Gleichungen, von denen es sich hier zunächst handelt, nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verbunden sein können, so reichen auch diese vier einfachen Rechnungsoperationen hin, um eine einfache Gleichung auflösen zu können.

I. Gleichungen vom ersten Grade.

A. Mit einer Unbekannten.

§. 380. a) Ist die Gleichung $x+19=37$ gegeben, so ist dieselbe durch die Frage entstanden: „Welche Zahl muß ich zu 19 addieren, um 37 zu erhalten?" In diesem Beispiele ist 37 die Summe zweier Summanden und 19 einer der beiden Summanden; es soll der andere Summand x bestimmt werden. Dieser wird nach §. 31 gefunden, wenn man den bekannten Summand 19 von der Summe 37 subtrahiert; es ist daher: $x=37-19=18$. Der Wert für x ist also 18, und in der That, wenn man diesen Wert in die gegebene Gleichung für x einsetzt, so findet man, daß

18+19=37, d. i. 37=37; der Wert für x hat also die linke Seite der rechten identisch gleichgemacht.

b) Es sei die Gleichung x+b=a gegeben. Nach dem Grundsatze: „Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt gleiche Reste oder gleiche Differenzen" (§. 12) müssen, weil die beiden Seiten einer Gleichung gleich sind, dieselben gleich bleiben, wenn von beiden Seiten Gleiches subtrahiert wird. Subtrahiert man also von beiden Seiten der gegebenen Gleichung dieselbe Größe b, so erhält man: x+b—b=a—b.

Nun ist nach §. 31: x+b—b=x; also ist x=a—b. Setzt man diesen Wert für x in die gegebene Gleichung x+b=a ein, so erhält man: a—b+b=a; nun ist nach §. 30: a—b+b=a; folglich reduziert sich die linke Seite der Gleichung auf a; daher a=a.

c) Gegeben sei die Gleichung x—45=72. Uebersetzen wir dieselbe in die gewöhnliche Sprache, so heißt dieselbe nichts anderes als: „Welche Zahl muß um 45 vermindert werden, damit 72 herauskommt? In diesem Falle ist 72 die Differenz, 45 der Subtrahend; es soll der Minuend x gesucht werden. Da nach §. 13 der Subtrahend und die Differenz die Bestandteile des Minuenden sind, so muß die Summe aus Subtrahend und Differenz dem Minuenden gleich sein; hiernach ist also: x=72+45=117. Setzt man diesen für x gefundenen Wert in die gegebene Gleichung, so findet man, daß 117—45=72, d. i. 72=72 ist.

d) Es sei die Gleichung: x—m=n gegeben. Nach §. 8 β) giebt Gleiches zu Gleichem addiert gleiche Summen. Die beiden Seiten einer Gleichung bleiben sich also gleich, wenn man zu der einen und andern Seite gleiche Größen addiert. Die bekannte Größe m ist in dieser Gleichung mit der unbekannten x durch das Subtraktionszeichen — verbunden, daher addiere man zu beiden Seiten m und man erhält:

x—m+m=m+n.

Nun ist nach §. 30: x—m+m=x; folglich x=m+n. Setzen wir diesen Wert für x in die gegebene Gleichung, so hat man:

m+n—m=n, d. i. nach §. 31: n=n.

e) Die Gleichung 78—x=43 heißt in Worten ausgedrückt: „Um welche Zahl muß ich 78 vermindern, um 43 zu erhalten?" In dieser Gleichung ist also die Differenz zweier Zahlen =43 und der Minuend =78 gegeben; es soll der Subtrahend x gesucht werden. Da der Minuend aus der Summe des Subtrahenden und der Differenz besteht, so muß der Unterschied zwischen dem Minuenden und der Differenz dem Subtrahenden gleich sein nach §. 13. Demnach ist der Subtrahend x=78—43=35. Man muß also 78 um 35 vermindern, um 43 zu erhalten; denn 78—35=43, d. i. 43=43.

f) Nach §. 9 heißt Subtrahieren: Aus dem Ganzen und einem seiner beiden Teile den andern Teil suchen. So-

bald also außer dem Ganzen noch der eine seiner beiden Teile gegeben ist, ist auch der andere Teil völlig bestimmt. Wendet man dies auf die Gleichung: $q-x=p$ an, so kann, da das Ganze q und der eine Teil p ist, der andere Teil x unmöglich mehr oder weniger sein als $q-p$; daher also $x=q-p$. Setzt man diesen Wert für x in die gegebene Gleichung, so hat man: $q-(q-p)=p$. Nun ist nach §. 33: $q-(q-p)=p$, folglich reduziert sich die linke Seite der Gleichung auf p; daher $p=p$.

g) Welche Zahl muß ich mit 7 multiplizieren, um 56 zu erhalten? Heißt diese Zahl x, so ist die Gleichung $7x=56$ gegeben. Hier ist 56 das Produkt zweier Zahlen und ein Faktor, der gleich 7 ist, gegeben; gesucht wird der andere Faktor x. Nach §. 17 heißt dividieren: Aus dem Produkte zweier Zahlen und einer dieser Zahlen die andere suchen. Wir werden also die unbekannte andere Zahl finden, wenn wir das Produkt 56 durch die bekannte Zahl 7 dividieren; demnach ist:

$$x=56:7=8;\ \text{denn}\ 7.8=56,\ \text{d. i.}\ 56=56.$$

h) Gegeben sei die Gleichung: $ax=b$. Nach §. 18 giebt Gleiches durch Gleiches dividiert gleiche Quotienten. Da die unbekannte x durch Multiplikation mit der bekannten Größe a verbunden ist, so dividiere man die beiden Seiten der Gleichung durch a und man erhält: $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$ oder $\frac{x}{a}\cdot a=\frac{b}{a}$.

Nun ist nach §. 72: $\frac{x}{a}\cdot a=x$; folglich $x=b:a$. Setzt man diesen Wert für x in die gegebene Gleichung, so erhält man: $a\cdot\frac{b}{a}=b$, d. i. $b=b$.

i) Welche Zahl giebt, durch 9 dividiert, 8 zum Quotienten? Heißt die Zahl x, so ist: $\frac{x}{9}=8$. Es soll also der Dividend x aus dem Divisor 9 und dem Quotienten 8 gesucht werden. Nun besteht nach §. 72 der Dividend aus dem Produkte des Divisors in den Quotienten; demnach ist der Dividend $x=9.8=72$; denn $72:9=8$; d. i. $8=8$.

k) Durch welche Zahl muß ich 91 dividieren, um 13 zu erhalten?

Heißt die gesuchte Zahl x, so erhält man die Gleichung: $91:x=13$. Hier ist also der Dividend $=91$ und der Quotient $=13$ gegeben; gesucht wird der Divisor x. Da der Dividend das Produkt aus dem Quotienten in den Divisor ist, so ist der Divisor $x=91:13=7$; denn $91:7=13$; d. i. $13=13$.

l) Gegeben sei die Gleichung: $x:a=b$. Da nach §. 16 „Gleiches mit Gleichem multipliziert gleiche Produkte giebt", so muß auch wieder Gleiches entstehen, wenn man die beiden Seiten dieser Gleichung mit derselben Zahl a multipliziert.

Hiernach ist: $(x:a).a=b.a$, d. i. $x=ab$. Setzt man diesen Wert für x in die gegebene Gleichung, so hat man: $(ab):a=b$. Nun ist nach §. 73: $(ab):a=b$; also reduziert sich die linke Seite der Gleichung auf b, weshalb $b=b$.

m) In der Gleichung $m:x=n$ ist der Quotient n und der Dividend m gegeben, folglich wird nach k) der Divisor $x=m:n$. Denn setzen wir diesen Wert für x in die gegebene Gleichung, so erhalten wir: $m:(m:n)=n$. Nach §. 74 ist nun $m:(m:n)=n$; folglich $n=n$.

Wendet man den in l) ausgesprochenen Grundsatz auf die gegebene Gleichung an, so würde man erhalten: $m=nx$, welches nach h) giebt: $(m:n)=x$.

§. 381. a) In den bisher behandelten Gleichungen war durch eine einzige Rechnungsoperation der Wert der Unbekannten schon bestimmt. In den mehr erweiterten Gleichungen aber werden verschiedene Operationen auszuführen sein, ehe man schließlich den Wert für die Unbekannte bestimmen kann. Gegeben sei z. B. die Gleichung:

$$7x-17=354.$$

Mit Rücksicht auf c) des §. 380 hat man hier zunächst:

$$7x=354+17 \text{ oder } 7x=371;$$

nach g) des §. 380 erhält man hier $x=53$.

b) Gegeben sei die Gleichung: $5x-12=132-7x$. Addiert man zu beiden Seiten dieser Gleichung $7x+12$, so erhält man nach §. 380 d): $5x+7x=132+12$; vereinfacht man beide Seiten dieser Gleichung, so hat man:

$12x=144$; diese Gleichung durch 12 dividiert, giebt: $x=12$.

c) Es sei gegeben die Gleichung: $a^2-ax=b^2-bx$. Wendet man auf diese Gleichung wieder den im §. 380 unter d) ausgesprochenen Grundsatz an, so erhalten wir: $a^2-b^2=ax-bx$. Wendet man auf die rechte Seite dieser Gleichung §. 54 und auf die linke §. 69 (2) an, so hat man: $(a+b)(a-b)=(a-b)x$. Um nun den Wert für x zu erhalten, dividiere man diese Gleichung durch $a-b$; alsdann ist: $\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=x$. Wendet man schließlich auf diesen Quotienten §. 73 an, so erhalten wir: $a+b=x$ oder $x=a+b$.

d) Gegeben sei folgende Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{6}x-\tfrac{7}{8}=\tfrac{9}{10}+\tfrac{11}{12}x-\tfrac{13}{14}-\tfrac{15}{16}x.$$

Zunächst hat man nach dem im §. 380 l) ausgesprochenen Grundsatze die ganze Gleichung mit einer solchen Zahl zu multiplizieren, daß die Brüche aus derselben verschwinden und ihre Glieder nur aus ganzen Zahlen bestehen. Es ist also die Zahl, womit man die Gleichung multipliziert, so zu wählen, daß sie ein Vielfaches der Nenner aller Brüche ist. Nach den §§. 146 und 147 ist für 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 der kleinste gemein-

schaftliche Dividuus 1680. Multipliziert man daher die gegebene Gleichung mit 1680, so ist:

$$840x-1260+1400x-1470=1512+1540x-1560-1575x.$$

Vereinfacht man durch Addition oder Subtraktion jede Seite der Gleichung, so ist:

$$(840x+1400x)-(1260+1470)=(1512-1560)+(1540x-1575x).$$

oder: $$2240x-2730=-48-35x.$$

Zu beiden Seiten dieser Gleichung 2730+35x addiert, giebt

$$2240x+35x=2730-48 \text{ oder } 2275x=2682.$$

Wird diese Gleichung durch 2275 dividiert, so ergiebt sich:

$$x=1\tfrac{407}{2275}.$$

e) Gegeben sei noch folgende Gleichung:

$$\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}.$$

Um diese Gleichung in eine solche zu verwandeln, daß ihre Glieder nur aus Ganzen bestehen, multipliziere man dieselbe mit $(2b-x)(2b+x)$, welches Produkt nach §. 69 $=4b^2-x^2$ ist, und wir erhalten:

$$(x+2a)(2b+x)+(x-2a)(2b-x)=4ab.$$

Wird in der linken Seite dieser Gleichung nach den §§. 62 und 65 die nur angedeutete Multiplikation vorgenommen, so ist:

$$2bx+x^2+4ab+2ax+2bx-x^2-4ab+2ax=4ab.$$

Suchen wir jetzt die linke Seite dieser Gleichung zu vereinfachen.

$$x^2-x^2+2ax+2ax+2bx+2bx+4ab-4ab=4ab.$$

Nun ist $x^2-x^2=0$ nach §. 33 und ebenso $4ab-4ab=0$; folglich reduziert sich die entwickelte Gleichung auf folgende:

$$2ax+2ax+2bx+2bx=4ab.$$

Wenden wir jetzt auf die linke Seite dieser Gleichung die §§ 29 und 54 an, so ist:

$$4(a+b)x=4ab.$$

Dividieren wir nach §. 380 h diese Gleichung durch $4(a+b)$, so ist: $$x=ab:(a+b).$$

1. Praktische Regeln zur Auflösung der Gleichungen.

§. 382a. Die in dem §. 380 behandelten Gleichungen sind in den einfachsten Formen ausgedrückt; sie enthalten gleichsam die Grundform für die andern mehr erweiterten Gleichungen (381), die aber übrigens, wie wir gesehen haben, nach denselben Gesetzen behandelt und aufgelöst werden. Aus der Auflösung derselben ergeben sich nun folgende praktische Regeln:

(1) Wenn zur Ordnung der Gleichung ein mit dem Zeichen + versehenes, also ein positives Glied von einer Seite der Gleichung auf die andere gebracht werden soll, so muß dasselbe Glied auf beiden Seiten subtrahiert werden. Hierdurch verschwindet es auf der einen Seite, und es erscheint auf der andern Seite als

ein mit dem Zeichen — versehenes, also als ein negatives. Dies geht hervor aus §. 380 a und b.

(2) Soll ein negatives Glied von einer Seite auf die andere gebracht werden, so muß dasselbe beiderseits addiert werden. Hierdurch verschwindet es auf der einen Seite und erscheint auf der andern als ein mit dem Zeichen + versehenes, also als ein positives, was sich aus §. 380 c, d, e und f, ferner aus §. 381 a, b, c, d, e ergiebt.

(3) Aus diesen beiden Punkten folgt also, daß, wenn ein Glied der Gleichung auf die entgegengesetzte Seite des Gleichheitszeichens gebracht werden soll, man ihm hier das entgegengesetzte Zeichen geben muß. In allen Fällen also, wo die unbekannte Größe durch Addition oder Subtraktion mit Bekannten verbunden vorkommt, bringe man sowohl die bekannten als auch die unbekannten Größen auf eine Seite allein und vereinfache dann je nach Umständen den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck.

(4) Ist die Unbekannte durch Multiplikation mit der bekannten Größe verbunden, so wird die Unbekannte von dem bekannten Faktor dadurch befreit, daß man alle Glieder der Gleichung durch den bekannten Faktor dividiert, wie sich aus §. 380 g, h und §. 381 a, b, c, d und e ergiebt.

(5) Kommen in einer Gleichung Brüche oder Quotienten vor, so muß die Gleichung zur Fortschaffung der Brüche oder Quotienten mit einer Zahl multipliziert werden, welche die Nenner der Brüche oder die Divisoren der Quotienten als Faktoren in sich enthält. Dies ergiebt sich aus §. 380 i, k, l, m und aus §. 381 d und e.

(6) Aus der Auflösung der Gleichungen §. 381 b und d ergiebt sich ferner, daß, wenn die Gleichung eine numerische ist, alle Glieder mit x auf ein einziges reduziert werden müssen. Aus §. 381 c und e ersieht man, daß, wenn die Gleichnng eine Buchstabengleichung ist, aus allen mit x behafteten Gliedern nach §. 54 ein einziges Produkt gebildet werden muß, welches aus zwei Faktoren besteht, wovon der eine die Unbekannte x und der andere der Inbegriff der mit ihren bezüglichen Zeichen verbundenen Koeffizienten von x ist.

2. Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten vermittels der regula falsi.

§. 382b. Gegeben sei die Gleichung: (1) $ax+b=m_1$. Um aus dieser Gleichung die Unbekannte x zu finden, erhält man durch den ersten falschen Satz α_1 für x die Gleichung: (2) $a\alpha_1+b=m_2$ und durch einen zweiten falschen Satz α_2 für x die Gleichung (3) $a\alpha_2+b=m_3$, worin m_2 und m_3 die beiden falschen Resultate bezeichnen, die infolge der beiden falschen Annahmen entstanden sind. Subtrahiert man die gegebene Gleichung (1) von den Gleichungen (2) und (3), so ergiebt sich:

$$(4)\ a\alpha_1 - ax = m_2 - m_1;$$
$$(5)\ a\alpha_2 - ax = m_3 - m_1.$$

Wird Gleichung (4) durch (5) dividiert, so ist:

$$\frac{a\alpha_1 - ax}{a\alpha_2 - ax} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} \text{ oder}$$
$$\frac{a(\alpha_1 - x)}{a(\alpha_2 - x)} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} \text{ oder}$$
$$(6)\ \frac{\alpha_1 - x}{\alpha_2 - x} = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}.$$

In dieser letzten Gleichung bezeichnet $\alpha_1 - x$ den Fehler des ersten, $\alpha_2 - x$ den Fehler des zweiten falschen Satzes, ebenso ist $m_2 - m_1$ der Fehler des ersten und $m_3 - m_1$ der Fehler des zweiten falschen Resultates. Aus der letzten Gleichung folgt auch nach §§. 221 und 222:

$$(7)\ (\alpha_1 - x) : (\alpha_2 - x) = (m_2 - m_1) : (m_3 - m_1),$$

d. h. die Fehler der falschen Sätze verhalten sich wie die Fehler der Resultate. Setzt man in (7) $m_2 - m_1 = \varphi'$ und $m_3 - m_1 = \varphi''$, so wird (8) $(\alpha_1 - x) : (\alpha_2 - x) = \varphi' : \varphi''$ und hieraus erhält man nach §§. 223 und 231:

$$x = \frac{\alpha_2\varphi' - \alpha_1\varphi''}{\varphi' - \varphi''}.$$ Man vgl. §. 421.

Das Verfahren hierbei ist demnach folgendes:

1. Man nehme zwei beliebige, auf einander folgende Zahlen für die Unbekannte an und untersuche, was für ein Resultat jede derselben giebt.
2. Hierauf vergleiche man die beiden Resultate mit der rechten Seite der Gleichung und nehme zwischen dieser und den beiden Resultaten die Differenz, um die Fehler zu erhalten, die durch die falschen Sätze entstanden sind.
3. Alsdann multipliziere man den ersten Fehler mit der zweiten falschen Annahme und den zweiten Fehler mit der ersten falschen Annahme und dividiere die Differenz dieser Produkte durch die Differenz der beiden Fehler. Der hierdurch entstandene Quotient ist der wahre Wert der Unbekannten.

Gegeben sei die Gleichung $12x + 9 = 45$. Man nehme für x den willkürlichen Wert 1 an, setze diesen Wert in die gegebene Gleichung und untersuche, welchen Fehler diese Annahme hervorbringt. Nun ist $12 . 1 + 9 = 21$, müßte aber $= 45$ sein. Die falsche Annahme hat also das falsche Resultat $45 - 21 = 24$ gegeben. Nun setze man $x = 2$, alsdann wird $12 . 2 + 9 = 33$, also erhalten wir durch die zweite falsche Annahme das zweite falsche Resultat $45 - 33 = 12$. Demnach ist hier $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\varphi' = 24$, $\varphi'' = 12$. Daher ist:

$$x = \frac{2 . 24 - 1 . 12}{24 - 12} = \frac{36}{12} = 3.$$

Gegeben sei die Gleichung $7x-17=354$. Setzt man hier $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, so wird $\varphi'=371$, $\varphi''=364$, daher

$$x=\frac{1.371-0.364}{371-364}=\frac{371}{7}=53.$$

3. Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 61.

a) Aufgaben (1—100).

§. 383a. Unter Anwendung des in den §§. 380—382b Behandelten erhalten wir:

1. Nach §. 380 a) und b):
   α) $x=37-19=18$; β) $x=5\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}=1\frac{11}{12}$;
   γ) $x=7a-3a=4a$.
2. α) $x=q-p$; β) $x=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$;
   γ) $x=\frac{1}{2}(a+b)-b=\frac{1}{2}(a-b)$; δ) $x=a-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a-b)$;
   ε) $x=\frac{1}{2}[(a+b)-(a-b)]=b$.
3. Nach §. 380 c) und d) ergiebt sich:
   α) $x=72+45=117$; β) $x=1\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=1\frac{11}{12}$; γ) $x=2a+3a=5a$.
4. α) $x=n+m$; β) $x=\frac{1}{2}[(a-b)+(a+b)]=a$;
   γ) $x=b+\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$; δ) $x=\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]=a$;
   ε) $x=b+\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$;
   ζ) $x=2(b-a)+3a-2b=(3a-2a)+(2b-2b)=a$.
5. Unter Anwendung von §. 380 e) und f) haben wir:
   α) $x=78-43=35$; β) $x=1\frac{3}{5}-1\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$;
   γ) $x=7m-2m=5m$.
6. α) $x=q-p$; β) $x=\frac{1}{2}(a+b)-b=\frac{1}{2}(a-b)$;
   γ) $x=a-\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)$; δ) $x=\frac{1}{2}(a+b)-b=\frac{1}{2}(a-b)$;
   ε) $x=a-\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(a-b)$; ζ) $x=5m-(4m+n)=m-n$.
7. α) $x=5{,}4321-4{,}321=1{,}1111$; β) $x=(5a+3a)-7a=a$.
8. α) $x=4a+3b-4c-(3a+5b-7c)=a-2b+3c$;
   β) $x=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ (§. 380 a und b);
   γ) $x=(p+q)^2-(p-q)^2=4pq$.
9. $7+x=28-12$; $x=28-12-7=9$ (§. 380 d und a).
10. $18-x=8-3$; also $x=18-(8-3)=13$ (§. 380 d).
11. α) $5a+x=7a-(a+b)$; also $x=7a-(a+b)-5a=a-b$ (§. 380 e und a);
    β) $3n-x=5m-(6m-2n)=2n-m$;
    $x=3n-(2n-m)=m+n$ (§. 380 e und f).
12. $x=a+2b-3c+(2a-5b+bc)=3(a-b+c)$ (§. 380 c).
13. $x=p+2s-(2q+4r)+(7r-6s)=p-2q+3r-4s$.
14. α) $x=c+3a+2b-(2a-(b-c)+4b)=a-b$ (§. 380 e und f).
    β) $2x-a=b$; $2x=a+b$; $x=\frac{1}{2}(a+b)$ (§. 380 c).
    γ) $b+x=a-x$; $b+x+x=a$; $2x=a-b$; $x=\frac{1}{2}(a-b)$.
15. α) $8-(7-x)=9-2$; $7-x=8-(9-2)=1$; $x=7-1=6$ (§. 380 e und f)

β) $7+(7-(7+x))=7-7$; $7-(7+x)=7-7-7$; $7+x=7-(7-7-7)$; $x=7-(7-7-7)-7=7$.

16. Unter Anwendung von §. 380 g und h erhält man: $x=56:7=8$.

17. $x=h:g$.

18. α) $x=7:63=\frac{1}{9}$; β) $x=1\frac{1}{4}:5=\frac{1}{4}$.

19. Nach §. 380 i, g, h und k ist
α) $x=8.9=72$; β) $x=17.11=187$; γ) $x=7.7=49$.

20. α) $x=ik$; β) $x=(m-n)(m+n)=m^2-n^2$;
γ) $x=(2a-3b)(3a-2b)=6a^2-13ab+6b^2$.

21. α) $x=56:8=7$; β) $x=437:23=19$; γ) $x=91:13=7$.

22. α) $x=e:d$; β) $x=5a:2\frac{1}{2}a=2$.

23. $x=1{,}357.0{,}02486=0{,}03349076$.

24. $x=(-8\frac{2}{3}).(-9\frac{3}{4})=84\frac{1}{2}$.

25. $x=9:63=\frac{1}{7}$.

26. $x=(-8\frac{1}{18}):(-1\frac{2}{3})=4\frac{5}{6}$.

27. $x-(a^2-b^2):(a+b)=a-b$.

28. $12x=43+9$; $x=(43+9):12=4\frac{1}{3}$.

29. $6x=2b-3a+9a-8b=6(a-b)$; $x=a-b$.

30. α) Nach §. 380. m ist $x=(a^4-b^4):(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.
Nun ist nach §. 110. 14. ζ der Dividend dieses Quotienten:
$$a^4-b^4=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b),$$
daher ist
$x=[(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)]:(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a-b$ nach §. 87;
β) $x=(a^2-7a+10):(a-5)$ oder $x=(a-2)(a-5):(a-5)=a-2$;
γ) $x=(9a^2-1):(3a-1)$ oder $x=(3a+1)(3a-1):(3a-1)=3a+1$.

31. $x=(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$.

32. $7x=354+17$; $x=(354+17):7=53$.

33. α) $mx=n+p$; $x=(n+p):m$ (§. 382 (3) und (4));
β) $ax=a+b-b=a$; $x=a:a=1$.

34. Nach der regula falsi ist hier, wenn $\alpha_1=9$, $\alpha_2=10$ gesetzt wird, $\varphi'=62$, $\varphi''=61\frac{8}{9}$; daher ist:
$$\frac{10.62-9.61\frac{8}{9}}{62-61\frac{8}{9}}=\frac{63}{\frac{1}{9}}=9.63=567.$$

35. α) $\frac{x}{a}=b+c$; $x=a(b+c)$;
β) $(a+b):x=(a+b)$; $x=(a+b):(a+b)=1$.

36. $21:x=8-5$; $x=21:(8-5)=7$.

37. $\frac{3}{x}=10-25$; $x=3:(10-25)=-\frac{1}{5}$.

38. $n:x=q\mp p$; $x=n:(q\mp p)$.

39. α) $0{,}1111x=1{,}111-0{,}3333$; $x=(1{,}111-0{,}3333):0{,}1111=7$;
β) $\frac{1}{3}x=100-63$; $x=3(100-63)=111$.
40. α) $2{,}48x=11{,}4996+7{,}77$; $x=19{,}2696:2{,}48=7{,}77$;
β) $1{,}1x=1{,}1+0{,}11$; $x=(1{,}1+0{,}11):1{,}1=1{,}1$.
41. α) $\frac{1}{5}x=12\frac{3}{4}-67\frac{8}{9}$; $x=5(12\frac{3}{4}-67\frac{8}{9})=-275\frac{25}{36}$;
β) $1\frac{2}{3}x=7\frac{8}{9}-4\frac{5}{6}$; $x=(7\frac{8}{9}-4\frac{5}{6}):1\frac{2}{3}=1\frac{5}{6}$.
42. α) $(9-3)x=(50-8)$; $x=(50-8):(9-3)=42:6=7$.
β) $(5+7)x=132+12$; $x=(132+12):(5+7)=144:12=12$.
γ) $(13-6)x=2a+5a-5b-2b$; also $7x=7(a-b)$; $x=a-b$.
δ) $5(m+n)+2(29m-34n)=(15-6)x$ oder $63(m-n)=9x$; also $x=7(m-n)$.
43. Nach §. 382 (6) ist: $(a+b-c)x=d$; $x=d:(a+b-c)$.
44. Ordne diese Gl., so ist: $ax-cx=d-b$, wenn $a>c$ und $d>b$; ist hingegen $c>a$ und $b>d$, so ist; $cx-ax=b-d$; daher im ersten Falle $(a-c)x=d-b$; also $x=(d-b):(a-c)$; im zweiten Falle ist: $(c-a)x=b-d$; also $x=(b-d):(c-a)$.
45. Man sehe §. 381c $(m-n)x=m^2-n^2$; $x=(m^2-n^2):(m-n)=m+n$.
46. $(a+b)x=ab+ab=2ab$; also $x=2ab:(a+b)$.
47. $(1\frac{2}{3}+7\frac{8}{9})x=4\frac{5}{6}+99\frac{13}{27}$ oder $9\frac{5}{9}x=104\frac{17}{54}$. Multipliziere diese Gl. nach §. 380l mit 54, so ist: $516x=5633$; $x=10\frac{11}{12}$.
48. Vereinige die bekannten und unbekannten Größen auf der linken Seite der auf 0 reduzierten Gl., so wird $44-\frac{11}{35}x=0$. Ist nun die Differenz zweier Zahlen gleich Null, so ist nach §. 33 der Minuend dem Subtrahenden gleich; also ist: $\frac{11}{35}x=44$; diese Gl. durch 11 dividiert giebt: $\frac{1}{35}x=4$; also $x=35.4=140$.
49. Hier ist: $mx-nx-px+x=p-m-n+1$ oder
$(m-n-p+1)x=p-m-n+1$; daher
$x=(p-m-n+1):(m-n-p+1)$.
50. $\frac{1}{9}x+\frac{1}{13}x=7+11$ oder $(\frac{1}{9}+\frac{1}{13})x=18$. Hieraus wird $\frac{22}{117}x=18$; diese Gl. durch 2 dividiert giebt $\frac{11}{117}x=9$; daher $x=9:\frac{11}{117}=9\times\frac{117}{11}=95\frac{8}{11}$.
51. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x=n-m-p$; oder $\frac{a+b}{ab}x=n-m-p$; daher

$$x=[n-m-p]:\frac{a+b}{ab}=[ab(n-m-p)]:(a+b).$$

52. α) $\frac{m}{n}x=q-p$; daher $x=\frac{n}{m}(q-p)$.
β) $\frac{bx}{c}-\frac{ex}{g}=a-d$ oder $(bg-ec)x=(a-d)cg$; daher
$x=[(a-d)cg]:(bg-ec)$.
53. Siehe §. 381 d.
54. Wendet man auf diese Proportion §. 223 an, so wird:

$qx=p(a\pm x)$ oder $qx=ap\pm px$; daher
$(q\mp p)x=ap$; also $x=ap:(q\mp p)$.

55. $gx=fg+fx$ oder $(g-f)x=fg$; also $x=fg:(g-f)$.

56. $\left(\frac{a}{b}+\frac{d}{e}-\frac{g}{h}-\frac{m}{n}\right)\frac{1}{x}=c+f-k-0$; oder
$\left(\frac{aehn+bdhn-begn-behm}{behn}\right)\frac{1}{x}=c+f-k-0$; daher nach
§. 380 m): $x=\frac{aehn+bdhn-begn-behm}{behn(c+f-k-0)}$.

57. α) Ordne die Gl. und vereinige die Produkte, welche $\frac{1}{x}$ zum Faktor haben, so ist: $(\frac{8}{9}+\frac{11}{12}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6})\cdot\frac{1}{x}=12$ oder $\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{x}=12$; also $\frac{1}{x}=12.\frac{36}{11}=\frac{432}{11}$; daher $x=\frac{11}{432}$.

β) Subtrahiere beiderseits $\frac{5}{6}(x+a-b)$, d. h. reduziere die Gl. auf 0, so erhalten wir auf der linken Seite 4 Produkte, die den gemeinschaftlichen Faktor $(x+a-b)$ haben; denn $a-(b-x)=x+a-b$; daher ist:
$(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6})(x+a-b)=0$; folgl. nach §. 112:
$x+a-b=0$; also $x=b-a$.

58. α) $a=[p-(m+n)]x$; daher $x=a:(p-m-n)$.

β) Entwickelt man die Gleichung und ordnet sie, so ist:
$ax-bx=a^3-b^3$ oder $(a-b)x=a^3-b^3$; daher:
$(a-b)x=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; folglich $x=a^2+ab+b^2$.

59. α) $2b=(b+c)x+(b-c)x$ oder $2b=2bx$; also $x=1$.

β) Entwickle und ordne diese Gleichung, so hat man:
$2ax-bx=10a^2-19ab+7b^2$ oder:
$(2a-b)x=(5a-7b)(2a-b)$; folglich $x=5a-7b$.

γ) Ordne diese Gleichung, so ist: $ax-bx-cx=0$, woraus man nach §. 382 (6) erhält: $(a-b-c)x=0$. Wenn nun das Produkt $(a-b-c)x$ zu Null werden soll, so müssen nach §. 112 entweder beide Faktoren oder ein Faktor Null sein. Demnach hat x hier den einzig möglichen Wert Null.

δ) Entwickelt und ordnet man die Gleichung, so hat man:
$(a-c)x=b(a-c)$, oder wenn wir dieselbe auf 0 reduzieren:
$(a-c)x-b(a-c)=0$, was nach §. 54 giebt:
$(a-c)(x-b)=0$; daher $x-b=0$; folglich $x=b$.

ε) Ordne die Gleichung, so ist: $c(b+x)-d(b+x)=ac-ad$;
oder $(c-d)(b+x)=a(c-d)$; oder
$(c-d)(b+x)-a(c-d)=0$ daher:
$(c-d)(b-a+x)=0$; folglich
$b-a+x=0$; also $x=a-b$.

60. α) $rx=p-q$; folglich $x=(p-q):r$.

60. β) $(a+b)x-(a-b)x=2b(b^2+2a^2)-2a^2b$ oder
$2bx=2b^3+4a^2b-2a^2b=2b(a^2+b^2)$; daher $x=a^2+b^2$.

γ) Ordnet man die Gleichung und vereinigt die Koeffizienten von x, so ist:
$(a+b+c)x=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.
Nun ist nach §. 307 die rechte Seite der Gleichung gleich $(a+b+c)^2$; daher ist:
$(a+b+c)x=(a+b+c)^2$; folglich $x=a+b+c$.

δ) Multipliziere diese Gleichung mit ab und ordne sie, so ist:
$(a^3+b^3)\frac{1}{x}=a^2-ab+b^2$ oder
$(a^2-ab+b^2)(a+b)\frac{1}{x}=a^2-ab+b^2$; daher:
$(a+b)\frac{1}{x}=1$; folglich $x=a+b$.

ε) Multipliziere die Gleichung mit $(x-n)n$, so ist:
$n(m-x)=m(x-n)$ oder $mn-nx=mx-mn$; oder geordnet:
$mn+mn=mx+nx$ oder: $2mn=(m+n)x$;
daher: $x=2mn:(m+n)$.

ζ) $(m^2+mn+n^2)x=m^3-n^3$ oder:
$(m^2+mn+n^2)x=(m^2+mn+n^2)(m-n)$; diese Gl. durch m^2+mn+n^2 dividiert giebt: $x=m-n$.

η) Entwickle diese Gleichung und ordne sie, so ist:
$1+\frac{3}{8}+\frac{5}{7}+35\frac{5}{5}\frac{1}{6}=\frac{35}{6}x+\frac{1}{2}x$ oder:
$38=\frac{38}{6}x$; daher $\frac{1}{6}x=1$; folglich $x=6$.

61. α) Ordne diese Gleichung und multipliziere sie mit $p+q$, so ist:
$[1-(p+q)]x=(m+n)(p+q)$; daher:
$x=[(m+n)(p+q)]:[1-(p+q)]$.

β) Diese Gleichung, mit $1-x$ multipliziert und geordnet, giebt:
$(a+1)x=a-1$; folglich $x=(a-1):(a+1)$.

γ) Hier erhält man: $(1+a)x=1-a$; also $x=(1-a):(1+a)$.

62. α) Durch Ordnen und Vereinigen erhält man hier:
$\frac{2n}{x}=a-b$; folglich $x=2n:(a-b)$.

β) Ordne diese Gleichung und multipliziere sie mit abn, so ist:
$(b+n-abdn)x=abn(e+cd)-bm$; folglich:
$x=[abn(e+cd)-bm]:(b+n-abdn)$ oder
$\frac{b(an[e+cd]-m}{n+b-abdn}$.

63. Aus dieser Gl. wird: $0{,}75x+3{,}33=3{,}57$. Nach der regula falsi sei $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, so wird $\varphi'=0{,}24$, $\varphi''=-0{,}51$, also
$$x=\frac{1.0{,}24+0.0{,}51}{0{,}24+0{,}51}=\frac{0{,}24}{0{,}75}=0{,}32.$$

64. Vereinfache diese Gleichung, so ist:
$3\frac{1}{4}-4\frac{3}{8}x=3\frac{5}{8}x-\frac{3}{4}$ oder: $(3\frac{1}{4}+\frac{3}{4})=(4\frac{3}{8}+3\frac{5}{8})x$;
daher: $4=8x$; folglich $x=\frac{1}{2}$.

65. Subtrahiert man vom letzten Reste 1, so erhält man 0; daraus folgt, daß der letzte Rest 1 beträgt; dies ist der dritte Teil dieses Restes, also der ganze Rest $=3.1=3$. Wäre vom vorigen Reste nicht 1 subtrahiert worden, so wäre dieser Rest $3+1=4$ gewesen; das war dann der dritte Teil des vorigen Restes, also der ganze Rest $3.4=12$. Diese 12 sind dadurch entstanden, daß man von dem vorhergehenden Reste 1 subtrahiert, also war der dritte Teil dieses Restes $=12+1=13$ und der ganze Rest $3.13=39$. Schließt man auf diese Weise weiter, so war der vorhergehende Rest $3.(39+1)=120$; folglich ist die gesuchte Zahl $3.(120+1)=363$ oder symbolisch dargestellt:

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}x-1]-1)-1]-1)=1$$

$$\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}x-1]-1)-1]=3.1+1=4$$

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}x-1]-1)=3.4+1=13$$

$$\tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}x-1]=3.13+1=40$$

$$\tfrac{1}{3}x=3.40+1=121;\ x=3.121=363.$$

66. α) Der 9. Teil des Ganzen ist 1, also ist das Ganze selbst $9.1=9$. Diese 9 sind dadurch entstanden, daß man zum 7. Teile 8 addiert; wäre dies nicht geschehen, so wäre der 7. Teil $8-7=1$, also das Ganze $7.1=7$ gewesen. Diese 7 sind entstanden, daß man zum 5. Teile 6 addiert, also ist der 5. Teil $7-6=1$, mithin das Ganze $5.1=5$. Schließt man so weiter, so findet man, daß der 3. Teil $5-4=1$, also das Ganze $3.1=3$ ist; folglich heißt die gesuchte Zahl $3-2=1$ oder symbolisch dargestellt:

$$\tfrac{1}{7}[\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}[x+2]+4)+6]=9.1-8=1$$

$$\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}[x+2]+4)=7.1-6=1$$

$$\tfrac{1}{3}[x+2]+5.1-4=1;\ x=3.1-2=1.$$

Man vergleiche Beisp. 19 im folgenden §. 385.

β) Entwickele und ordne diese Gleichung, so ist:

$$x+\tfrac{1}{18}x-\tfrac{2}{3}x=\tfrac{16}{9}+1+\tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{9},\text{ oder:}$$

$$\tfrac{7}{18}x=\tfrac{35}{9};\text{ oder }\tfrac{1}{18}x=\tfrac{5}{9};\text{ daher }x=2.5=10.$$

67. α) $a-nx+mn=mn-mx$; daher:

$$a=(n-m)x;\text{ also }x=a:(n-m).$$

β) $apx-ap(an+bm)=bq(an+bm)-bqx$;

$$(ap+bq)x=(ap+bq)(an+bm);\text{ daher: }x=an+bm.$$

γ) $2a=(a+x)\left(a+\frac{a}{x}\right)+a\left(a-\frac{a}{x}\right)+x\left(a-\frac{a}{x}\right)$ oder

$$2a=(a+x)\left(a+\frac{a}{x}\right)+(a+x)\left(a-\frac{a}{x}\right)\text{ oder}$$

$$2a=(a+x)\left(a+\frac{a}{x}+a-\frac{a}{x}\right)\text{ oder}$$

$$2a=(a+x).2a,\text{ daher }1=a+x;\text{ also }x=1-a.$$

68. Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$7{,}1-63{,}65+11{,}875x=39{,}7625-4{,}05-72x.$$

Ordnet man diese Gleichung, so ist:

$$(11{,}875+72)x=39{,}7625+63{,}65-(7{,}1+4{,}05) \text{ oder}$$
$$83{,}875x=92{,}2625;\ x=92{,}2625:83{,}875=1{,}1.$$

69. Dividiert man diese ganze Gleichung durch 0,945, so ist:

$$10x-0{,}945-9{,}45x=x-94{,}5+9{,}45x, \text{ oder geordnet:}$$
$$94{,}5-0{,}945=(1+9{,}45+9{,}45-10)x \text{ oder}$$
$$93{,}555=9{,}9x;\ \text{folglich } x=93{,}555:9{,}9=9{,}45.$$

70. Ordnet man die Gleichung, so hat man:

$$\frac{5b-6c}{4a^2}x+\frac{6c-4a}{3b-4c}x-\frac{5b-4a}{3b-4c}x=\frac{5n-4c}{2a}+\frac{3b-5n}{2a}-2a.$$

Vereinigt man jetzt die gleichnamigen Quotienten, so ist:

$$\frac{5b-6c}{4a^2}x+\frac{6c-5b}{3b-4c}x=\frac{3b-4c}{2a}-2a=\frac{3b-4c-4a^2}{2a}.$$

Um die Brüche aus dieser Gleichung fortzuschaffen, multipliziere man dieselbe mit $4a^2(3b-4c)$, so hat man:

$$x[(5b-6c)(3b-4c)+4a^2(6c-5b)]=$$
$$2a(3b-4c)(3b-4c-4a^2),$$

oder $x(5b-6c)(3b-4c-4a^2)=2a(3b-4c)(3b-4c-4a^2)$;

folglich $x=\frac{2a(3b-4c)\times(3b-4c-4a^2)}{(5b-6c)\times(3b-4c-4a^2)}=\frac{2a(3b-4c)}{5b-6c}$.

71. α) Diese Gleichung mit 14 multipliziert giebt:

$$28-2(5+x)=14-(9-x) \text{ oder geordnet}$$
$$28+9-10-14=2x+x \text{ oder } 13=3x;\ \text{also } x=4\tfrac{1}{3}.$$

β) Aus dieser Gleichung erhält man $60:x=20$; also $x=3$.
γ) „ „ „ „ „ $60:x=15$; „ $x=4$.
δ) „ „ „ „ „ $60:x=12$; „ $x=5$.

72. α) Multipliziert man die Gleichung mit ab, so hat man:

$$a^3b^2-a(a+x)=a^2b^3-b(b+x).$$

Entwickele und ordne die Gleichung, so ist:

$$(a-b)x=a^3b^2-a^2-a^2b^3+b^2, \text{ oder:}$$
$$(a-b)x=a^2b^2(a-b)-(a^2-b^2); \text{ oder}$$
$$(a-b)x=(a-b)(a^2b^2-a-b); \text{ daher}$$
$$x=a^2b^2-a-b.$$

β) Ordnet man die Gleichung, so erhält man:

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{x}-\frac{a-b}{x}.$$

Nimmt man die in beiden Teilen nur angedeutete Subtraktion vor, so ist:

$$\frac{(a+b)-(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b)-(a-b)}{x}, \text{ oder}$$

$$\frac{2b}{(a-b)(a+b)}=\frac{2b}{x}, \text{ durch 2b dividiert giebt:}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{x};$$ hieraus folgt $x=a^2-b^2$.

γ) Aus dieser Gleichung ergiebt sich, daß:
$\frac{3(m+n)^2}{p^2x}-\frac{m+n}{p}=\frac{2(m+n)}{p}$; dividiere jedes Glied dieser Gleichung durch $\frac{m+n}{p}$, so ist: $\frac{3(m+n)}{px}-1=2$ oder $\frac{3(m+n)}{px}=3$; daher $\frac{m+n}{px}=1$; folglich $\frac{m+n}{p}=x$.

δ) Da $(a+b)^2(x+1)-(a+b)(x+1)+(x+1)=[(a+b)^2-(a+b)+1](x+1)$, so erhält man:
$\frac{[(a+b)^2-(a+b)+1)](x+1)}{a+b+1}=(a+b)^2-(a+b)+1$; diese Gleichung durch $[(a+b)^2-(a+b)+1]$ dividiert, giebt:

$$\frac{x+1}{a+b+1}=1;$$ folglich $x=a+b$.

73. Um die Brüche aus dieser Gleichung wegzuschaffen, multipliziere man dieselbe mit 120, und man erhält:
$8(2x-3)-6(4x-9)=4(8x-27)-5(16x-81)-3.9$, oder $16x-24-24x+54=32x-108-80x+405-27$. Hieraus erhält man $4x+3=27$. Nach der regula falsi sei $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, dann wird $\varphi'=20$, $\varphi''=16$, daher ist:

$$x=\frac{2.20-1.16}{20-16}=6.$$

74. α) Gemäß der Auflösung der 30. Gleichung ist:

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$$

Setze diesen Wert in die Gl., so ist:

$$\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2}-\frac{a^2x+b^3}{a^2}=2b+\frac{b^2}{a}$$ oder

$$\frac{a^3+a^2b+ab^2-a^2x}{a^2}=2b+\frac{b^2}{a}.$$

Diese Gleichung mit a^2 multipliziert und geordnet giebt:
$a^3+a^2b-2a^2b+ab^2-ab^2=a^2x$, oder $a^2x=a^3-a^2b$, oder $a^2x=a^2(a-b)$; folglich $x=a-b$.

β) Ordne diese Gleichung und multipliziere sie mit 2, so erhält man:

$$\frac{a+b}{b}-\frac{2a}{a+b}=\frac{c(a-b)}{bx}+\frac{2bc}{(a+b)x}.$$

Multipliziere diese Gleichung mit $b(a+b)$, so ist:
$a^2+b^2=\frac{c(a^2-b^2)}{x}+\frac{2b^2c}{x}$ oder $\frac{c(a^2+b^2)}{x}=a^2+b^2$;
daher: $\frac{c}{x}=1$; also $x=c$.

γ) Formt man die Gleichung nach §. 54 um, so erhält man: $(a^3-a^2+a)(x+1)=a^4+x$. Hieraus folgt: $(a^3-a^2+a-1)x=a(a^3-a^2+a-1)$; also $x=a$.
Oder: $(a^3-a^2+a-1)(x+1)=a^4-1$
$=(a^3-a^2+a-1)(a+1)$;
also: $x+1=a+1$; daher $x=a$.

75. α) Entwickelt man die Gleichung und ordnet sie, so hat man:
$\frac{1}{9}x+\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}x=13\frac{6}{7}-(\frac{4}{5}+\frac{8}{9})$;
$(\frac{1}{9}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})x=13\frac{6}{7}-(\frac{4}{5}+\frac{8}{9})$;
$\frac{143}{315}x=\frac{3833}{315}$; daher $143x=3833$;
folglich $x=3833:143=26\frac{115}{143}$.

75. β) Multipliziere diese Gl. mit 111 und ordne sie, so ist:
$(111^2+111-1)x=111^3+111^2-111$ oder
$(111^2+111-1)x=(111^2+111-1)111$; also $x=111$.

76. Ordnet man die Gl. und vereinigt die Quotienten mit gleichen Divisoren, so erhält man $\frac{\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+x}=\frac{4}{3}$. Diese Gleichung multipliziert mit $3(\frac{2}{3}+x)$ giebt:
$$2x+4=\frac{8}{3}+4x;\ 2x=\frac{12-8}{3},\ \text{also } x=\frac{2}{3}.$$

77. α) Setzt man der Kürze halber $1{,}4142=a$, so ist
$\frac{1}{a-\frac{1}{x}}=a$; daher $\frac{1}{a}=a-\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$ oder
$\frac{1}{x}=\frac{a^2-1}{a}$; daher $x=\frac{a}{a^2-1}=\frac{1{,}4142}{(1{,}4142)^2-1}=\frac{1{,}4142}{0{,}999962}$
$=1{,}4142$.

β) Multipliziere diese Gleichung mit 14 und ordne sie, so ist:
$15(14x-1)=14^2(14x-1)$; hieraus erhält man:
$14^2(14x-1)-15(14x-1)=0$; oder
$(14^2-15)(14x-1)=0$;
also nach §. 112: $14x-1=0$; $x=\frac{1}{14}$.

78. α) Zu beiden Seiten b addiert giebt:
$\frac{a}{m+x}=b+c$. Nun ist nach §. 380. m)
$\frac{a}{b+c}=m+x$; folglich $x=\frac{a}{b+c}-m=\frac{a-(b+c)m}{b+c}$.

β) Aus dieser Gl. erhält man: $b-abx=x-a$ oder: $(ab+1)x=a+b$; folglich $x=(a+b):(ab+1)$.

79. α) Ordne die Gl., so ist:
$$n+m=\frac{nx}{q+x}+\frac{p+x}{q+x}=\frac{(n+1)x+p}{q+x}.$$
Mit $(q+x)$ multipliziert giebt:

$(n+m)(q+x)=(n+1)x+p$, oder
$(n+m)q+(n+m)x=(n+1)x+p$ oder geordnet:
$(n+m)x-(n+1)x=p-(n+m)q$, oder
$(m-1)x=p-(n+m)q$; folglich
$x=[p-(m+n)q]:(m-1)$.

β) Vereinigt man die beiden Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so erhält man: $\frac{(a^2+b^2)x}{ab(x+c)}=1$, und hieraus: $(a^2-ab+b^2)x=abc$, folglich $x=abc:(a^2-ab+b^2)$.

γ) Multipliziere diese Gleichung mit ab, so ist:
$\frac{b}{b-x}+\frac{a}{c-x}=\frac{b}{c-x}$ oder $\frac{b}{b-x}=\frac{b-a}{c-x}$. Daher:
$b(c-x)=(b-a)(b-x)$, woraus sich ergiebt:
$ax=(a-b+c)b$; also $x=\frac{(a-b+c)b}{a}=\frac{b}{a}(a-b+c)$.

80. α) und β) Ordne die Gl., so ist:
$\frac{(m^2-n^2)m}{x}=(3m^2+n^2)-(m\pm n)^2$, oder:
$\frac{(m^2-n^2)m}{x}=2m(m\mp n)$; diese Gleichung durch $m(m\mp n)$ dividiert giebt: $\frac{m\pm n}{x}=2$; folglich $x=\frac{1}{2}(m\pm n)$.

81. α) Da der Quotient $\frac{b^3-c^3}{b-c}=b^2+bc+c^2$ ist, so erhalten wir in

α) $\frac{bc(b+c)}{x}=b^2+bc+c^2-b^2=c(b+c)$; diese Gleichung, durch $(b+c)$ dividiert giebt: $\frac{b}{x}=1$; also $x=b$.

β) $\frac{bc(b+c)}{x}=b(b+c)$; also $\frac{c}{x}=1$; daher $x=c$.

γ) $\frac{bc(b+c)}{x}=bc$; daher $\frac{b+c}{x}=1$; also $x=b+c$.

82. α) Entwickelt man die Gleichung, so erhält man:
$mn-nx-mx+x^2=px+x^2-pq-qx$ oder geordnet:
$mn+pq=(n+m+p-q)x$; folglich
$x=(mn+pq):(m+n+p-q)$.

β) Nach §. 223 ist: $(x+2)(46-x)=(20-x)(x+20)$, oder
$44x-x^2+92=400-x^2$; $44x=308$; also $x=7$.

83. Multipliziert man die Gleichung mit $(3x+14)$, so ist:
$(8x-28)(3x+14)=(4x+21)(6x-22)$ oder
$24x^2+28x-392=24x^2+38x-462$; geordnet:
$462-392=38x-28x$; folglich $10x=70$; $x=7$.

84. $(5x-7)(12x-97)=(4x-2)(15x-125)$ nach §. 223.
Hieraus ergiebt sich, daß $39x=429$; also $x=11$.

85. Entwickele diese Gleichung und ordne sie, so ist:
$(a^2-b^2)ax-(a^2-b^2)(a+b)x^2+abx(a+b)-$
$bx(a+b)^2+(a+b)^2(a-b)x^2+abx(a-b)=a^2b+ab^2$
Hieraus erhalten wir durch fernere Entwickelung:
$(a^3+a^2b-3ab^2-b^3)x=ab(a+b)$; folglich
$x=[ab(a+b)]:[a^3+a^2b-3ab^2-b^3]$.

86. Multipliziert man die Gleichung mit $c(c+dx)$, so ist:
$(a+bx)c-(e-fx)(c+dx)=dfx^2$, oder
$ac+bcx-(ec+dex-cfx-dfx^2)=dfx^2$, oder geordnet
$(bc+cf-de)x=ec-ac=c(e-a)$, oder,
wenn $de>(bc+cf)$ und $a>e$, kann jene Gleichung auch so geordnet werden:
$ac-ec=(de-bc-cf)x$; weshalb also
$$x=\frac{c(a-e)}{de-bc-cf}=\frac{c(e-a)}{bc+cf-de}.$$

87. Nach §. 68 erhalten wir hier:
$(8-3x)^2=8^2+(3x)^2-2.(8.3x)=64+9x^2-48x$
$(4-4x)^2=4^2+(4x)^2-2.(4.4x)=16+16x^2-32x$
$(9-5x)^2=9^2+(5x)^2-2.(9.5x)=81+25x^2-90x$.
Hiernach hat man also:
$64+9x^2-48x+16+16x^2-32x=81+25x^2-90x$,
oder $80+25x^2-80x=81+25x^2-90x$; geordnet:
$90x-80x=81-80$; $10x=1$; folglich $x=\frac{1}{10}$.

88. Erhebt man die einzelnen Ausdrücke dieser Gl. nach §. 67 und §. 68 ins Quadrat, so wird:
$a^4x^2-2a^2b^2x^2-2a^2x+b^4x^2+1+4a^2b^2x^2-4abx+1=$
$a^4x^2+2a^2b^2x^2+2a^2x+b^4x^2+2b^2x+1$.
Vereinigt man die zusammengehörigen Ausdrücke und ordnet sie, so ist:
$x^2(a^4+2a^2b^2+b^4)-x^2(a^4+2a^2b^2+b^4)+1=$
$2x(a^2+2ab-b^2)+2x(a^2+b^2)$. oder
$$1=4ax(a+b);\ \text{folglich}\ x=\frac{1}{4a(a+b)}.$$

89. Nach §. 69 (1) ist $(5+7x)(5-7x)=25-49x^2$. Multipliziert man daher die Gleichung mit $(5+7x)(5-7x)$, so erhält man:
$(1+3x)(5-7x)-(9-11x)(5+7x)=14(2x-3)^2$, oder:
$5+8x-21x^2-45-8x+77x^2=56x^2-168x+126$.
Geordnet und vereinigt: $168x=166$; $x=\frac{83}{84}$.

90. Multipliziert man diese Gleichung mit $35(6x-101)$, so ist:
$(7x-6)(6x-101)-35(x-5)=7x(6x-101)$, oder
$42x^2-743x+606-35x+175=42x^2-707x$, oder
$71x=781$; folglich $x=11$.

91. Man subtrahiere auf beiden Seiten $\frac{16x+7}{24}$, so wird:
$\frac{x-16}{177-9x}=\frac{2x+1}{3}-\frac{16x+7}{24}$ oder $\frac{x-16}{177-9x}=\frac{1}{24}$; daher:
$(x-16)24=177-9x$ oder: $(24+9)x=(384+177)$; also
$33x=561$; $x=17$.

92. α) $\frac{9x+10}{11x-12}=\frac{8+5x}{40}+\frac{12}{13}-\frac{1}{8}x$ oder, wenn wir die Ausdrücke rechts vereinigen:
$\frac{9x+10}{11x-12}=\frac{73}{65}$; daher $(9x+10).65=(11x-12).73$;
$(803-585)x=650+876$; also $218x=1526$; $x=7$.

β) Vereinigt man zuerst die beiden Quotienten, die denselben Divisor $x+1$ haben, so hat man:
$\frac{6-x}{3x+3}+\frac{80x+21}{15x+10}=5$. Vereinige die beiden Quotienten,
so ist $\frac{225x^2+383x+123}{(3x+3)(15x+10)}=5$. Diese Gleichung giebt
$$225x^2+383x+123=225x^2+375x+150,$$
folglich $8x=27$; daher $x=3\frac{3}{8}$.

93. Nach §. 96 verwandelt sich die hier gegebene Gleichung in folgende:
$$\frac{(63x-2)(676-143x)}{374-77x}=117x-28.$$
Multipliziert man diese Gleichung mit $374-77x$, so ist:
$(63x-2)(676-143x)=(117x-28)(374-77x)$, oder
$42874x-9009x^2-1352=45914x-9009x^2-10472$,
oder $3040x=9120$; folglich $x=3$.

94. Da $(3-4x)(7-8x)=21-52x+32x^2$ ist, so multipliziere man die Gleichung mit $3(3-4x)(7-8x)$:
$3[(1-2x)(7-8x)-(5-6x)(3-4x)]=8(1-3x^2)$,
oder $21-66x+48x^2-45+114x-72x^2=8-24x^2$.
Hiernach ist $48x=32$; folglich $x=\frac{2}{3}$.

95. Subtrahiert man hier wirklich $\frac{11x+13}{51}$ von $\frac{5x+32}{17}$,
so erhält man $\frac{4x+83}{51}$; mithin ist
$$\frac{9x+4}{5x-48}+\frac{4x-19}{51}=\frac{4x+83}{51}.$$
Subtrahiert man jetzt beiderseits $\frac{4x-19}{51}$, so hat man:
$\frac{9x+4}{5x-48}=\frac{4x+83}{51}-\frac{4x-19}{51}=\frac{102}{51}=2$; also reduziert sich die

gegebene Gleichung auf folgende: $\frac{9x+4}{5x-48}=2$. Hiernach ist $9x+4=10x-96$; und hieraus folgt, daß $x=100$.

96. α) Vereinigt man im ersten Teile der Gleichung die beiden Quotienten, so hat man:

$$\frac{(x+2a)(2b+x)+(x-2a)(2b-x)}{(2b+x)(2b-x)}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}.$$

Hieraus erhält man: $\frac{4x(a+b)}{4b^2-x^2}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}$, oder

$4x(a+b)=4ab$; folglich $x=\frac{4ab}{4(a+b)}=\frac{ab}{a+b}$.

β) Setzt man zur Abkürzung

$$a+b=s;\ a-b=r,$$

so ist $a=\frac{s+r}{2}$; $b=\frac{s-r}{2}$; ferner ist dann

$4ab=4.\frac{1}{4}(s+r)(s-r)=4.\frac{1}{4}.(s^2-r^2)=s^2-r^2$ und

$$(a+b)(a-b)=rs.$$

Hiernach verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$\frac{sx+c}{rx+d}-\frac{rx+e}{sx+m}=\frac{s^2-r^2}{sr}.$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, so wird

$x[s^2(rc-ds)-r^2(es-mr)]=md(s^2-r^2)-sr(cm-ed)$;

folglich $x=\frac{md(s^2-r^2)-sr(cm-ed)}{s^2(rc-ds)-r^2(es-mr)}$.

Setzt man nun in diese Formel die Werte für s und r, so ist

$$x=\frac{4abmd+(ed-cm)(a^2-b^2)}{(a+b)^2[c(a-b)-d(a+b)]+(a-b)^2[(a-b)m-(a+b)e]}.$$

97. Man multipliziere die Gleichung mit $6(2x-7)$, so ist

$$3[x^{n+1}-x^n-x^{n-1}](2x-7)-12(2x^n+x^{n-1})=$$
$$[3x(x^n-x^{n-1})-47x^{n-1}](2x+7).$$

Entwickelt man diese Gl., so wird nach §. 244:

$$6x^{n+2}-27x^{n+1}+15x^n+21x^{n-1}-24x^n-12x^{n-1}=$$
$$6x^{n+2}-27x^{n+1}-37x^n+329x^{n-1}.$$

Ordnet und vereinigt man die gleich hohen Potenzen, so wird:

$$64x^n=320x^{n-1} \text{ oder } x^n=5x^{n-1}.$$

Dividiere diese Gl. durch x^n, so erhält man nach §. 247:

$$1=5x^{-1}.$$

Nun ist nach §. 262: $x^{-1}=\frac{1}{x^1}=\frac{1}{x}$.

Setze diesen Wert für x^{-1} in die letzte Gl., so ist:

$$1=5.\frac{1}{x} \text{ oder } \tfrac{1}{5}=\frac{1}{x}; \text{ also } x=5.$$

Zweite Auflösung. Man dividiere die gegebene Gleichung durch x^{n-1}, so hat man:

$$\frac{x^2-x-1}{2}-\frac{2(2x+1)}{2x-7}=\tfrac{1}{6}[3x(x-1)-47].$$

Jetzt multipliziere man diese Gleichung mit $6(2x-7)$ und man erhält:

$$6x^3-27x^2-9x+9=6x^3-27x^2-73x+329;$$

oder $64x=320$; folglich $x=5$.

98. Da sämtliche Glieder der hier gegebenen Gleichung dieselbe Größe x^n als Faktor haben, so dividiere man diese Gleichung durch x^n und man erhält:

$$\frac{4x+3x^2}{24}+\frac{2x+1}{2x-1}=\tfrac{1}{6}x+\frac{x^2+24}{8}.$$

Vereinige die Quotienten mit den Divisoren 24, 6 und 8, so ist:

$$\frac{2x+1}{2x-1}=\tfrac{1}{6}x+\frac{x^2+24}{8}-\frac{4x+3x^2}{24}.$$

Hieraus erhält man: $\frac{2x+1}{2x-1}=3$; folglich $x=1$.

99. Da in dieser Gleichung negative Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, deren größter Exponent 17 ist, so multipliziere man diese Gleichung zur Wegschaffung der negativen Potenzen mit x^{17} und man erhält:

$$\frac{4x+7}{6x-37}=\frac{6x^2-30x+21}{3x-16}-2x \text{ oder}$$

$\frac{4x+7}{6x-37}=\frac{2x+21}{3x-16}$, mit $(6x-37)(3x-16)$ multipliziert und geordnet, giebt $95x=665$; also $x=7$.

100. Die Potenz $x^{6\frac{4}{5}}=x^{\frac{34}{5}}$ kann nach §. 294 als aus der fünften Wurzel von x^{34} entstanden betrachtet werden. Vor jeder weiteren Operation verwandle man in der gegebenen Gleichung der Bequemlichkeit wegen die aus Ganzen und einem Bruche bestehenden Exponenten in Brüche mit demselben Nenner oder in Quotienten mit demselben Divisor. Zur Wegschaffung der Brüche multipliziere man die Gleichung mit $40\ (x-2)=40\ (x^{\frac{5}{5}}-2)$ und man erhält:

$$\left(x^{\frac{34}{5}}-x^{\frac{29}{5}}\right)\left(x^{\frac{10}{5}}-x^{\frac{5}{5}}\right)\left(x^{\frac{5}{5}}-2\right)5+\left(x^{\frac{24}{5}}-x^{\frac{19}{5}}\right)40$$
$$-5x^{\frac{34}{5}}\left(x^{\frac{10}{5}}+1\right)\left(x^{\frac{5}{5}}-2\right)-8x^{\frac{19}{5}}\left(x^{\frac{5}{5}}-2\right)=$$
$$10\left(5x^{\frac{19}{5}}-x^{\frac{39}{5}}\right)\left(x^{\frac{5}{5}}-2\right).$$

Hieraus erhält man nach §. 296:

$$5x^{\frac{4.9}{5}}-20x^{\frac{4.4}{5}}+25x^{\frac{3.9}{5}}-10x^{\frac{3.4}{5}}+40x^{\frac{2.4}{5}}-40x^{\frac{1.9}{5}}$$
$$-5x^{\frac{4.9}{5}}-5x^{\frac{3.9}{5}}+8x^{\frac{2.4}{5}}+10x^{\frac{4.4}{5}}+10x^{\frac{3.4}{5}}-16x^{\frac{1.9}{5}}=$$
$$50x^{\frac{2.4}{5}}-10x^{\frac{4.4}{5}}-100x^{\frac{1.9}{5}}+20x^{\frac{3.9}{5}}.$$

Ordnet man diese Gleichung und vereinigt die resp. Glieder, so erhält man:

$$44x^{\frac{1.9}{5}}=2x^{\frac{2.4}{5}},\text{ oder } 22x^{\frac{1.9}{5}}=x^{\frac{2.4}{5}}.$$

Dividiere beide Teile dieser Gleichung durch $x^{\frac{1.9}{5}}$, so ist:

$$22x^0=x^{\frac{5}{5}} \text{ oder } 22=x.$$

Oder: Um die gebrochenen Exponenten aus der hier gegebenen Gleichung wegzuschaffen, dividiere man die Gleichung durch $x^{3\frac{4}{5}}$ und man erhält:

$$\frac{(x^3-x^2)(x^2-x)}{8}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{5x^3(x^2+1)-8}{40}=\frac{5-x^4}{4}.$$

Man bringe $\frac{5x^3(x^2+1)-8}{40}$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und vereinige diesen Ausdruck mit $\frac{5-x^4}{4}$, so ist: $\frac{(x^3-x^2)(x^2-x)}{8}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{5x^3(x-1)^2+42}{40}$ oder

$$\frac{x^3(x-1)^2}{8}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{5x^3(x-1)^2+42}{40}.$$

Man subtrahiere auf beiden Seiten $\frac{x^3(x-1)^2}{8}=\frac{5x^3(x-1)^2}{40}$, so erhält man: $\frac{x-1}{x-2}=\frac{21}{20}$; folglich $x=22$.

b) Wurzelgleichungen (101—125).

§. 383b. 101. In dieser Gleichung und den folgenden (bis 125 incl.) kommt die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor und heißt deshalb eine Wurzelgröße. Vgl. §. 278.

Man multipliziere die Gleich. mit $\sqrt{x}$, so ist

$$\frac{(9+7x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=7\tfrac{1}{4}\sqrt{x}\,.\sqrt{x}.$$

Nun ist nach §. 280: $\sqrt{x}.\sqrt{x}=\sqrt{x^2}=x$ und es ist daher:

$$9+7x=7\tfrac{1}{4}\sqrt{x}.\sqrt{x}=7\tfrac{1}{4}\sqrt{x^2}=7\tfrac{1}{4}x,$$
folglich $\frac{1}{4}x=9$; und $x=4.9=36$.

102. Um hier die Wurzelgröße wegzuschaffen, erhebe man beide Teile ins Quadrat, und man erhält:

$(\sqrt{x+4})^2=7^2$ oder $\sqrt{(x+4)^2}=7^2$. Nun ist $\sqrt{(x+4)^2}=x+4$; folglich ist $x+4=7^2$; daher $x=7^2-4=45$.

103. Dividiert man diese Gleichung durch 2, so ist $5=\sqrt{\frac{1}{3}x\sqrt{3}}$. Beide Teile quadriert giebt: $(+5)^2=\frac{1}{3}x\sqrt{3}$. Mit $\sqrt{3}$ multipliziert, liefert: $25\sqrt{3}=x$, also $x=43{,}30127$.

104. $10=3\sqrt{x}$; daher ist $\sqrt{x}=\frac{10}{3}$;
folglich $x=(+\frac{10}{3})^2=+\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$.

105. Erhebt man beide Teile ins Quadrat, so hat man: $36+x=(18+\sqrt{x})^2=324+x+36\sqrt{x}$ oder $36\sqrt{x}=-288$, oder $\sqrt{x}=-8$; folglich $x=(-8)^2=+64$. (Man vgl. §. 299.)

106. Wenn man hier, wie im vorhergehenden Beispiele, die Gleichung ins Quadrat erhebt und sie ordnet, so hat man:
$4\sqrt{x}=32$, oder $\sqrt{x}=+8$; $x=(+8)^2=64$.

107. Quadriert man die Gleichung, so hat man:
$x+4ab=4b^2+x+4b\sqrt{x}$ oder $4b(a-b)=4b\sqrt{x}$;
durch 4b dividiert, giebt $(a-b)=\sqrt{x}$; folglich
$x=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

108. Verfährt man hier ebenso und ordnet die Gleichung, so ist
$4a\sqrt{x}=4a(b-a)$ oder $\sqrt{x}=(b-a)$; folglich
$x=(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$.

109. Multipliziere die Gl. mit 11 und ordne sie, so wird:
$5\sqrt{x}=50$ oder $\sqrt{x}=10$; daher $x=10^2=100$.

110. Diese Gleichung quadriert giebt:
$4x^2-7x-6=81-36x+4x^2$, oder geordnet
$29x=87$; folglich $x=3$.

111. $2x-3n=9n+2x-6\sqrt{2xn}$ oder $6\sqrt{2xn}=12n$,
oder $\sqrt{2xn}=2n$; folglich $2nx=4n^2$; also $x=2n$.

112. Die gegebene Gleichung ins Quadrat erhoben giebt: $4p+x=4q+5x-4\sqrt{qx+x^2}$, oder geordnet und durch 4 dividiert, $p-q-x=-\sqrt{qx+x^2}$; ins Quadrat erhoben, giebt: $(p-q)^2-2(p-q)x+x^2=qx+x^2$, oder $(2p-q)x=(p-q)^2$; folglich $x=(p-q)^2:(2p-q)$.

113. Entwickelt man die Gleichung und ordnet sie, so hat man:
$3x+69\sqrt{x}-150=14\sqrt{x}+3x+15$ oder
$55\sqrt{x}=165$; daher $\sqrt{x}=+3$; also $x=(+3)^2=9$.

114. Multipliziert man die Gleichung mit $m(\sqrt{x}-\sqrt{m})$, so hat man:
$m(\sqrt{x}+\sqrt{m})=p(\sqrt{x}-\sqrt{m})$, oder
$(m+p)\sqrt{m}=(p-m)\sqrt{x}$ ins Quadrat erhoben, giebt:
$(m+p)^2m=(p-m)^2x$; folglich

$$x=m\cdot\frac{(p+m)^2}{(p-m)^2}=m\cdot\left(\frac{p+m}{p-m}\right)^2.$$

115. Setze $\sqrt{x}=y$ und multipliziere die Gleichung mit $(y+3n)\times(y+n)$, so ist, nachdem man sie geordnet und durch 2 dividiert hat:

$(m-n)y=mn$; folglich $y=\frac{mn}{m-n}$; es ist also

$$\sqrt{x}=\frac{mn}{m-n};\ \text{also}\ x=\left(\frac{mn}{m-n}\right)^2.$$

116. Setzt man $(3x-1)=(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1)$, so erhält man statt der gegebenen Gleichung folgende:

$$\frac{(\sqrt{3x}-1)(\sqrt{3x}+1)}{(\sqrt{3x}+1)}=1+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)\ \text{oder}$$

$\sqrt{3x}-1=1+\frac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)$; hieraus folgt, daß
$\frac{1}{2}\sqrt{3x}=1\frac{1}{2}$ oder $\sqrt{3x}=3$; folglich
$3x=(+3)^2$; also $x=(+3)^2:3=3$.

117. α) Multipliziere die Gleichung mit $\sqrt{2+x}$, so ist
$\sqrt{x}.\sqrt{2+x}+(\sqrt{2+x})(\sqrt{2+x})=4$, oder
$\sqrt{x}.\sqrt{2+x}+2+x=4$, oder
$\sqrt{x}.\sqrt{2+x}=2-x$; ins Quadrat erhoben, giebt:
$x.(2+x)=(2-x)^2$; woraus folgt, daß
$6x=4$; folglich $x=\frac{2}{3}$.

β) Diese Gleichung ins Quadrat erhoben und geordnet giebt:
$(a^2-1)x=a$; folglich $x=a:(a^2-1)$.

γ) Multipliziere diese Gleichung mit $\sqrt{a+x}$, und ordne sie, so ist:
$\sqrt{x}.\sqrt{x+a}=m-(a+x)$. Ins Quadrat erhoben, giebt:
$x(x+a)=m^2-2m(a+x)+(a+x)^2$.

Hieraus erhält man:
$(2m-a)x=(m-a)^2$; folglich $x=(m-a)^2:(2m-a)$.

δ) Nach §. 285 ist $\sqrt[5]{x-p}=\sqrt[30]{(x-p)^6}$ und $\sqrt[6]{x-p}=\sqrt[30]{(x-p)^5}$; daher ist:

$$m\sqrt[30]{(x-p)^6}=n\sqrt[30]{(x-p)^5}.$$

Erhebt man diese Gleichung auf die 30. Potenz, so erhält man:

$m^{30}(x-p)^6=n^{30}(x-p)^5$; oder $m^{30}(x-p)^6-n^{30}(x-p)^5=0$;
$[m^{30}(x-p)-n^{30}](x-p)^5=0$; daher ist:
(1) $m^{30}(x-p)-n^{30}=0$; $x=[n^{30}+pm^{30}]:m^{30}$.
(2) $(x-p)^5=0$; daher $x-p=0$; also $x=p$.

118. $x-a=\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}$ ins Quadrat erhoben, giebt:
$(x-a)^2=a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}$, oder
$x^2-2ax=x\sqrt{b^2+x^2-a^2}$ quadriert, liefert:
$(x^2-2ax)^2=x^2(b^2+x^2-a^2)$, oder

$x^2(x^2-4ax+4a^2)=x^2(b^2+x^2-a^2)$. Dividiert man diese Gleichung durch x^2 und ordnet sie, so hat man:

$$4ax=5a^2-b^2;\ \text{folglich}\ x=(5a^2-b^2):4a.$$

119. Diese Gleichung ins Quadrat erhoben, giebt:

$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{7}{x^2}}$; hieraus erhält man:

$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{nx}=-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{7}{x^2}}$; quadriert, giebt:

$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{nx}\right)^2=\frac{1}{x^2}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{7}{x^2}\right)$; giebt aufgelöst und geordnet:

$\frac{8}{x^4}=\frac{4}{nx^3}$ oder: $\frac{4}{x^3}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{n}\right)=0$;

daher: (1) $\frac{2}{x}-\frac{1}{n}=0$, folglich $\frac{x}{2}=n$; daher $x=2n$.

(2) $\frac{4}{x^3}=0$; also $x^3=\frac{4}{0}$; folglich nach §. 114: $x=\infty$.

120. Hier hat man: $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}$.

Erhebt man beide Teile auf die n^{te} Potenz, so hat man:

$$x=(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})^n.$$

121. Ordnet man die Gleichung, so hat man, wenn man sie mit 3 multipliziert:

$$15.\sqrt[3]{\tfrac{4}{25}x^2-\tfrac{8}{125}x^3}=5-6x.$$

Erhebt man diese Gleichung auf die dritte Potenz, so hat man:

$$15^3(\tfrac{4}{25}x^2-\tfrac{8}{125}x^3)=(5-6x)^3.$$

Da nun $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, so ist, wenn $a=6$ und $b=6x$,

$(5-6x)^3=5^3-3.5^2.6x+3.5.(6x)^2-(6x)^3=$
$125-450x+540x^2-216x^3$. Es ist also:

$3375\left(\frac{4x^2}{25}-\frac{8x^3}{125}\right)=125-450x+540x^2-216x^3$, oder

$540x^2-216x^3=125-450x+540x^2-216x^3$.

Hieraus folgt: $450x=125$; mithin $x=\frac{5}{18}$.

122. Da nach §. 285: $\sqrt[n]{mx-n}=\sqrt[2n]{(mx-n)^2}$ ist, weil $\sqrt[n]{mx-n}=\sqrt[n]{(mx-n)^1}=(mx-n)^{\frac{1}{n}}$ nach Beispiel 100 und $\sqrt[2n]{(mx-n)^2}=(mx-n)^{\frac{2}{2n}}=(mx-n)^{\frac{1}{n}}$, also die Wurzelgröße in jedem Falle durchaus unverändert bleibt, so erhält man:

$$\sqrt[2n]{m^2x^2-mnx}=\sqrt[2n]{(mx-n)^2}.$$

Erhebt man beide Teile der Gleichung auf die $2n^{te}$ Potenz, so ist

$m^2x^2-mnx=(mx-n)^2$. Hieraus ergiebt sich, daß

$$mx=n;\ x=n:m.$$

123. Erhebe die beiden Wurzelgrößen auf die sechste Potenz, so hat man:

$$\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^2=\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^3 \text{ oder:}$$

$$\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^3-\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^2=0; \text{ daher:}$$

$$\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^2\left(\frac{x-m+n}{m^2-nx}\right)=0; \text{ folglich:}$$

$$(1)\ \frac{x-m+n}{m^2-nx}=0; \text{ also } x=m-n$$

$$(2)\left(\frac{n^2+mx}{m^2-nx}\right)^2=0; \text{ also } x=-\frac{n^2}{m}.$$

124. Multipliziere diese Gleichung mit $3+5\sqrt[10]{x+24}$, so erhält man:

$$50\sqrt[10]{x+24}-9=21+35\sqrt[10]{x+24} \text{ oder}$$

$$15\sqrt[10]{x+24}=30; \text{ also: } \sqrt[10]{x+24}=2.$$

Erhebe diese Gleichung auf die zehnte Potenz, so ist:

$$x+24=2^{10}; \text{ folglich}$$

$$x=2^{10}-24=1024-24=1000.$$

125. Setzt man $(13580-x)=y$, so erhält man statt der gegebenen Gleichung folgende: $(12y-9)^2+(5y-1)^2=(3y-8)^3$.

Hieraus erhält man: $18y=18$; also $y=1$.

Substituiert man den für y gefundenen Wert, so ist

$$13580-x=1; \text{ folglich } x=13579.$$

c) Exponentialgleichungen (126—156).

§. 384a. Exponentialgrößen sind im allgemeinen solche, deren Exponenten unbekannt oder selbst auf eine Potenz erhoben sind: z. B. a^x, $(a-b)^{mx}$, $(5a)^{x^n}$. Eine Gleichung von der Form $a^x=b$ heißt daher eine Exponentialgleichung, und es fragt sich, auf welchen Exponenten die gegebene Zahl a erhoben werden muß, um die bekannte Zahl b zu erhalten. Auf direktem Wege lassen sich diese Gleichungen vermittels der bisher gegebenen Anweisungen nicht auflösen, wohl aber durch Logarithmen, weshalb sie auch logarithmische Gleichungen genannt werden. Vgl. §§. 340—375.

126. α) Um den Wert für x zu bestimmen, hat man nach §. 357 (1):

$$x \log m = \log n; \text{ folglich}$$

$$x = \log n : \log m;$$ d. h. man findet den Exponenten (x), indem man den Logarithmus der Potenz (n) durch den Logarithmus der Basis (m) dividiert.

β) Bei gleichen Potenzen mit gleicher Basis sind auch die Exponenten einander gleich; da nun

$$x^x = x^1,$$

so muß x=1 sein; daher haben wir die identische Gleichung

$$x^1 = x^1.$$

γ) Nach §. 261 ist jede Größe auf den Exponenten 0 erhoben gleich 1. Es ist also

$a^0 = 1$ und da $a^x = 1$, so ist auch $a^x = a^0$

folglich muß nach β) ebenfalls x=0 sein.

δ) Wenn bei gleichen Potenzen die Exponenten gleich sind, so müssen auch ihre Basen gleich sein, weshalb hier

$$a = m \text{ sein muß.}$$

127. Nach §. 258 wird eine Potenz wieder auf eine Potenz erhoben, wenn man die Exponenten mit einander multipliziert. Erhebt man hier die drei Potenzen bezüglich auf die fünfte, siebente und neunte Potenz, so erhält man:

$$a^{25x+5} = a^{49x-7} . a^{9x-54}.$$

Nach §. 244 erhalten wir, wenn wir die auf der rechten Seite dieser Gleichung nur angedeutete Multiplikation ausführen:

$$a^{25x+5} = a^{49x-7+9x-54} \text{ oder: } a^{25x+5} = a^{58x-61}.$$

Da diese beiden Potenzen einander gleich sind und gleiche Basen haben, so müssen auch ihre Exponenten einander gleich sein. Daher ist:

$$25x+5 = 58x-61. \text{ Daher } x=2.$$

128. Da nach §. 72 der Dividend dem Produkte aus dem Quotienten in den Divisor gleich ist, so hat man hier:

$$\sqrt[3+x]{a^{20}} = a^3 . a^2 = a^5.$$

Erheben wir diese Gleichung auf die $(3+x)^{te}$ Potenz, so erhalten wir nach §. 21, §. 258 und §. 277:

$$a^{20} = (a^5)^{3+x} = a^{15+5x},$$

daher ist, wie im vorhergehenden Beispiele:

$$20 = 15 + 5x;$$

also 5x=5; folglich x=1. Setzen wir diesen Wert für x in das gegebene Beispiel, so erhalten wir:

$$\sqrt[4]{a^{20}} : a^2 = a^3.$$

$a^{20:4} : a^2 = a^3$ nach §. 287;

d. i. $a^5 : a^2 = a^3$

$a^{5-2} = a^3$ nach §. 247; d. i. $a^3 = a^3$.

129. Da bei gleichen Potenzen mit gleichen Basen die Exponenten notwendig einander gleich sein müssen, so ergiebt sich hier unmittelbar:

$$(15x-3)(7-4x)=(20x-7)(9-3x).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $84x=42$; $x=0,5$.

130. Erheben wir die gegebene Gleichung auf die x^{te} Potenz, so erhalten wir:

$c^{3x}.c^{7+5x}=c^{23}$; durch c^7 dividiert, giebt nach §. 247: $c^{3x}.c^{5x}=c^{16}$ oder nach §. 244: $c^{8x}=c^{16}$; daher: $8x=16$; also $x=2$.

131. Hier ist: $\sqrt{a^{3-4x}}=\sqrt[5]{a^{6-7x}}.\sqrt[8]{a^{9-10x}}$ nach §. 72;

$\sqrt{a^{3-4x}}=\sqrt[40]{(a^{6-7x})^8.(a^{9-10x})^5}$ nach §. 289 Nr. 8;

oder $\sqrt{a^{3-4x}}=\sqrt[40]{a^{93-106x}}$.

Erhebe diese Gleichung auf die 40^{te} Potenz, so hat man:

$$a^{60-80x}=a^{93-106x}.$$

Dividiere diese Gleichung durch a^{60-80x}, so ist:

$a^0=a^{33-26x}$; hieraus folgt, daß

$33-26x=0$; folglich $x=1\frac{7}{26}$.

132. Multipliziert man die Größe über dem Wurzelzeichen, also den Wurzel-Exponenten und die Potenz mit derselben Größe, so bleibt nach §. 285 die Wurzelgröße unverändert. Hiernach ist:

$$\sqrt[aa-xx]{(m^{b+x})^{a+x}}:\sqrt[aa-xx]{(m^{b-x})^{a-x}}=\sqrt[aa-xx]{m^2}.$$

Erhebe diese Gleichung auf die $(aa-xx)^{te}$ Potenz, so ist:

$(m^{b+x})^{a+x}:(m^{b-x})^{a-x}=m^2$, oder:

$m^{(b+x)(a+x)-(b-x)(a-x)}=m^2$ nach §. 247.

Entwickelt man den Exponenten der Potenz auf der linken Seite, so ist:

$$(m^{(a+b)x})^2=m^2.$$

Ziehe aus dieser Gleichung die zweite Wurzel, so hat man:

$$m^{(a+b)x}=m^1;$$

folglich: $(a+b)x=1$; daher $x=\frac{1}{a+b}$.

133. Nach §. 262 ist jede Potenz mit negativem Exponenten gleich dem reciproken Werte der Potenz, potenziert mit dem positiven Exponenten. Mit Rücksicht hierauf erhalten wir aus der gegebenen Gleichung:

$$1:a^{\frac{5}{4}+x}=a^{\frac{5}{6}}.$$

Multipliziere diese Gleichung mit $a^{\frac{5}{4}+x}$ und setze $1=a^0$, so ist:

$a^0=a^{\frac{25}{12}+x}$; daher $\frac{25}{12}+x=0$; $x=-2\frac{1}{12}$.

134. α) Wenn der Quotient $=1$ ist, so ist nach §. 75 der Dividend dem Divisor gleich; daher ist:

$$a^{4,5}.\sqrt{a^{3-4x}}=\sqrt[5]{a^{6-7x}}.$$

Erhebe diese Gleichung auf die zehnte Potenz, so hat man:

$$a^{60-20x}=a^{12-14x}.$$

Dividiere diese Gleichung durch a^{12-14x}, so ist:

$$a^{6(8-x)}=a^0;$$

daher: $8-x=0$; also $x=8$.

134. β) Nimmt man hier zunächst dieselben Operationen vor, wie bei α), so erhält man aus der Gleichung:

$\sqrt{a^{3-4x}}=a^{4,5}\sqrt[5]{a^{6-7x}}$ die folgende: $a^{6(7+x)}=a^0$;

daher $7+x=0$; folglich $x=-7$.

135. Nach §. 355 und §. 357 hat man hier vermittels Logarithmen:

$$x\log m=\log p+\log q;\ \text{folglich}$$
$$x=(\log p+\log q):(\log m).$$

136. Durch Umformung der hier gegebenen Gleichung erhält man:

$$n^{2x}.p^{-4x}.q^{6x}=n^3.p^{-5}.q^7\ \text{oder:}$$
$$(n.p^{-2}.q^3)^{2x}=n^3.p^{-5}.q^7.$$

Daher haben wir vermittels Logarithmen:

$$2x(\log n-2\log p+3\log q)=3\log n-5\log p+7\log q:$$

$$\text{folglich}\ x=\frac{3\log n-5\log p+7\log q}{2(\log n-2\log p+3\log q)}.$$

137. Dividiere die hier gegebene Gleichung durch $a^{(m-1)(x-n)}b^{(p+1)(x-q)}$, so erhält man:

$$a^{x+2n}b^{2q-x}=1\ \text{oder:}$$
$$a^x.b^{-x}.a^{2n}.b^{2q}=1;\ \text{daher:}$$
$$(b.a^{-1})^x=(a^n.b^q)^2.$$

Vermittels Logarithmen hat man jetzt:

$$x(\log b-\log a)=2\log(a^nb^q);$$

$$\text{folglich}\ x=\frac{2\log(a^nb^q)}{\log b-\log a}=\frac{\log(a^{2n}b^{2q})}{\log b-\log a}.$$

138. In diesem Beispiel soll der Exponent gesucht werden, auf den die Basis des Brigg'schen Logarithmensystems, nämlich 10, erhoben werden muß, um die Basis des natürlichen Systems nämlich $e=2,718281828$ zu erhalten. Dies findet seine Erledigung in den §§. 362 und 367, wonach

$$10^{0,434294482}=2,718281828,$$

weshalb $x=0,434294482$.

139. Man potenziere diese Gleichung mit 2,7182818, so erhält man:

$$\frac{1}{x}=0,6922006^{2,7182818};\ \text{daher}$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right)=2,7182818\log 0,6922006.$$

Bestimmt man nun nach §. 364 den Logarithmus zu der Zahl 0,6922006, so findet man, daß

$\log 0{,}6922006 = 0{,}8402320 - 1$ ist.

Setzen wir diesen Wert in unsre Gleichung ein, so hat man:

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = 2{,}7182818 \,.\, (0{,}8402320 - 1);$$

$$= -0{,}4342945 = 0{,}5657055 - 1$$ nach §. 363.

Die Zahl, die zu diesem Logarithmus gehört, ist:

$$3{,}6787958 : 10 = 0{,}36787958.$$

Setzt man diesen Wert für $(-0{,}4342945)$ in die obige Gleichung, so erhält man:

$$\frac{1}{x} = 0{,}36787958;$$ daher:

$$x = 1 : 0{,}36787958 = 2{,}7182818.$$

140. α) Vermittels Logarithmen hat man:

$$2{,}478062 \log 3 = x \log 2{,}478062;$$

folglich $x = \frac{2{,}478062 \log 3}{\log 2{,}478062} = \frac{1{,}1823362}{0{,}3941122} = 3.$

β) Es ist $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$; $3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = (\frac{3}{2})^3$. Setze diese Werte für $2\frac{1}{4}$ und für $3\frac{3}{8}$ in die gegebene Gleichung, so ist:

$\left((\frac{3}{2})^2\right)^{\frac{27}{8}} = \left((\frac{3}{2})^3\right)^x$ oder $(\frac{3}{2})^{\frac{27}{4}} = (\frac{3}{2})^{3x}$ nach §. 256.

Nach Beisp. 127 ist also: $3x = \frac{27}{4}$; $x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

γ) Verfahren wir hier, wie im vorigen Beispiele, so ist

$\left((\frac{4}{3})^3\right)^{\frac{256}{81}} = \left((\frac{4}{3})^4\right)^x$; oder $(\frac{4}{3})^{\frac{256}{27}} = (\frac{4}{3})^{4x}$;

also $4x = \frac{256}{27}$; daher $x = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$.

141. Nach §. 259 erhält man aus der gegebenen Gleichung:

$$(1{,}226875^x)^{3{,}57} = (17^{1{,}226875})^{3{,}57}.$$

Radizieren wir diese Gleichung mit 3,57, so erhalten wir:

$$1{,}226875^x = 17^{1{,}226875};$$ daher

$$x \log 1{,}226875 = 1{,}226875 \log 17;$$ also

$$x = \frac{1{,}226875 \log 17}{\log 1{,}226875} = \frac{1{,}1226875 \times 1{,}2304489}{0{,}0888004.} = 17.$$

142. Diese Gl. würde einen Widerspruch enthalten, wenn man für x eine gerade Zahl fände, da sowohl negative wie positive Zahlen, auf eine gerade Potenz erhoben, immer ein positives Produkt geben, negative Zahlen aber, auf eine ungerade Potenz erhoben, immer auch ein negatives Produkt geben (§. 264 Beisp. 24 und 25). Nehmen wir daher für die Auflösung des Beispiels beide Seiten der Gleichung als positiv an, so erhalten wir:

$$x \log 1{,}23 = \log 2{,}8153057;$$

$$0{,}0899051x = 0{,}4495255;$$ folglich $x = 5$.

Daher ist: $(-1{,}23)^5 = -2{,}8153057.$

143. Die Auflösung dieser Gl. ist nicht möglich, da eine positive Zahl auf jede beliebige Potenz erhoben, auch ein positives Produkt giebt, hier aber ein negatives Produkt geben soll.

Für den Fall wir aber das Produkt als positiv annehmen, erhalten wir:

$x \log 1{,}23 = \log 4{,}2592760;$

$0{,}0899051x = 0{,}6293357;$ also $x = 7$.

144. Auch diese Gl. würde einen Widerspruch enthalten, wenn wir für x eine ungerade Zahl fänden. Für die Auflösung nehmen wir $(+4{,}56)^x$ an, dann erhalten wir:

$x \log 4{,}56 = \log 432{,}3738;$

$0{,}659648x = 2{,}6358594;$ also $x = 4$,

folglich ist in der That: $(-4{,}56)^4 = 432{,}3738$.

145. Von dieser Gl. gilt, was bei der Auflösung der Gleichung 142 gesagt ist; nimmt man aber beide Seiten positiv, so hat man:

$x \log 7{,}89 = \log 3875{,}324;$

$0{,}8970770x = 3{,}5883080;$ also $x = 4;$

Hieraus folgt, daß $(-7{,}89)^4 = 3875{,}324$, nicht aber, daß $(-7{,}89)^4 = -3875{,}324$ sein kann.

146. Hier erhält man vermittels Logarithmen:

$(4 + \frac{5}{6}x) \log \frac{5}{3} = \log 151{,}884;$

$4(\log 5 - \log 3) + \frac{5}{6}x(\log 5 - \log 3) = \log 151{,}884;$

$0{,}8873948 + 0{,}1848739x = 2{,}1815121.$

Hieraus folgt, daß $x = 7$.

147. Potenziere diese Gl. mit 7, so hat man:

$0{,}12345^{6x} = 1697365^7;$

$6x \log 0{,}12345 = 7 \log 1697365;$

$-5{,}451053x = 43{,}6084264;$ also $x = -8$.

148. Verwandelt man die negativen Potenzen in positive, so erhält man nach §. 262:

$\left(\frac{10000}{2}\right)^{\frac{3}{5}x} = \left(\frac{100000}{2}\right)^{\frac{7}{9}x} . \left(\frac{100000}{2}\right)^{-13}$, oder:

$5000^{\frac{3}{5}x} = 50000^{\frac{7}{9}x} . 50000^{-13}$, oder:

$5000^{\frac{3}{5}x} = 10^{\frac{7}{9}x} . 5000^{\frac{7}{9}x} . 50000^{-13}$.

Dividiere diese Gleichung durch $5000^{\frac{7}{9}x}$, so hat man:

$1 = 10^{\frac{7}{9}x} . 5000^{\frac{8}{45}x} . 50000^{-13};$ daher

$10^{\frac{7}{9}x} . 5000^{\frac{8}{45}x} = 50000^{-13}$. Es ist also:

$\frac{7}{9}x \log 10 + \frac{8}{45}x \log 5000 = 13 \log 50000;$

$\frac{7}{9}x + \frac{8}{45}x . 3{,}6989700 = 13 . 4{,}6989700;$

$1{,}4353723x = 61{,}0866100;$ also $x = 42{,}5581$.

149. Nach §. 287 erhält man hier aus der gegebenen Gl.:

$10^{\frac{1}{10}} = 1{,}37129^{\frac{1}{x}};$ daher: $\frac{1}{10} \log 10 = \frac{1}{x} \log 1{,}37129;$

oder: $0{,}1x = 0{,}137129;$ daher $x = 1{,}37129$.

150. Potenziere die gegebene Gleichung mit 7x, so ist:

$3^{(5x+7)7} = 5^{3x+1};$ daher: $3^{35x+49} = 5^{3x+1};$ oder:

$3^{35x} . 3^{49} = 5^{3x} . 5$ nach §. 245.

Dividiere diese Gleichung durch 3^{49} und 5^{3x}, so hat man:
$3^{35x}.5^{-3x}=5.3^{-49}$; daher:
$35x\log 3-3x\log 5=\log 5-49\log 3$
$x(35\log 3-3\log 5)=\log 5-49\log 3$; also
$$x=\frac{\log 5-49\log 3}{35\log 3-3\log 5}=\frac{0{,}6989700-23{,}3789437}{16{,}6992455-2{,}0969100}$$
$$=\frac{-22{,}6799737}{14{,}6023355}=-1{,}553174.$$

151. Erhebt man diese Gleichung auf die x^{te} Potenz, so hat man:
$1{,}467799^x=14{,}67799$; daher:
$x\log 1{,}467799=\log 14{,}67799$; folglich
$$x=\frac{\log 14{,}67799}{\log 1{,}467799}=\frac{1{,}1666666}{0{,}1666666}=7.$$

152. Potenziere die gegebene Gleichung mit x, so hat man:
$(\frac{1}{3})^3=(\frac{5}{7})^{9+11x}$; daher $3^3=(\frac{7}{5})^{9+11x}$; daher
$3\log 3=(9+11x)\log\frac{7}{5}$;
$1{,}4313638=(9+11x).0{,}1461280$;
$11x=\frac{1{,}4313638}{0{,}1461280}-9$ oder $11x=0{,}795278$; $x=0{,}072298$.

153. Unter Anwendung von Logarithmen erhält man;
$(8\log 234-\log 567)-\frac{9}{10}x(\log 234-\log 567)=$
$3(\log 987-\log 654)-2x(\log 987-\log 654)+$
$2x\log 1{,}572145-\log 1{,}572145$; oder
$(8-\frac{9}{10}x)(\log 234-\log 567)=(3-2x)(\log 987-\log 654)+$
$(2x-1)\log 1{,}572145$
oder $(8-\frac{9}{10}x)(2{,}3692159-2{,}7535831)=$
$(3-2x)(2{,}9943172-2{,}8155777)+(2x-1).0{,}1964925$;
folglich: $0{,}3104245x=3{,}4146636$; daher $x=11$.

154. Da $3125=5^5$ und $15625=5^6$ nach §. 330, und $0{,}2=$
$\frac{1}{5}=5^{-1}$, so ist:
$3125^{\frac{x+1}{x+2}}=5^{\frac{5(x+1)}{x+2}}$ und $15625^{-\frac{x+2}{x+3}}=5^{-\frac{6(x+2)}{x+3}}$;

Daher erhalten wir die umgeformte Gleichung:
$5^{\frac{5(x+1)}{x+2}}.5^{-\frac{6(x+2)}{x+3}}=5^{-1}$; oder
$5^{\frac{5(x+1)}{x+2}-\frac{6(x+2)}{x+3}}=5^{-1}$; daher
$5^{-\frac{xx+4x+9}{xx+5x+6}}=5^{-1}$; also auch
$5^{\frac{xx+4x+9}{xx+5x+6}}=5^1$; mithin nach Beispiel 127:
$$\frac{xx+4x+9}{xx+5x+6}=1;$$
Hieraus ergiebt sich, daß $x=3$.

155. $5^x \log 3 = \log 7$; also $5^x = \frac{\log 7}{\log 3}$; daher

$$x \log 5 = \log\left(\frac{\log 7}{\log 3}\right) = \log\log 7 - \log 3;$$ also

$$x = \frac{\log\log 7 - \log\log 3}{\log 5} = \frac{\log 0{,}84510 - \log 0{,}47712}{0{,}69897}$$

$$= \frac{-0{,}07309 - (-0{,}32137)}{0{,}69897} = \frac{0{,}24828}{0{,}69897} = 0{,}355207.$$

156. $b^x \log a = \log c$; also $b^x = \frac{\log c}{\log a}$; daher

$x \log b = \log\log c - \log\log a$; folglich

$x = \{\log\log c - \log\log a\} : (\log b)$.

d) Wiederholungsbeispiele (157—198).

§. 384b. 157. α) Die Gleichung mit $3 . 4 = 12$ multipliziert giebt:

$3x - 15 = 14x - 92$; also $11x = 77$; daher $x = 7$.

β) $(x+1) : (x-1) = (p+q) : (p-q)$; hieraus nach §. 228:

$2x : 2p = 2 : 2q$ oder nach §. 222:

$x : p = 1 : q$; daher $x = p : q$.

158. Durch Vereinigung der Quotienten mit gleichen Divisoren erhält man:

$\frac{10x-2}{9} = \frac{5x+7}{6}$; also $5x = 25$; folglich $x = 5$.

159. Ordne diese Gleichung, so findet man:

$(a^2+a+1)x = a^3 - 1 = (a^2+a+1)(a-1)$; folglich

$x = a - 1$.

160. Multipliziere die ganze Gleichung mit $(a-x)$ und ordne sie, so ist:

$(a-5)x = a^2 - 7a + 10 = (a-5)(a-2)$; also $x = a - 2$.

161. Entwickle diese Gleichung und ordne sie, so hat man:

$(q^3 - p^3 + p^2q - pq^2)x = q^4 - p^4$ oder:

$(q^3 + p^2q - pq^2 - p^3)x = (q^3 + p^2q - pq^2 - p^3)(p+q)$;

folglich $x = p + q$.

162. Multipliziere die ganze Gleichung mit 8 und ordne sie, so ist:

$26x = 26$; also $x = 1$.

163. α) Multipliziere diese Gleichung mit $(a+2b)(b+2a)$, so ist:

$a(2x-a)(b+2a) + b(2x-b)(a+2b) = x(a+2b)(b+2a)$.

Durch Entwicklung dieser Gleichung erhält man:

$[2(a^2+b^2) - ab]x = [2(a^2+b^2) - ab](a+b)$;

folglich $x = a + b$.

β) $(x+1):(x-1)=(a+b+1):(a+b-1)$; hieraus nach §. 228
$2x:2(a+b)=2:2$ oder nach §. 222
$x:(a+b)=1:1$, daher $x=a+b$.

164. Multipliziere diese Gleichung mit $(a+b)(a+c)(b+c)$, so ist:
$a(x-a)(a+b)(a+c)+b(x-b)(b+c)(a+b)+$
$c(x-c)(a+c)(b+c)=x(a+b)(a+c)(b+c)$.
Entwickele diese Gleichung und ordne sie, so wird:
$(a^3+b^3+c^3+abc)x=(a^3+b^3+c^3+abc)(a+b+c)$;
folglich $x=a+b+c$.

165. α) Hier erhält man:
$(a^2+ab+b^2)x=a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b)$;
folglich $x=a-b$.
β) $(3x-b):(3x-5b)=(3a-4b):(3a-8b)$, hieraus nach §. 227:
$4b:(3x-b)=4b:(3a-4b)$, daher nach §. 232:
$3x-b=3a-4b$; also $x=a-b$.

166. Die ganze Gleichung mit $ab(a+b)$ multipliziert giebt:
$abx+a^2b^2x(a+b)=ab(a+b)^2+(a+b)$ oder
$abx[ab(a+b)+1]=(a+b)[ab(a+b)+1]$; folglich
$abx=a+b$; also $x=(a+b):ab=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

167. Multipliziere die ganze Gleichung mit 24, so ist:
$264-18x+6-16x-8=240-16x+40-21x+3$ oder
$3x=21$; folglich $x=7$.

168. Diese Gleichung mit 30 multipliziert und geordnet giebt:
$42x=294$; folglich $x=7$.

169. Hier erhält man: $c(a-b)-cx=d(a-b)-dx$, oder
$(c-d)x=c(a-b)-d(a-b)=(c-d)(a-b)$;
folglich $x=a-b$.

170. Multipliziert man die ganze Gleichung mit $(a+b)(a-b)$, so ist:
$a(a^2-b^2)-x(a-b)-(x-4ab)(a+b)-2b(a+b)^2=$
$b(a^2-b^2)-x(a+b)$;
$a(a^2-b^2)-b(a^2-b^2)-2b(a+b)^2=x(a-b)-x(a+b)+$
$(x-4ab)(a+b)$; oder
$(a-b)(a+b)^2=(a-b)x$; folglich $x=(a+b)^2$.

171. Zur Fortschaffung der Brüche multipliziere die ganze Gleichung mit mnp; so ist:
$mnp^2-pnx+n^2p^2=mpx-m^2p^2-mnx+m^2n^2-mnp^2$ oder
$(mp+np-mn)x=(mp+np-mn)(mp+np+mn)$; folglich
$x=mn+mp+np$.

172. Multipliziere diese Gleichung mit $(a+c)(b+c)(a-b)$, so ist:
$(x-b^2+2ac)(b+c)(a-b)-(x-a^2+2bc)(a+c)(a-b)=$
$(x-c^2-2ab)(a+c)(b+c)$, oder $x[a(b-c)-(a^2-b^2)-c(b+c)]$
$=(a^2+b^2+c^2)[a(b-c)-(a^2-b^2)-c(b+c)]$;
folglich $x=a^2+b^2+c^2$.

173. Multipliziere diese ganze Gleichung mit abc und ordne sie, so ist:

$[(a+b+c)1+(a+b+c)abc]x=abc(abc+1)$ oder
$(abc+1)(a+b+c)x=abc(abc+1)$; daher ist:
$x=(abc):(a+b+c)$.

174. Hieraus findet man: $(4m-3n)x=2m(n^2-5)$;
folglich $x=[2m(n^2-5)]:(4m-3n)$.

175. Multipliziert man hier die ganze Gleichung mit dgns, so ist:
$adgns-bcgns+bgnsx-defns-densx=$
$dghns-dgkms-dgksx-dgnpr+dgnpx$ oder
$x[ns(bg-de)+dg(ks-np)]=(h-a)dgns+ns(bcg+def)-$
$dg(kms+npr)$;
folglich $x=\frac{(h-a)dgns+ns(bcg+def)-dg(kms+npr)}{ns(bg-de)+dg(ks-np)}$.

176. Man addiere zu beiden Seiten der Gleichung 2, ordne sie, so ist, da
$1-a+a^2-a^3=(1+a^2)(1-a)$ und $1+a+a^2+a^3=$
$(1+a^2)(1+a)$

$$(1-x)\left[\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{(1+a^2)(1+a)}+\frac{1}{(1+a^2)(1-a)}\right]=4 \text{ oder}$$

$$(1-x).\left[\frac{1}{1-a^2}+\frac{2+a}{(1+a^2)(1+a)}+\frac{1}{(1+a^2)(1-a)}\right]=4.$$

Hieraus folgt:

$$(1-x)\frac{1+a}{(1-a^2)(1+a^2)(1-a)}=1 \text{ oder } \frac{1-x}{(1+a^2)(1-a^2)}=1;$$

also $1-x=(1+a^2)(1-a^2)$ oder $1-x=1-a^4$; folglich $x=a^4$.

177. Hier hat man zunächst: $\frac{23-3x}{(x-6)(11-x)}=\frac{3}{x-1}$; also
$(23-3x)(x-1)=3(x-6)(11-x)$; hieraus erhält man:
$25x=175$; daher $x=7$.

178. Es ist hier: $\frac{8(6-x)}{(x-3)(7-x)}=\frac{8}{x-1}$; hieraus hat man
$(6-x)(x-1)=(x-3)(7-x)$, oder $3x=15$; also $x=5$.

179. Multipliziert man die ganze Gleichung mit $(x-a)(x-b)(x-c)$, so ist:
$p(x-b)(x-c)+q(x-a)(x-c)=(p+q)(x-a)(x-b)$, oder:
$(p+q)x^2-cx(p+q)-x(bq+aq)-c(bp+aq)=$
$(p+q)x^2-x(p+q)(a+b)+ab(p+q)$ oder
$x[(a-c)p+(b-c)q]=(a-c)bp+(b-c)aq$; also
$x=[bp(a-c)+aq(b-c)]:[p(a-c)+q(b-c)]$.

180. Vereinigt man zunächst die Quotienten mit denselben Divisoren, so ist:

$$\frac{a}{x-m}-\frac{c}{x-m}+\frac{b}{x-n}-\frac{a}{x-n}+\frac{c}{x-p}-\frac{b}{x-p}=0;$$

oder: $\frac{a-c}{x-m}-\frac{a-b}{x-n}-\frac{b-c}{x-p}=0.$

Hieraus erhält man:

$(a-c)(x-n)(x-p)-(a-b)(x-m)(x-p)-$
$(b-c)(x-m)(x-n)=0$ oder
$x[a(m-n)-b(p-n)+c(p-m)]=ap(m-n)-bm(p-n)+$
$cn(p-m);$

folglich $x=\frac{ap(m-n)-bm(p-n)+cn(p-m)}{a(m-n)-b(p-n)+c(p-m)}.$

181. Vereinigt man die Quotienten mit gleichen Divisoren, so findet man: $\frac{-1}{x-5}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-4}=0$; folglich
$-1(x-2)(x-4)-(x-5)(x-4)+2(x-5)(x-2)=0.$
Hieraus erhält man: $x-8=0$; folglich $x=8$.

182. Subtrahiert man von beiden Seiten $\frac{1}{x-1}$ und vereinigt die auf jeder Seite des Gleichheitszeichens stehenden Quotienten, so ist:

$$\frac{4}{(x-4)(x-3)}=\frac{4}{(x-5)(x-1)} \text{ oder } \frac{1}{(x-4)(x-3)}=\frac{1}{(x-5)(x-1)},$$

daher ist: $(x-5)(x-1)=(x-4)(x-3)$; woraus $x=7$.

183. Addiere zu beiden Seiten $\frac{1}{x+5}$ und subtrahiere $\frac{4}{x+2}$; so ist

$$\frac{4}{(x+3)(x+2)}=\frac{4}{(x+5)(x+1)} \text{ oder } \frac{1}{(x+3)(x+2)}=\frac{1}{(x+5)(x+1)},$$

daher ist: $(x+5)(x+1)=(x+3)(x+2)$; folglich $x=1$.

184. Hier hat man: $\frac{4}{1+x}+\frac{4}{2-x}=\frac{3}{3+x}+\frac{3}{1-x}$ oder:

$$\frac{12}{(1+x)(2-x)}=\frac{12}{(3+x)(1-x)} \text{ oder } \frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{(3+x)(1-x)},$$

daher ist: $(1+x)(2-x)=(3+x)(1-x)$; folglich ist $x=\frac{1}{3}$.

185. Man ordne die Gleichung auf folgende Weise:

$$\frac{m-q}{x-n}-\frac{m-q}{x-p}=\frac{n-p}{x-m}-\frac{n-p}{x-q},$$

$$\frac{(m-q)(n-p)}{(x-n)(x-p)}=\frac{(m-q)(n-p)}{(x-m)(x-q)} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{(x-n)(x-p)}=\frac{1}{(x-m)(x-q)}; \text{ daher}$$

$(x-n)(x-p)=(x-m)(x-q)$. Hieraus erhält man:
$x=(np-mq):(n-m+p-q).$

186. Addiere $\frac{9}{x-3}$ zu beiden Seiten und vereinige die beiden Quotienten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens, so ist:

$$\frac{5x-13}{(x-1)(x-5)}=\frac{5x-33}{(x-3)(x-7)}.$$ Daher ist

$(5x-13)(x-3)(x-7)=(5x-33)(x-1)(x-5)$; folglich
$12x=108$; also $x=9$.

187. Multipliziere die ganze Gleichung mit
$(x-3)(x-2)(x-1)(x-4)$, so ist:
$$6(x-2)(x-1)(x-4)-9(x-3)(x-1)(x-4)+$$
$$6(x-3)(x-2)(x-4)=(x-3)(x-2)(x-1).$$
Hieraus erhält man $3x=15$; also $x=5$.

188. Verfährt man hier ebenso, so erhält man:
$14x=98$; folglich $x=7$.

189. Diese Gleichung besteht aus sechs Ausdrücken, wenn man die zwei letzten in je zwei mit den Divisoren $x-q$ und $x-m$ zerlegt. Multiplizieren wir die ganze Gleichung mit $(x-n)(x-p)(x-q)(x-m)$, so erhalten wir nach gehöriger Entwickelung und Reduktion die Schlußgleichung:
$$x[a(n-q)(m-n)+b(m-p)(p-q)](q-m)=$$
$$[ap(m-n)(n-q)+bn(m-p)(p-q)](q-m).$$
Daher ist:
$$x=\frac{ap(m-n)(n-q)+bn(m-p)(p-q)}{a(m-n)(n-q)+b(m-p)(p-q)}.$$

190. Setzt man hier der Abkürzung halber $m(a-b)=A$, $c(m+n)=B$, $n(a-b)=C$, so ist:
$$\frac{A+B}{x-a}-\frac{C+B}{x-b}=\frac{A}{x-(a+c)}-\frac{C}{x-(b-c)}$$ oder
$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-a}-\frac{C}{x-b}-\frac{B}{x-b}=\frac{A}{x-(a+c)}-\frac{C}{x-(b-c)}.$$
$$\frac{A}{x-a}-\frac{A}{x-(a+c)}+\frac{B}{x-a}-\frac{B}{x-b}-\frac{C}{x-b}+\frac{C}{x-(b-c)}=0.$$
$$A\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-(a+c)}\right)+B\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)-C\left(\frac{1}{x-b}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{x-(b-c)}\right)=0.$$
$$A\left(\frac{x-(a+c)-(x-a)}{(x-a)[x-(a+c)]}\right)+B\left(\frac{(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)}\right)-$$
$$C\left(\frac{x-(b-c)-(x-b)}{(x-b)[x-(b-c)]}\right)=0.$$
Entwickelt man diese Gl. und nimmt die notwendigen Reduktionen vor, so erhält man schließlich:
$$c[(a-b)(b-a)-c(a-b)](m-n)x=c[(a-b)(b-a)-$$
$$c(a-b)][m(b-c)-n(a+c)],$$
folglich $x=[m(b-c)-n(a+c)]:(m-n)$.

191. Zerlegt man die beiden Quotienten auf der linken Seite

der Gleichung in je 2 Quotienten und vereinigt diejenigen, welche gleiche Divisoren haben, so hat man:

$$c(a+b)\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)+a^2\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-(a+c)}\right)+$$
$$b^2\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-(b-c)}\right)=0.$$

$$(a^2-b^2)\frac{1}{(x-a)(x-b)}=a^2\frac{1}{(x-a)[x-(a+c)]}+$$
$$b^2\frac{1}{(x-b)[x-(b-c)]}=0.$$

$$(a^2-b^2)[x-(a+c)][x-(b-c)]-a^2\big((x-b)[x-$$
$$(b-c)]\big)+b^2\big((x-a)[x-(a+c)]\big)=0.$$

$$[(a^2-b^2)-(a^2-b^2)]x^2-[(a^2-b^2)(a+b)-a^2(2b-c)+$$
$$b^2(2a+c)]x=a^2b(b-c)-ab^2(a+c)-(a^2-b^2)(a+c)(b-c).$$

Hieraus erhält man:

$$(b-a-c)(a^2+b^2)x=(b-a-c)[a^2(b-c)+b^2(a+c)]$$

folglich $x=[a^2(b-c)+b^2(a+c)]:(a^2+b^2)$.

192. Hier ist: $x-(a+b)=0$; folglich $x=a+b$.

193. Es ist: $5x-20=0$; also $5x=20$; folglich $x=4$.

194. Aus dieser Gleichung erhält man: $14x=84$; also $x=6$.

195. Reduziert man diese Gleichung auf Null und erwägt, daß die Produkte den gleichen Faktor

$\frac{x}{n-o}-\frac{1}{p-q}$ haben, so erhält man:

$$(a+r)\left(\frac{x}{n-o}-\frac{1}{p-q}\right)=0;$$

daher: $\frac{x}{n-o}-\frac{1}{p-q}=0$ oder $\frac{x}{n-o}=\frac{1}{p-q}$; folglich

$$x=(n-o):(p-q).$$

196. Da die sämtlichen Produkte den gleichen Faktor $[(x-m)+(n-o)]$ haben, so erhält man:
$(\frac{7}{8}-\frac{3}{5}-\frac{2}{7}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4})[(x-m)+(n-o)]=0$; daher

$$x-m+n-o=0; \text{ folglich } x=m-n+o.$$

197. Da ein Produkt$=0$ wird, wenn einer seiner Faktoren oder jeder Faktor$=0$ ist, so kann, wenn jeder der drei Faktoren $=0$ gesetzt wird, x folgende Werte haben. Ist nämlich

$3x-12=0$; so ist $3x=12$; also $x_1=4$;
$5x-25=0$; so ist $5x=25$; also $x_2=5$;
$7x-42=0$; so ist $7x=42$; also $x_3=6$.

198. Der Gleichung wird Genüge geleistet, wenn $x_1=a+b$; $x_2=a-b$ und $x_3=-a-b=-(a+b)$ gesetzt wird.

4. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 63.

a) Aufgaben (1—119).

§. 385a. In den bisherigen Beispielen kam es darauf an, die verschiedenen Operationen kennen zu lernen, um den Wert der Unbekannten in gegebenen Gleichungen zu ermitteln, d. h. Gleichungen unter den manchfaltigsten Formen auflösen zu können. Wichtiger aber und weit bildender ist es, aus einer gegebenen Aufgabe die Gleichung herleiten und bilden zu können. Es ist nicht möglich, allgemein gültige Regeln für die Auflösungen der verschiedenen Aufgaben aufzustellen. Denn bald giebt die Aufgabe unmittelbar die Gleichung, bald ist man genötigt, in derselben diejenigen Bedingungen aufzusuchen, welche zur Bildung der Gleichung dienen können; bald sind es endlich die Bedingungen der Aufgabe nicht selbst, welche man algebraisch ausdrücken muß, sondern andere, welche man als Folgerungen aus den ersteren betrachten kann. Die ersten nennt man klar ausgedrückte und die letzten in dem Vortrage der Aufgabe versteckt liegende Bedingungen. Hierbei merke man sich vor allem folgendes: Man betrachte die Aufgabe als gelöst und zeige vermittels der algebraischen Zeichen an den durch Zahlen oder Buchstaben bekannten Größen und der immer durch einen Buchstaben bezeichneten unbekannten Größe dieselben Schlüsse und dieselben Operationen an, welche man vornehmen müßte, um die Richtigkeit des Wertes der Unbekannten zu prüfen, wenn derselbe gegeben wäre. Hierdurch erhält man zwei verschiedene algebraische Ausdrücke für eine und dieselbe Größe, worin das Zeichen der unbekannten Größe vorkommt. Stellt man diese Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung der Aufgabe. Wir wollen diese Regel auf die folgenden Beispiele anwenden.

1. Die gesuchte Zahl sei x, addiert man hierzu 12, so erhält man $x+12$. Nun soll nach den Bedingungen der Aufgabe diese Summe gleich 49 sein; daher ist die Gleichung der Aufgabe $x+12=49$; hieraus folgt $x=37$. Auf diese Weise ist also die unbekannte Größe, von dieser ausgehend, aus den bekannten gefunden worden. Die gemeine Rechenkunst löst diese Aufgabe auf einem umgekehrten Wege, und zwar auf folgende Weise. Die Zahl 49 ist eine Summe, die aus zwei Summanden entstanden ist. Einer dieser Summanden beträgt 12, folglich muß der andere $49-12=37$ betragen. Man hat hier also auf direktem Wege, von den bekannten zu der unbekannten Größe übergehend, letztere gefunden. Der Unterschied des algebraischen und arithmetischen Verfahrens wird hieraus ersichtlich.

2. Die Zahl sei x, so heißt die um 19 verminderte Zahl $x-19$, und weil diese Differenz 17 beträgt, so ist $x-19=17$; folglich $x=36$.

Arithmetische Auflösung. Die Zahl 17 ist die Differenz zwischen zwei Zahlen, wovon der Subtrahend 19 beträgt. Da nun der Minuend gleich ist der Summe des Subtrahenden und der Differenz, so heißt die gesuchte Zahl $17+19=36$.

3. Die Zahl sei x; subtrahiert man diese Zahl von 63, so hat man $63-x$, und da der Rest 27 ausmacht, so ist:

$$63-x=27;\ \text{folglich}\ x=36.$$

Arithmetische Auflösung. Wenn der Rest 27 beträgt und der Minuend 63, so beträgt der Subtrahend, welcher gleich ist der Differenz zwischen dem Minuenden und dem Reste, $63-27=36$.

4. Die Zahl heiße x, so ist das Produkt aus x und $79=79x$; da dieses Produkt 4187 ausmacht, so erhält man:

$$79x=4187;\ \text{folglich}\ x=53.$$

Arithmetische Auflösung. Die Zahl 4187 ist ein Produkt aus zwei Faktoren, wovon der eine Faktor 79 beträgt; also muß der andere Faktor $4187:79=53$ sein.

5. α) Die Zahl sei x. Dividiert man 7 durch die Zahl x, so hat man $\frac{7}{x}$, und da dieser Quotient 56 ausmacht, so ist $\frac{7}{x}=56$; woraus folgt, daß $x=\frac{1}{8}$.

Arithmetische Auflösung der eingeklammerten Zahlen. Da 91 der Dividend und 7 der Quotient ist, und man den Divisor findet, wenn man den Dividend durch den Quotienten dividiert, so heißt der Divisor $91:7=13$.

β) Heißt die Zahl, in welche 7 zu dividieren ist, x, so hat man $\frac{x}{7}$, und da dieser Quotient 56 ausmacht, so ist $\frac{x}{7}=56$;

$$\text{folglich}\ x=7.56=392.$$

Arithmetische Auflösung der eingeklammerten Zahlen. Da 91 der Divisor und 7 der Quotient ist, und der Dividend gleich ist dem Produkte aus dem Divisor in den Quotienten, so ist der $\text{Dividend}=7.91=637$.

6. α) Die Zahl sei x; diese Zahl durch $2\frac{1}{4}$ dividiert, giebt den Quotienten $\frac{x}{2\frac{1}{4}}=\frac{4x}{9}$; da derselbe $2\frac{2}{3}$ beträgt, so ist

$$\frac{4x}{9}=2\tfrac{2}{3};\ \text{folglich}\ x=6.$$

Arithmetische Auflösung. Aus dem Quotienten $2\frac{2}{3}$ und dem Divisor $2\frac{1}{4}$ findet man den Dividenden, indem man den Quotienten mit dem Divisor multipliziert; derselbe beträgt also $2\frac{1}{4}\times2\frac{2}{3}=6$.

6. β) Es heiße die Zahl x, so ist $\frac{2\frac{1}{4}}{x}=2\frac{2}{3}$; $x=\frac{27}{32}$.

7. Es sei die gesuchte Zahl $=x$, so ist das 9fache dieser Zahl $=9x$; da dieses 2 weniger beträgt, als 74, so muß man zu 9x die 2 addieren, um 74 zu erhalten, es ist also:

$$9x+2=74;\ \text{folglich}\ x=8.$$

Arithmetische Auflösung. Die Zahl 74 ist um 2 größer, als das 9fache der gesuchten Zahl; also beträgt das 9fache der Zahl $74-2=72$; folglich das Einfache $72:9=8$.

8. Die Zahl heiße x, so ist das 17fache dieser Zahl $=17x$ und das 16fache $=16x$; die Summe beider Produkte $=16x+17x$ und da dies 2211 ausmacht, so ist

$$17x+16x=2211;\ \text{folglich}\ x=67.$$

Arithmetische Auflösung. Das 33fache der Zahl beträgt 2211, also das Einfache $2211:33=67$.

9. α) Die gedachte Zahl sei x; das 5fache dieser Zahl, also 5x von 42 subtrahiert, giebt $(42-5x)$ und da diese Differenz $=7$ ist, so hat man: $42-5x=7$; also $x=\frac{42-7}{5}=7$.

β) Wenn das $1\frac{3}{7}$fache einer Zahl, von 68 subtrahiert, 18 als Rest giebt, so muß das $1\frac{3}{7}$fache oder $\frac{10}{7}$fache der Zahl $=68-18=50$ sein; also das $\frac{1}{7}$fache $=5$; folglich das Ganze $7.5=45$.

10. α) Arithmetische Auflösung. Addiert man zum 6. Teile einer Zahl 9, so erhält man 13; folglich muß der 6. Teil der Zahl $=13-9=4$ sein; daher ist die Zahl $4.6=24$.

β) Die Zahl sei x, der 11. Teil derselben beträgt $\frac{x}{11}$; zu diesem Quotienten $13\frac{1}{4}$ addiert, giebt $\left(\frac{x}{11}+13\frac{1}{4}\right)$ und da diese Summe $13\frac{41}{44}$ ausmacht, so ist

$$\frac{x}{11}+13\tfrac{1}{4}=13\tfrac{41}{44};\ \text{folglich}\ x=7\tfrac{1}{2}.$$

11. α) Aus den Angaben der Aufgabe ergiebt sich, daß der Quotient um 7 größer ist, als 12; er beträgt also $12-7=5$; mithin ist der gesuchte Divisor $60:5=12$.

β) Diese Zahl heiße x; dieselbe in 0,35786 dividiert, liefert $\frac{0{,}35786}{x}$; diesen Quotienten von 0,2468 subtrahiert, giebt $\left(0{,}2468-\frac{0{,}35768}{x}\right)$, und da diese Differenz 0,1234 ausmacht, so ist: $0{,}2468-\frac{0{,}35786}{x}=0{,}1234$; folglich $x=2{,}9$.

12. Heißt die gedachte Zahl x, so ist der m^{te} Teil derselben $=\frac{x}{m}$;

diesen Quotienten von a subtrahiert, giebt $\left(a-\frac{x}{m}\right)$, und da diese Differenz$=b$ ist, so hat man:

$$a-\frac{x}{m}=b\text{; folglich } x=m(a-b).$$

13. Die verlangte Zahl sei 1. Untersuchen wir nun, ob und inwiefern diese Annahme den Bedingungen der Aufgabe genügt. Es müßte $\frac{12.1+34}{56}$ den Quotienten 78 geben, giebt aber nur $\frac{46}{56}$, mithin $77\frac{10}{56}$ zu wenig. Ferner sei die verlangte Zahl 2, dann wird der Quotient $\frac{12.2+34}{56}=\frac{58}{56}$, also $76\frac{54}{56}$ zu wenig. Demnach ist die verlangte Zahl$=$ $\frac{2.77\frac{10}{56}-1.76\frac{54}{56}}{77\frac{10}{56}-76\frac{54}{56}}=\frac{77\frac{22}{56}}{\frac{12}{56}}=361\frac{1}{6}$.

14. α) Die gedachte Zahl sei x; zähle ich das $\frac{5}{7}$fache dieser Zahl $=\frac{5}{7}x$ zu 98, also $(\frac{5}{7}x+98)$, so erhalte ich die Zahl selbst, also x; mithin hat man: $\frac{5}{7}x+98=x$; folglich $x=343$.

Arithmetische Auflösung zu β). Da das $\frac{3}{5}$fache und 12 die Zahl selbst ausmachen, so muß das $1\frac{2}{5}$fache soviel als 12 betragen; mithin ist das $\frac{1}{5}$fache der Zahl$=6$; die Zahl selbst $5.6=30$.

15. α) Die Zahl heiße x. Da nun das 7fache derselben, also 7x, gleich der um 7 vermehrten Zahl, also$=(x+7)$ sein soll, so ist $7x=x+7$; folglich $x=1\frac{1}{6}$.

β) Wird für 7 allgemein p gesetzt, so ist $px=x+p$,

$$\text{woraus } x=\frac{p}{p-1}.$$

16. α) Heißt die Zahl x, so soll der Quotient $\frac{x}{n}$ oder $\frac{x}{3}$ so viel betragen, als die Differenz $x-n$ oder $x-3$. Es ist also

(1) $\frac{x}{n}=x-n$; folglich $x=\frac{n^2}{n-1}$;

(2) $\frac{x}{3}=x-3$; folglich $x=4\frac{1}{2}$.

β) Die gesuchte Zahl sei x, und weil $\frac{x}{n}$ oder $\frac{x}{3}$ ebensoviel ausmachen soll, als $n-x$ oder $3-x$, so ist

(1) $\frac{x}{n}=n-x$; also $x=n^2:(1+n)=\frac{n^2}{1+n}$.

(2) $\frac{x}{3}=3-x$; also $x=2\frac{1}{4}$.

17. Die Zahl sei x. Da das 15fache derselben$=15x$ dem um

56 vermehrten 8fachen der Zahl, also $(8x+56)$ gleich sein soll, so hat man: $15x=8x+56$; folglich $x=8$.

Arithmetische Auflösung der eingeklammerten Zahlen. Da das 12fache der Zahl um 28 größer ist, als das 5fache derselben, so beträgt das 7fache der Zahl$=28$, also das 1fache$=4$.

18. α) Die Zahl sei x, so ist das $5\frac{3}{4}$fache der Zahl$=5\frac{3}{4}x$; hierzu $7\frac{1}{3}$ addiert, giebt $(5\frac{3}{4}x+7\frac{1}{3})$. Da diese Summe so viel ausmacht, als das $7\frac{1}{2}$fache der Zahl weniger $1\frac{2}{3}=(7\frac{1}{2}x-1\frac{2}{3})$, so giebt dies $5\frac{3}{4}x+7\frac{1}{3}=7\frac{1}{2}x-1\frac{2}{3}$, oder $1\frac{3}{4}x=9$; folglich $x=5\frac{1}{7}$.

β) Heißt die Zahl x, so hat man nach der Aufgabe: $mx+n=px+q$ oder $x(m-p)=q-n$; folglich $x=\frac{q-n}{m-p}$; oder $n-q=(p-m)x$; daher $x=\frac{n-q}{p-m}$.

19. α) Die Zahl heiße x, nehme ich davon die Hälfte, so habe ich $\frac{1}{2}x$, hiervon 1 subtrahiert, giebt $\frac{1}{2}x-1$; der 3. Teil hiervon ist $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x-1)$; hiervon wieder 1 subtrahiert, giebt $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x-1)-1$; der 4. Teil dieses Restes, wieder um 1 vermindert, giebt $\frac{1}{4}[\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x-1)-1]-1$; da dies 1 ausmacht, so ist:

$$\tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}x-1)-1]-1=1;\ \text{folglich } x=56.$$

Aufl.
$$\tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}x-1)-1]=1+1=2$$
$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}x-1)-1=4.2=8$$
$$\tfrac{1}{2}x-1=3.(8+1)=27$$
$$x=2.(27+1)=56.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Hätte ich den 4. Teil des Restes nicht um 1 vermindert, so hätte ich 2 übrig behalten müssen und das war der 4. Teil des vorigen Restes, also war der ganze Rest $4.2=8$. Hätte ich den vorigen Rest nicht um 1 vermindert, so hätte der 3. Teil desselben $8+1=9$ betragen, also der ganze Rest $3.9=27$. Wäre endlich die Hälfte nicht um 1 vermindert worden, so hätte dieselbe $27+1=28$ betragen; folglich ist die gesuchte Zahl $2.28=56$.

β) Die Zahl heiße x; hiervon beträgt die Hälfte $\frac{1}{2}x$; diese von 1 subtrahiert, giebt $1-\frac{1}{2}x$. Hiervon beträgt der 3. Teil $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x$. Subtrahiere ich denselben von 1, so erhalte ich $1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}x$; hiervon beträgt der 4. Teil $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}x$. Wird derselbe wieder von 1 subtrahiert, so bleibt noch $1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{24}x)=\frac{5}{6}-\frac{1}{24}x$, und da dieser $\frac{13}{16}$ ausmacht, so ist:

$$\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{24}x=\tfrac{13}{16};\ \text{folglich } x=\tfrac{1}{2}.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Dadurch, daß ich den 4. Teil des Restes von 1 subtrahiere, erhalte ich $\frac{13}{16}$; demnach betrug der 4. Teil des Restes $1-\frac{13}{16}=\frac{3}{16}$; also der ganze Rest $4.\frac{3}{16}=\frac{3}{4}$. Diese $\frac{3}{4}$ waren dadurch entstanden, daß ich den 3. Teil des vorigen Restes von 1 abgezogen habe,

also war der 3. Teil $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, also der ganze Rest $3.\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Diese $\frac{3}{4}$ waren entstanden, nachdem ich die Hälfte der Zahl von 1 subtrahiert, demnach war die Hälfte $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$; folglich ist die gesuchte Zahl $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

20. α) Heißt die größere der beiden Zahlen x, so heißt die kleinere, da ihre Differenz 12 beträgt, $x-12$; die Summe der beiden Zahlen ist also $x+x-12=2x-12$. Nun soll ihre Summe=30 sein; es ist daher $2x-12=30$, mithin $x=21$; die kleinere Zahl $21-12=9$.

Arithmetische Auflösung zu β). Wenn beide Zahlen addiert 124, und von einander subtrahiert 30 ausmachen, so ist die eine derselben um 30 größer, als die andere. Wären beide Zahlen einander gleich, so würde die Summe derselben $124-30=94$ betragen und also jede $\frac{94}{2}=47$ sein. Die kleinere Zahl ist also 47, während die größere $47+30=77$ ist.

21. α) Habe ich in der linken Tasche x *Nkr*, so habe ich in der rechten, da die linke 6 *Nkr* mehr enthält, $(x-6)$ *Nkr*; also habe ich in beiden Taschen $(2x-6)$ *Nkr*. Da dies 54 *Nkr* ausmacht, so ist $2x-6=54$; folglich $x=30$ *Nkr* in der linken Tasche und $30-6=24$ *Nkr* in der rechten.

Zweite (arithmetische) Auflösung. In beiden Taschen habe ich 54 *Nkr*; da ich in der linken 6 *Nkr* mehr habe, als in der rechten, so beträgt das, was ich in der rechten habe, die Hälfte von $(54-6)$ oder von 48, macht 24 *Nkr*. Hätte ich also in jeder Tasche gleich viel, so hättte ich 24 *Nkr*. Da die linke 6 *Nkr* mehr enthält, so habe ich in derselben $24+6=30$ *Nkr*.

β) Habe ich in der rechten Tasche x *M*, so habe ich in der linken, in welcher sich 1,24 *M* mehr befindet, $x+1{,}24$ *M*. Die Summe meines Geldes in beiden Taschen beträgt also $2x+1{,}24$ *M*, und weil dies 5,18 *M* ausmacht, so ist

$2x+1{,}24=5{,}18$; also $x=1{,}97$ *M* habe ich in der rechten und $1{,}24+1{,}97=3{,}21$ *M* in der linken Tasche.

22. α) Der Tag sei x Stunden lang, so ist die Nacht, welche 13 Stunden länger ist, $(x+13)$ Stunden lang; also betragen Tag und Nacht $(2x+13)$ Stunden und da dies 24 Stunden ausmacht, so ist: $2x+13=24$; folglich $x=5\frac{1}{2}$ Stunden der Tag und $5\frac{1}{2}+13=18\frac{1}{2}$ Stunden die Nacht. Mithin geht die Sonne morgens $18\frac{1}{2}:2=9\frac{1}{4}$ Stunden nach Mitternacht, also um $9\frac{1}{4}$ Uhr auf und $5\frac{1}{2}:2=2\frac{3}{4}$ Stunden nach Mittag, also um $2\frac{3}{4}$ Uhr nachmittags unter oder $9\frac{1}{4}+5\frac{1}{2}=14\frac{3}{4}$ Stunden nach Mitternacht $= 2\frac{3}{4}$ Uhr nachmittags.

β) Die Sonne gehe im Winter in x Monaten gar nicht auf, so geht sie, da sie ebensolange im Sommer nicht untergeht, in 2x Monaten weder auf noch unter. Die Zeit also,

in welcher binnen 24 Stunden Abwechselung von Tag und Nacht stattfindet, beträgt 12—2x Monate und weil diese Zeit $1\frac{1}{2}$ Monat länger ist, als die Zeit der anhaltenden Nacht, so ist

$12-2x=x+1\frac{1}{2}$; folglich $x=3\frac{1}{2}$ Monate.

23. α) Befinden sich in der I. Klasse x Schüler, so sind in der II., die 4 Schüler mehr zählt, $(x+4)$, in der III., die 8 Schüler mehr enthält, als die II., $(x+4+8)=(x+12)$ und in der IV., die 3 Schüler mehr zählt, als die III., $(x+12+3)$ $=(x+15)$ Schüler. In allen 4 Klassen befinden sich also $x+(x+4)+(x+12)+(x+15)=4x+31$ Schüler, und da dies 123 beträgt, so ist $4x+31=123$; folglich $x=23$ Schüler in der I., $(23+4)=27$ in der II., $(23+12)=35$ in der III. und $(23+15)=38$ in der IV. Klasse.

Arithmetische Auflösung zu β). Die 3 Klassen enthalten 23 Schüler mehr, als die I. Zieht man diesen Mehrbetrag derselben, woran die I. Klasse keinen Anteil hat, von der Summe der sämtlichen Schüler 123 ab, so erhält man den vierfachen Betrag der I. Klasse, nämlich $123-23=100$. Die Schülerzahl der I. Klasse ist demnach = dem 4. Teile von $100=25$; demnach sind in der II. Klasse $25+5=30$, in der III. $25+11=36$ und in der IV. $25+7=32$ Schüler.

24. In dem Garten seien x Sträucher, so sind, da der Bäume 5 mehr sind, $(x+5)$ Bäume; also ist die Anzal der Sträucher und Bäume $x+(x+5)$, und weil im ganzen 51 Stück da sind, so ist $2x+5=51$; folglich $x=23$ Sträucher und $(23+5)=28$ Bäume.

Sind nun ferner x Äpfelbäume da, so sind $(x-3)$ Kirschbäume und $(x-5)$ Birnbäume, also zusammen $x+(x-3)+(x-5)=(3x-8)$ Stück. Es ist demnach, da die Anzahl derselben 28 beträgt, $3x-8=28$; folglich $x=12$ Äpfelbäume, also $(12-3)=9$ Kirschbäume und $(12-5)=7$ Birnbäume.

Sind endlich x Stachelbeersträucher, so sind $(x-7)$ Johannisbeersträucher, und es ist daher, da die Anzahl der Sträucher 23 beträgt, $2x-7=23$; folglich $x=15$ Stachelbeersträucher und $(15-7)=8$ Johannisbeersträucher.

25. Der Pfosten sei x *m* lang, so steht er $\frac{1}{4}x$ *m* in der Erde und $\frac{1}{3}x$ *m* im Wasser. Ragt er nun noch $2\frac{1}{2}$ *m* über dem Wasser hervor, so ist $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x+2\frac{1}{2}=x$; folglich $x=6$ *m*.

Arithmetische Auflösung. Steht er um $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ seiner Länge in der Erde und um $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ derselben im Wasser, so steht er um $\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$ seiner Länge in der Erde und im Wasser, und ragt daher um $\frac{5}{12}$ seiner Länge über dem Wasser hervor. Da nun $\frac{5}{12}$ seiner Länge $2\frac{1}{2}$ *m* beträgt, so ist $\frac{1}{12}$ derselben $=\frac{1}{2}$ *m*; folglich ist der Pfosten $12\times\frac{1}{2}=6$ *m* lang.

26. α) Wird das Zwanzigfrancstück zu x ℳ gerechnet, so betragen 36 Zwanzigfrancstücke 36x ℳ. Da er nun mit 36x+16,80 ℳ eine Summe von 600 ℳ bezahlt, so ist:

$$36x+16,80=600;\ x=16,20\ ℳ$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da er die Summe von 600 ℳ mit 36 Zwanzigfrancstücken und 18,80 ℳ bezahlt, so betragen die 36 Stück 600—16,80=583,20 ℳ; also ein solches Stück 583,20:36=16,20 ℳ.

β) Ein *m* habe x preußische Fuß, so sind 7 *m* 7x preußische Fuß und da $(3\frac{3}{16}+7x)$ preußische Fuß$=25\frac{1}{2}$ preußische Fuß ausmachen, so ist $3\frac{3}{16}+7x=25\frac{1}{2}$; folglich $x=\frac{51}{16}$ preußische Fuß=1 *m*; also steht der preußische Fuß zu dem Meter in dem Verhältnisse 16:51.

27. Die Breite des letztern Gartens sei x *m*. Nun findet man den Inhalt einer rechtwinkeligen Fläche, wenn man die Länge mit der Breite multipliziert. Da seine Länge 247 *m* beträgt, so ist sein Quadratinhalt=247x *qm*. Die Länge des ersten Gartens ist 143 *m* und seine Breite 323 *m*, also sein Flächeninhalt=143×323 *qm*. Da nun die beiden Gärten an Inhalt gleich sind, so ist 247x=143×323; folglich x=187 *m* ist der zweite Garten breit.

28. In dem Zimmer seien x *cbm* Sauerstoffluft, so sind $\frac{79}{21}$x *cbm* Stickstoffluft darin. Da das Zimmer 3,77 *m* breit, 4,39 *m* lang und 2,35 *m* hoch ist und der Kubikinhalt eines Körpers gleich ist dem Produkte aus Länge, Breite und Höhe, so ist der Kubikinhalt des Zimmers=3,77×4,39×2,35=38,893205 *cbm*. Es ist daher: $x+\frac{79}{21}x=38,893205$; folglich x=8,167573 *cbm* Sauerstoffluft und $\frac{79}{21}\times8,167573=$ 30,725632 *cbm* Stickstoffluft.

29. Da Zinnober aus 7 Teilen Schwefel und 44 Teilen Quecksilber besteht, so sind in 51 Teilen Gemisch 7 Teile Schwefel und 44 Teile Quecksilber.

Bezeichnet man nun die zu bestimmende Anzahl Teile Quecksilber, die in $178\frac{1}{2}$ *g* Zinnober sein sollen, mit x, so erhält man die Proportion $51:178\frac{1}{2}=44:x$ oder $51.x=44.178\frac{1}{2}$; also x=154 *g* Quecksilber.

Arithmetische Auflösung, In 51 *g* Zinnober sind 44 *g* Quecksilber; also sind in $178\frac{1}{2}$ *g* Zinnober so oftmal 44 *g* Quecksilber enthalten als 51 in $178\frac{1}{2}$ enthalten sind; dies ist $3\frac{1}{2}$mal darin enthalten; folglich enthalten $178\frac{1}{2}$ *g* Zinnober $3\frac{1}{2}\times44=154$ *g* Quecksilber.

30. Die Anzahl der Kavalleristen sei x, so sind 3x Artilleristen und 12x Infanteristen vorhanden. Da nun die Garnison aus 3520 Mann besteht, so ist 16x=3520; folglich

$x = 220$ Kavalleristen, $3 \times 220 = 660$ Artilleristen, und $12 \times 220 = 2640$ Infanteristen.

Zweite Auflösung. Der Kavalleristen seien 100, dann sind der Artilleristen 300 und der Infanteristen 1200, im ganzen $100 + 300 + 1200 = 1600$ Mann. Da nun 3520 Mann vorhanden sind, so beträgt der Fehler 1920 Mann. Nun seien 200 Kavalleristen, dann sind 600 Artilleristen und 2400 Infanteristen vorhanden, also zusammen 3200 Mann, daher beträgt der zweite Fehler 320 Mann, folglich sind Kavalleristen $\frac{200 \,.\, 1920 - 100 \,.\, 320}{1920 - 320} = 220$ Mann.

31. Der Flächeninhalt der heißen Zone betrage x Quadratmeilen, so beträgt eine gemäßigte $\frac{15}{23}x$, also beide gemäßigte Zonen $\frac{30}{23}x$; ferner eine kalte $\frac{7}{44} \cdot \frac{15}{23}x = \frac{105}{1012}x$, also beide kalte Zonen $\frac{105}{506}x$ Quadratmeilen.

Da nun der Flächeninhalt der ganzen Erde 9261238 Quadratmeilen beträgt, so ist

$$x + \frac{30}{23}x + \frac{105}{506}x = 9261238,$$

folglich $x = 3687007\frac{531}{1271}$ Quadratmeilen die heiße Zone; und hieraus $2404570\frac{70}{1271}$ Quadratmeilen jede gemäßigte Zone und $382545\frac{300}{1271}$ Quadratmeilen jede kalte Zone.

32. Das große Faß enthalte $x\,l$, so enthält das erste kleine $\frac{3}{16}x = \frac{9}{48}x$, das zweite kleine $\frac{5}{24}x = \frac{10}{48}x\,l$. Hieraus folgt, daß das zweite kleine Faß $(\frac{10}{48}x - \frac{9}{48}x) = \frac{1}{48}x\,l$ mehr enthält, als das erste kleine. Wird das erste leere Faß nun aus dem vollen zweiten gefüllt, so bleiben in letzterem noch $10\,l$ übrig. Es ist demnach

$\frac{1}{48}x = 10$; folglich $x = 480\,l$ das große Faß;
$\frac{3}{16} \times 480 = 90\,l$ das erste kleine Faß;
$\frac{5}{24} \times 480 = 100\,l$ das zweite kleine Faß.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Das erste der beiden kleinen Fässer hält nur $\frac{3}{16} = \frac{9}{48}$, und das zweite nur $\frac{5}{24} = \frac{10}{48}$ des dritten großen; also hält dieses $\frac{10}{48} - \frac{9}{48} = \frac{1}{48}$ des großen mehr, als jenes. Und da dies $10\,l$ beträgt, so enthält das große Faß $48 \times 10 = 480$, das erste kleine $9 \times 10 = 90$ und das zweite kleine $10 \times 10 = 100\,l$.

33. α) Hatte ich in der rechten Tasche x ℳ, so hatte ich in der linken $(x-6)$ ℳ. Bringe ich aus der rechten soviel in die linke, als sich schon darin befindet, so enthält die linke jetzt $(x-6)+(x-6) = 2(x-6)$ ℳ und die rechte $x-(x-6) = 6$. Bringe ich jetzt aus der linken in die rechte soviel, als in dieser ist, so ist in der rechten $6+6 = 2.6$ und in der linken $2(x-6)-6 = 2(x-9)$. Bringe ich endlich aus der rechten in die linke soviel, als in der letzteren ist, so habe ich in der linken $2(x-9)+2(x-9) = 4(x-9)$ und in der rechten

$2.6-2(x-9)=2(15-x)$. Da ich auf diese Weise in beiden Taschen gleich viel habe, so ist $4(x-9)=2(15-x)$; woraus folgt, daß $x=11$ *M* in der rechten und $11-6=5$ *M* in der linken Tasche.

β) Die empfangende Tasche bekommt jedesmal soviel, als sie hat; ihr Geld verdoppelt sich also so oft, als aus der andern Tasche Geld in sie gelegt wird, und um soviel vermindert sich das Geld in der gebenden Tasche. Wenn nun nach fünfmaliger Operation zuletzt in jeder Tasche 64 *Nkr* waren, so mußte vor der fünften Operation in der linken Tasche die Hälfte von dem Gelde sein, was nach der fünften Operation darin war, also $64:2=32$ und daher war in der rechten $64+32=96$. Dies Geld war bei der vierten Operation in die rechte Tasche wieder durch Verdoppelung des bereits darin enthaltenen Geldes gekommen, also enthielt die rechte Tasche vordem $96:2=48$ und die linke $32+48=80$. Diese 80 *Nkr* waren wieder durch Verdoppelung entstanden, also enthielt die linke vor der Verdoppelung $80:2=40$ und die rechte $48+40=88$. Vor der vierten Operation enthielt die rechte $88:2=44$, und daher die linke $40+44=84$; und daher war anfangs in der linken Tasche $84:2=42$ und in der rechten $44+42=86$ *Nkr*.

Oder: Da während der verschiedenen Operationen kein neues Geld hinzukommt, so befinden sich $64+64=128$ *Nkr* in beiden Taschen. Sind nun in der rechten x *Nkr*, so sind in der linken $128-x$ *Nkr*. Nach fünfmaliger abwechselnd vorgenommener Operation befindet sich in der rechten Tasche $32x-2688$ und in der linken $2816-32x$. Da diese Ausdrücke einander gleich sind und ebenso jeder derselben 64 *Nkr* ausmacht, so läßt sich x auf drei verschiedene Weisen bestimmen.

34. α) Das Kapital sei x *M* groß, so bringen diese x *M* zu $4\frac{3}{4}$ pCt. in einem Jahre $\frac{x}{100}\times 4\frac{3}{4}=\frac{4\frac{3}{4}}{100}x=\frac{19x}{400}$ *M* Zinsen. Also beträgt das Kapital samt den Zinsen $\left(x+\frac{19x}{400}\right)$ *M* und da dies 1923,21 ausmacht, so ist

$$x+\frac{19x}{400}=1923{,}21;\ \text{folglich}\ x=1836\ M.$$

Zweite Auflösung. Das Kapital sei 500 *M*. Hiervon betragen die Zinsen zu $4\frac{3}{4}$ pCt. 23,75 *M*, also Kapital nebst Zinsen $=523{,}75$ *M*. Da dasselbe aber 1923,21 *M* ausmacht, so beträgt der erste Fehler $1923{,}21-523{,}75=1399{,}46$ *M*. Nun sei das Kapital 600 *M*, hierzu die Zinsen, so ergeben sich

628,50 *M*, also zweiter Fehler 1923,21−628,50=1294,71 *M*. Demnach beträgt das Kapital in Wirklichkeit

$$\frac{600 . 1399{,}46 - 500 . 1294{,}71}{1399{,}46 - 1294{,}71} = 1836 \text{ M.}$$

β) Der Forst habe vor 17 Jahren x *cbm* Holz geliefert. Diese x *cbm* nehmen jährlich um $1\frac{3}{4}$ Prozent zu; dies macht für 1 Jahr $\frac{x}{100} \times 1\frac{3}{4} = \frac{7}{400}x$ *cbm*; also für 17 Jahre $17 . \frac{7}{400} . x = \frac{119}{400}x$. Auf diese Weise beträgt der Forst 16608 *cbm*; daher ist

$$x + \frac{119}{400}x = 16608; \text{ folglich } x = 12800 \text{ cbm.}$$

35. Die Ware habe x *Frc* gekostet. Der Kaufmann verkauft dieselbe zu 1472,58 *Frc* mit 19 Prozent Schaden; d. h. an je 100 *Frc* des Einkaufspreises verliert er 19 *Frc*; also verliert er am Einkaufspreise 0,01x . 19=0,19x *Frc*; mithin verkaufte er die Ware zu x−0,19x *Frc*. Es ist daher x−0,19x=1472,58; folglich x=1818 *Frc* Einkaufspreis.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Statt je 100 *Frc* erhielt er nur 81 *Frc*; mithin verlor er so oft mal 19 *Frc*, als er 81 *Frc* wiedererhielt; d. i. 18,18×19=345,42 *Frc*; also hat ihm die Ware (1472,58+345,42) =1818 *Frc* gekostet.

36. Das *l* Wein habe x *M* gekostet. Verkauft man dasselbe zu 1,10 *M*, so sind $37\frac{1}{2}$ Prozent $=\frac{3}{8}$ des Einkaufspreises verdient; mithin kostet das *l* im Verkaufe $(x+\frac{3}{8}x)$ *M*. Es ist daher

$x+\frac{3}{8}x=1{,}10$; also x=0,80 *M* das *l*; demnach das *hl* 100×0,80=80 *M*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Bei $37\frac{1}{2}$ pCt. Nutzen gewann man $\frac{3}{8}$ des Einkaufspreises; man erhielt also beim Verkaufe der Ware $\frac{8}{8}+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$ des Einkaufspreises zurück; dies beträgt nun 110 *M*, also beträgt $\frac{1}{8}$ des Einkaufspreises 10 *M*; folglich war der Einkaufspreis=8×10=80 *M*.

37. Die Ware koste vor dem Abzuge von 8 pCt. Rabatt in Hundert x *M*. Da der Fabrikant nun statt 100 *M* nur (100−8)=92 *M* bezahlt, so bezahlt er statt x *M* nur 0,01x . 92=0,92x, und da dies 8050 *M* beträgt, so ist 0,92x=8050; folglich x=8750 *M*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da er statt 100 *M* nur 92 *M* bezahlt, so hat er, da er 8050=$87\frac{1}{2}$mal 92 bezahlt, auch $87\frac{1}{2}$×8=700 *M* Rabatt abgezogen; also lautet die Rechnung auf 8050+700=8750 *M*.

38. Koste die Ware x, so bezahlt er bei p pCt. Rabatt in Hun-

dert nicht für jede 100, die er schuldig ist, auch 100, sondern nur (100—p). Demnach beträgt der Einkaufspreis der Ware so oftmal (100—p), als er 100 zu zahlen hat. Er hat aber $\frac{x}{100}$ zu bezahlen; folglich bezahlte er die Ware mit $\frac{x}{100}\cdot(100-p)=\frac{x(100-p)}{100}$ und, da die bare Zahlung k beträgt, so ist $\frac{x(100-p)}{100}=k$. Hieraus folgt, daß

$$x=\frac{100}{100-p}k.$$

39. Ich habe x *M.* zu schicken, so muß, da das Postgeld $\frac{1}{8}$ pCt. betrug, $\frac{x}{100}\times\frac{1}{8}=\frac{x}{800}$ *M.* von den eingenommenen $5206\frac{1}{2}$ *M.* in Abrechnung gebracht werden. Ich übergab mithin der Post $\left(5206\frac{1}{2}-\frac{x}{800}\right)$ *M.*, und weil diese soviel betragen, als x *M.*, so ist $x=5206\frac{1}{2}-\frac{x}{800}$; hieraus folgt, daß x=5200 *M.*

Zweite (arithmetische) Auflösung. Halte ich das Postgeld, welches $\frac{1}{8}$ pCt. beträgt, ab, so schicke ich bloß $\frac{5206\frac{1}{2}}{100\frac{1}{8}}\times100=52\times100=5200$ *M.*

Dritte (arithmetische) Auflösung. Beträgt das von der Summe abzuhaltende Postgeld $\frac{1}{8}$ pCt., so halte ich für jede $100\frac{1}{8}$ *M.* $\frac{1}{8}$ *M.* an Postgeld ab. Nun ist $5206\frac{1}{2}$ *M.* $=52\times100\frac{1}{8}$ *M.*; also beträgt der Abzug $52.\frac{1}{8}=6\frac{1}{2}$ *M.* Somit schicke ich nur $5206\frac{1}{2}-6\frac{1}{2}=5200$ *M.*

40. Die Schuldsumme betrage x *Fl*, die Barzahlung beträgt 880 *Fl* nach Abzug von $8\frac{3}{4}$ pCt. auf Hundert, d. h. er bezahlt für je $100+8\frac{3}{4}$ *Fl* in Schuld nur 100 *Fl* bar, folglich betrug die Barzahlung $\frac{x}{108\frac{3}{4}}\cdot100=\frac{100x}{108\frac{3}{4}}$, daher ist $\frac{100x}{108\frac{3}{4}}=880$, also x=975 *Fl.*

Zweite Auflösung. Die Schuldsumme sei $500\,Fl=\alpha_1$, dann ist bei $8\frac{3}{4}$ pCt. Rabatt auf 100 die Barzahlung $\frac{500.100}{108\frac{3}{4}}=459\frac{67}{87}$ *Fl.* Nun ist dieselbe aber 880 *Fl*, folglich erster Fehler $\varphi'=420\frac{20}{87}$ *Fl.* Nun sei die Schuldsumme $600\,Fl=\alpha_2$, dann ist die Barzahlung $\frac{600.100}{108\frac{3}{4}}=$

$551\frac{63}{87}$ *Fl*, also zweiter Fehler $\varphi''=328\frac{24}{87}$ *Fl*. Bezeichnet nun x die wirkliche Barzahlung, so ist

$$x=\frac{600.420\frac{20}{87}-500.328\frac{24}{87}}{420\frac{20}{87}-328\frac{24}{87}}=957\ Fl.$$

41. Die bare Zahlung ist k mit p pCt. Rabatt auf Hundert. Lautete die Rechnung vor dem Abzuge des Rabatts auf x, so betrug die Barzahlung $\frac{x}{100+p}\times 100=\frac{100x}{100+p}$ und weil diese k ausmacht, so ist $\frac{100x}{100+p}=k$; woraus folgt, daß

$$x=\frac{(100+p)k}{100}=k+\frac{p}{100}k\ Fl.$$

42. Das Kapital sei x *M*, so betragen die einjährigen Zinsen zu p pCt. $\frac{x}{100}\times p=\frac{px}{100}$ *M*, also die njährigen Zinsen $n\cdot\frac{px}{100}=\frac{npx}{100}$ *M*, mithin betragen Kapital samt den njährigen Zinsen zusammen: $\left(x+\frac{npx}{100}\right)=\frac{x(100+np)}{100}$. Da auf diese Weise aus dem ursprünglichen Kapital k *M* werden sollen, so hat man:

$\frac{x(100+np)}{100}=k$, woraus sich ergiebt, daß $x=\frac{100}{100+np}k$ *M*.

43. Er habe das Kapital zu x pCt. verliehen, so betragen die einjährigen Zinsen von 5200 *M* $\frac{5200}{100}.x=52x$, also die $5\frac{1}{2}$jährigen $5\frac{1}{2}.52x=286x$ *M*. Da er nun $6415\frac{1}{2}$ *M* an Kapital und Zinsen zurückerhält, so betragen die $5\frac{1}{2}$jährigen Zinsen allein $(6415\frac{1}{2}-5200)=1215\frac{1}{2}$ *M*. Es ist also

$$286x=1215\tfrac{1}{2};\ \text{folglich}\ x=4\tfrac{1}{4}\ \text{pCt.}$$

Zweite Auflösung. Das Kapital sei zu 1 pCt.$=\alpha_1$ verliehen, dann betragen die Zinsen von 5200 *M* in $5\frac{1}{2}$ Jahren $52.5\frac{1}{2}=286$ *M*. Nun betragen sie aber $6415\frac{1}{2}-5200$ *M* $=1215\frac{1}{2}$ *M*, also erster Fehler $\varphi'=929\frac{1}{2}$ *M*. Nun sei dasselbe zu 2 pCt.$=\alpha_2$ verliehen, dann sind die $5\frac{1}{2}$jährigen Zinsen$=104.5\frac{1}{2}=572$ *M*, daher zweiter Fehler $\varphi''=643\frac{1}{2}$ *M*. Daher ist, wenn x die Prozente bezeichnet

$$x=\frac{2.929\frac{1}{2}-1.643\frac{1}{2}}{929\frac{1}{2}-643\frac{1}{2}}=4\tfrac{1}{4}\ \text{pCt.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Wenn in $5\frac{1}{2}$ Jahren das Kapital von 5200 *M* auf $6415\frac{1}{2}$ *M* angewachsen ist, so sind 100 *M* Kapital auf $\frac{6415\frac{1}{2}}{5200}\cdot 100=123\frac{3}{8}$ *M* angewachsen; es brachten also in der angegebenen Zeit 100 *M*

Kapital $123\frac{3}{8}-100=23\frac{3}{8}$ *M* Zinsen ein, folglich in 1 Jahre $23\frac{3}{8}:5\frac{1}{2}=4\frac{1}{4}$ *M*; das Kapital stand also zu $4\frac{1}{4}$ pCt.

44. Es seien in x Jahren keine Zinsen bezahlt worden, so ist man von 100 *Frc* in x Jahren $3\frac{1}{2}$x *Frc* an Zinsen schuldig, also von 6024 *Frc* Kapital 210,84x *Frc* an Zinsen. Da die rückständigen Zinsen $(7658{,}01-6024)=1634{,}01$ *Frc* betragen, so ist $210{,}84x=1634{,}01$; folglich $x=7\frac{3}{4}$ Jahre.

Zweite Auflösung. Da hier nach der Zeit n gefragt wird, so entwickele man aus der in der Auflösung zu Beispiel 42 gefundenen Gleichung $x+\frac{npx}{100}=k$ die Unbekannte n und betrachte p, k und x als bekannte Größen. Wir finden dann, daß $n=\frac{100(k-x)}{px}$. Setzt man nun $x=6024$, $k=7658{,}01$ und $p=3\frac{1}{2}$ in diese Formel, so ist

$$n=\frac{100(7658{,}01-6024)}{3\frac{1}{2}\times 6024}=7\tfrac{3}{4} \text{ Jahre.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Bei $3\frac{1}{2}$ pCt. betragen die Zinsen in 1 Jahr für 1 *Frc* $3\frac{1}{2}:100=0{,}035$. Da nun $7658{,}01-6024=1634{,}01$ *Frc* rückständige Zinsen sind, so betragen die Zinsen des Kapitals 1634,01, also die Zinsen von 1 *Frc* $1634{,}01:6024=0{,}27125$; folglich stand das Kapital $0{,}27125:0{,}035=7{,}75$ Jahre.

45. Er sei x *Fl* zu zahlen schuldig gewesen. Er diskontiert aber mit $9\frac{1}{2}$ pCt.; also beträgt der Diskonto: $\frac{x}{100}\times 9\frac{1}{2}=\frac{9\frac{1}{2}}{100}x$; folglich die Barzahlung $\left(x-\frac{9\frac{1}{2}}{100}x\right)$. Es ist daher: $x-\frac{9\frac{1}{2}}{100}x=1538\frac{1}{2}$, woraus folgt, daß $x=1700$ *Fl.*

Zweite Auflösung. Der Diskonto betrage x *Fl*, so lautete die Rechnung auf $1538\frac{1}{2}+x$ *Fl.* Diskontiert er mit $9\frac{1}{2}$ pCt., so beträgt der Diskonto das $\frac{9\frac{1}{2}}{100}=\frac{19}{200}$fache der zu zahlenden Rechnung, was $(1538\frac{1}{2}+x)\cdot\frac{19}{200}$ *Fl* ausmacht. Es ist also: $(1538\frac{1}{2}+x)\cdot\frac{19}{200}=x$; folglich $x=161\frac{1}{2}$ *Fl.* Demnach betrug die Rechnung vor der Diskontierung $1538\frac{1}{2}+161\frac{1}{2}=1700$ *Fl.*

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da der Diskonto $9\frac{1}{2}$ pCt. beträgt, so bezahlt er statt je 100 *Fl*, die er schuldig ist, nur $100-9\frac{1}{2}=90\frac{1}{2}$; also beträgt die Summe vor der Diskontierung:

$$\frac{1538\frac{1}{2}}{90\frac{1}{2}}\times 100=17\times 100=1700 \text{ } Fl.$$

46. Für 12 Monate beträgt der Diskonto 9 pCt., also für 54

Tage $=1\frac{4}{5}$ Monat $1\frac{4}{5}\times\frac{9}{12}=1\frac{7}{20}$ pCt. Von je 100 ℳ, die er schuldig war, bezahlte er also nur $100-1\frac{7}{20}=98\frac{13}{20}$ ℳ. Lautet nun der Wechsel vor der Diskontierung auf x ℳ, so bezahlte er nur so oft $98\frac{13}{20}$ ℳ, als der Wechsel 100 ℳ beträgt; dies giebt $\frac{x}{100}\times 98\frac{13}{20}=\frac{98\frac{13}{20}}{100}x=\frac{1973x}{2000}$. Es ist daher $\frac{1973x}{2000}=1777{,}10$; woraus folgt, daß $x=1800$ ℳ.

Zweite Auflösung. Der Diskonto betrage x ℳ, so lautete der Wechsel auf $(1775{,}7+x)$ ℳ. Hiervon beträgt der Diskonto für 54 Tage zu 9 pCt. jährlich

$$\frac{1775{,}7+x}{100}\times 1{,}35=\frac{(1775{,}7+x)1{,}35}{100}\ ℳ;$$

es ist daher $\frac{(1775{,}7+x)1{,}35}{100}=x$; woraus folgt, daß $x=24{,}3$ ℳ Diskonto; der Wechsel betrug also $1775{,}7+24{,}3=1800$ ℳ.

Dritte (arithmetische) Auflösung. 9 pCt. jährlich macht für 54 Tage 1,35 pCt. Statt je 100 ℳ bezahlte er also nur $100-1{,}35=98{,}65$; folglich lautete der Wechsel vor der Diskontierung auf $\frac{1775{,}7}{98{,}65}\times 100=1800$ ℳ.

47. Die Schuld belaufe sich auf x ℳ. Bezahlt man diese erst nach n Jahren fällige Schuld jetzt mit p pCt. Diskonto, so beläuft sich der Diskonto für 1 Jahr von x ℳ auf $\frac{x}{100}\times p=\frac{p}{100}x$; also für n Jahre auf $\frac{np}{100}x$; mithin beträgt die Barzahlung $\left(x-\frac{np}{100}x\right)=\frac{100-np}{100}x$, und weil dies s ℳ beträgt, so ist: $\frac{100-np}{100}x=s$; woraus sich ergiebt, daß $x=\frac{100}{100-np}s$ ℳ.

48. In x Jahren seien die Zinsen zusammen das $1\frac{5}{8}$fache des Kapitals. Bei $6\frac{1}{2}$ pCt. betragen die Zinsen in 1 Jahre das $\frac{6\frac{1}{2}}{100}=\frac{13}{200}$fache des Kapitals, also in x Jahren das $\frac{13}{200}x$fache. Da die Zinsen alsdann das $1\frac{5}{8}$fache des Kapitals ausmachen, so ist $\frac{13}{200}x=1\frac{5}{8}$, woraus folgt, daß $x=25$ Jahre.

Zweite (arithmetische) Auflösung.

Die Zinsen betragen das $\frac{13}{200}$fache des Kapitals in 1 Jahre;
" " " " 13 " " " " 200 "
" " " " $\frac{13}{8}$ " " " " $\frac{200}{8}$ " d. i.
" " " " $1\frac{5}{8}$ " " " " 25 "

49. Das Kapital sei zu x pCt. ausgeliehen, dann betragen

die Zinsen in 1 Jahr das $\frac{x}{100}$fache des Kapitals, also in 19 Jahren das $\frac{19}{100}$xfache desselben. Da dieselben alsdann das $1\frac{3}{16}$fache des Kapitals ausmachen sollen, so muß sein $\frac{19}{100}x=1\frac{3}{16}$, woraus sich ergiebt, daß $x=6\frac{1}{4}$ pCt.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Betragen die 19jährigen Zinsen eines Kapitals das $1\frac{3}{16}=\frac{19}{16}$fache desselben, so betragen die einjährigen Zinsen das $\frac{1}{16}$fache des Kapitals; folglich stand dasselbe zu $100:16=6\frac{1}{4}$ pCt.

50. Der Kaufmann bezahle x ℳ Prämie. Hätte er den Wert der Ware nicht höher angegeben, so hätte er, zu 6 pCt., von 14100 ℳ nur $141\times6=846$ ℳ Prämie zahlen müssen. In diesem Falle hätte er dann $\frac{6x}{100}$ ℳ an Prämie weniger bezahlt. Hiernach ist $x-\frac{6x}{100}=846$; folglich $x=900$ ℳ.

Zweite Auflösung. Will er die im voraus bezahlte Prämie samt dem Preise seiner Ware wieder erhalten, so muß er auch demgemäß mehr bezahlen. Die Prämie, also auch die höhere Angabe seiner Ware betrage x ℳ, so bezahlt er nicht nur von 14100 ℳ die Zinsen, sondern auch noch von x ℳ, also im ganzen von $(14100+x)$ ℳ. Diese thun zu 6 pCt. $\frac{(14100+x)6}{100}$ ℳ an Prämie. Es ist daher: $\frac{(14100+x)6}{100}=x$ und hieraus folgt ebenfalls, daß $x=900$ ℳ.

Dritte Auflösung. Angenommen, er habe die Ware, um sich schadlos zu halten, zu dem höheren Preise von x ℳ angegeben, so betrug hiervon die Prämie, zu 6 pCt. gerechnet, $\frac{x}{100}\cdot6=\frac{6}{100}x$ ℳ. Weil er nun den Preis der Ware um so viel höher angab, als die Prämie ausmachte, so betrug derselbe nur $(x-\frac{6}{100}x)$ ℳ. Es ist daher auch $x-\frac{6}{100}x=14100$ und hieraus folgt, daß $x=15000$ ℳ der höhere Preis der Ware; also betrug die Prämie $\frac{6}{100}x=\frac{6.1500}{100}=900$ ℳ.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Er bezahlt nicht allein die Prämie von 14100 ℳ, die zu 6 pCt. 846 ℳ ausmacht, sondern er bezahlt auch noch von diesen 846 ℳ die Zinsen, welche $\frac{846}{94}\times6=54$ ℳ betragen, also bezahlte er im ganzen $846+54=900$ ℳ als Prämie.

51. Der Landwirt habe x Gänse umgetauscht. Da er im ganzen 432 Stück Gänse und Schafe hat, so hat er also $(432-x)$

Schafe. Für je 32 Gänse erhält er 3 Schafe, folglich für x Gänse $\frac{3x}{32}$ Schafe. Demnach hat er jetzt $\left(432-x+\frac{3x}{32}\right)$ Schafe und weil er sich durch diesen Tausch im Besitze von 200 Schafen sieht, so hat man: $432-x+\frac{3x}{32}=200$; hieraus folgt, daß $x=256$ Gänse.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Herde ist durch den Tausch um $432-200=232$ Stück kleiner geworden. Gegen 32 Gänse tauscht er 3 Schafe ein, verliert also dadurch 29 Stück. Da er 232 Stück verloren hat, so muß er $\frac{232}{29}=8$mal auf diese Weise getauscht haben; er hatte also $8.32=256$ Gänse.

52. Der älteste Bruder habe x Zwanzigmarkstücke$=20x$ ℳ, so hatte der zweite x ℳ und der dritte x ₰$=\frac{x}{100}$ ℳ. Sie haben zusammen 2332,11 ℳ, also ist: $20x+x+\frac{x}{100}=2332{,}11$; also $x=111$ Zwanzigmarkstücke$=2220$ ℳ hat der älteste, der zweite 111 ℳ und der dritte 111 ₰$=1{,}11$ ℳ.

53. Ich habe x Zweipfennigstücke$=2x$ ₰; dann $1\frac{1}{3}x$ Zehnpfennigstücke$=10.1\frac{1}{3}x=13\frac{1}{3}x$ ₰; $2\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}x=3\frac{1}{3}x$ ℳ$=333\frac{1}{3}x$ ₰; $1\frac{1}{2}.3\frac{1}{3}x=5x$ Zwanzigmarkstücke$=10000x$ ₰. Daher ist: $2x+13\frac{1}{3}x+333\frac{1}{3}x+10000x=310{,}46\times100$; also $x=3$. Daher habe ich 3 Zweipfennigstücke, $1\frac{1}{3}\times3=4$ Zehnpfennigstücke, $3\frac{1}{3}.3=10$ Einmarkstücke und $5.3=15$ Zwanzigmarkstücke.

54. Das Alter der drei Brüder A, B, C verhält sich wie $36:24:16=9:6:4$. C erhalte nun von dem Gelde x ℳ, so erhält B, der $1\frac{1}{2}$mal so alt ist wie C, auch $1\frac{1}{2}.x$ ℳ und A, der $2\frac{1}{4}$mal so alt ist, als C, auch $2\frac{1}{4}.x$ ℳ. Sie erhalten also zusammen $(x+1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{4}x)$, und da dies 9728 ℳ ausmacht, so ist $x+1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{4}x=9728$; folglich $x=2048$ ℳ für C; $1\frac{1}{2}.2048=3072$ ℳ für B und $2\frac{1}{4}.2048=4608$ ℳ für A.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Summe 9728 ℳ soll nach Verhältnis ihres Alters geteilt werden. Dieses Verhältnis ist nun: $A:B:C=9:6:4$. Ihre Anteile müssen sich also auch wie $9:6:4$ verhalten. A soll daher so oft 9 ℳ, als B 6 ℳ und C 4 ℳ erhalten. Wenn nun $(9+4+6)=19$ ℳ zu teilen wären, so würde A 1.9 ℳ, B 1.6 ℳ und C 1.4 ℳ bekommen. Es sind aber $9728=512$mal 19 ℳ zu teilen; folglich erhält A $512.9=4608$ ℳ, B $512\times6=3072$ ℳ und C $512.4=2048$ ℳ.

55. Die Fläche des Buchenwaldes betrage x *ha*, so ist die des Kiefernwaldes $(\frac{7}{15}x+104)$ *ha* und die des Eichenwaldes $(\frac{7}{9}x+90)$ *ha*. Da die ganze Waldfläche 1911 *ha* groß ist, so hat man: $x+\frac{7}{15}x+104+\frac{7}{9}x+90=1911$, woraus folgt, daß $x=765$ *ha* der Buchenwald und daher 461 *ha* der Kiefernwald und 685 *ha* der Eichenwald.

56. Das Kapital sei x *M*. Im ersten Jahre bringen 100 *M* Kapital $3\frac{1}{4}$ *M* Zinsen, in jedem der 7 folgenden Jahre aber $\frac{1}{4}$ *M* mehr. Die sämtlichen Zinsen von 100 *M* Kapital in 8 Jahren betragen hiernach 33 *M*, mithin von x *M* Kapital $\frac{x}{100}\cdot 33=\frac{33}{100}x$ *M* Zinsen. Da nun die 8jährigen Zinsen 1914 *M* ausmachen, so ist

$\frac{33}{100}x=1914$; folglich $x=5800$ *M*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Das Kapital, das in 8 Jahren zu verschiedenen Prozenten aussteht, bringt in dieser Zeit die nämlichen Zinsen, als wenn es 1 Jahr lang zu $3\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}+4+4\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}+5=33$ pCt. aussteht. Für je 33 *M* Zinsen, die ich beziehe, habe ich also 100 *M* Kapital. Ich beziehe nun $1914=58\times 33$ *M* Zinsen, also habe ich auch $58\times 100=5800$ *M* Kapital.

57. Das Kapital betrage x *M*, so gewinnt er mit $\frac{2}{5}x$ *M* seines Kapitals $\frac{2}{5.100}x\times 13=\frac{13}{250}x$ *M* und mit $\frac{1}{3}x$ seines Kapitals $\frac{1}{3.100}x\times 9=\frac{3}{100}x$ *M*. Mit dem Reste seines Geldes $=\frac{4}{15}x$ *M* verliert er dagegen $\frac{4}{15.100}x\times 3=\frac{1}{125}x$ *M*. Da er auf diese Weise einen jährlichen Gewinn von 2664 *M* hat, so erhält man:

$\frac{13}{250}x+\frac{3}{100}x-\frac{1}{125}x=2664$; folglich $x=36000$ *M*.

Zweite Auflösung. Verwendet er $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ seines Geldes auf Eisenbahnaktien, $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ desselben auf Ländereien und den Rest$=\frac{4}{15}$ auf Bergwerksaktien, so kann man sich denken, er habe sein Geld in 15 gleiche Teile geteilt und mit 6 solcher Teile Geschäfte in Eisenbahnaktien, mit 5 in Ländereien und mit 4 in Bergwerksaktien gemacht. Es verhalten sich also die einzeln angelegten Teile seines Kapitals wie 6:5:4. Angenommen er habe x *M* auf Eisenbahnaktien verwendet, so hat er $\frac{5}{6}x$ *M* auf Ländereien und $\frac{4}{6}x=\frac{2}{3}x$ *M* auf Bergwerksaktien verwendet. Sein Geld betrug also $(x+\frac{5}{6}x+\frac{2}{3}x)$. Mit x *M* gewinnt er $\frac{x}{100}\times 13$ $=\frac{13}{100}x$; mit $\frac{5}{6}x$ gewinnt er $\frac{5}{6.100}x\times 9=\frac{45}{600}x$ *M*; mit

$\frac{2}{3}x$ ℳ dagegen verliert er $\frac{2}{3.100}x \times 3 = \frac{6}{300}$ ℳ. Er gewinnt im ganzen nur

$$\frac{13}{100}x + \frac{45}{600}x - \frac{6}{300}x \text{ ℳ. Daher ist}$$

$$\frac{13}{100}x + \frac{45}{600}x - \frac{6}{300}x = 2664; \text{ hieraus folgt, daß}$$

$$x = 14400 \text{ ℳ} = \tfrac{2}{5} \text{ seines Geldes;}$$

$$\tfrac{5}{6}x = 12000 \;\text{"} = \tfrac{1}{3} \;\text{"}\;\text{"}$$

$$\tfrac{2}{3}x = 9600 \;\text{"} = \tfrac{4}{15} \;\text{"}\;\text{"}$$

Demnach beträgt sein Kapital 14400+12000+9600=36000 ℳ.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Wenn er mit $\frac{2}{5}$ seines Kapitals 13 pCt. und mit $\frac{1}{3}$ desselben 9 pCt. gewinnt, dagegen mit $\frac{4}{15}$ desselben 3 pCt. verliert, so gewinnt er von $\frac{2}{5}$ des Kapitals so oft $13 \times \frac{2}{5} = 5\frac{1}{5}$ ℳ und von $\frac{1}{3}$ des Kapitals so oft $9 \times \frac{1}{3} = 3$ ℳ, als er von $\frac{4}{15}$ desselben $3 \times \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$ ℳ verliert. So oft nun $5\frac{1}{5} + 3 - \frac{4}{5} = 7\frac{2}{5}$ ℳ Zinsen da sind, so oft gewinnt er von $\frac{2}{5}$ seines Kapitals $5\frac{1}{5}$ ℳ, von $\frac{1}{3}$ desselben 3 ℳ und verliert von $\frac{4}{15}$ des Kapitals $\frac{4}{5}$ ℳ. Nun sind $7\frac{2}{5}$ so oft mal da, als $7\frac{2}{5}$ in 2664 ℳ=360 mal enthalten sind; folglich gewinnt er mit $\frac{2}{5}$ des Kapitals $360 \times 5\frac{1}{5} = 1872$ ℳ und mit $\frac{1}{3}$ des Kapitals $360 \times 3 = 1080$ ℳ; dagegen verliert er mit $\frac{4}{15}$ desselben $360 \times \frac{4}{5} = 288$ ℳ. Da nun $\frac{2}{5}$ des Kapitals zu 13 pCt. 1872 ℳ einbrachte, so betrug dasselbe $\frac{1872}{13} \times 100 = 14400$ ℳ. Das Drittel des Kapitals zu 9 pCt. brachte 1080 ℳ ein, also betrug es $\frac{1080}{9} \times 100 = 12000$ ℳ. Mit $\frac{4}{15}$ des Kapitals verlor er 3 pCt., was 288 ℳ beträgt, also ist dies $\frac{288}{3} \times 100 = 9600$ ℳ groß. Das ganze Kapital also

$$= 14400 + 12000 + 9600 = 36000 \text{ ℳ.}$$

58. Das Kapital habe x Jahre auf Zinsen gestanden. 4800 ℳ bringen in einem Jahre zu $3\frac{1}{2}$ pCt. 168 ℳ Zinsen, also in $\frac{1}{3}x$ Jahren $168 . \frac{1}{3}x = 56x$ ℳ. Die 4800 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ pCt. bringen in einem Jahre 180 ℳ Zinsen, also in $\frac{1}{4}x$ Jahren $180 . \frac{1}{4}x = 45x$, und 4800 ℳ bringen in $\frac{5}{12}x$ Jahren zu 4 pCt. $192 . \frac{5}{12}x = 80x$ ℳ Zinsen. Mithin betragen die sämtlichen Zinsen zusammen (56x+45x+80x). Die Zinsen, die das Kapital in der unbekannten Zeit eingebracht hat, betragen

$$6972 - 4800 = 2172 \text{ ℳ.}$$

Es ist daher 56x+45x+80x=2172; folglich x=12 Jahre.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Stand das Kapital $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ der Zeit zu $3\frac{1}{2}$ pCt., $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ der Zeit zu $3\frac{3}{4}$ pCt. und daher $\frac{5}{12}$ der Zeit zu 4 pCt., so verhalten sich die verschiedenen Zeiten wie 4:3:5. In je 4+3+5=12 Jahren, die das Kapital aussteht, stand es 4 Jahre zu $3\frac{1}{2}$ pCt., in welcher Zeit 100 ℳ Kapital $4 \times 3\frac{1}{2} = 14$ ℳ Zinsen ein-

brachten; stand es 3 Jahre zu $3\frac{3}{4}$ pCt., und brachten also 100 ℳ $3 \times 3\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$ ℳ Zinsen ein und stand es 5 Jahre zu 4 pCt. und brachten demnach in dieser Zeit 100 ℳ $5 \times 4 = 20$ ℳ an Zinsen ein. In je 12 Jahren brachten sonach 100 ℳ Kapital $14 + 11\frac{1}{4} + 20 = 45\frac{1}{4}$ ℳ Zinsen ein; folglich brachten 4800 ℳ Kapital in je 12 Jahren $48 \times 45\frac{1}{4} = 2172$ ℳ Zinsen ein. So oft das Kapital nun 2172 ℳ an Zinsen eingebracht hat, so oftmal 12 Jahre hat es gestanden. Da nun das Kapital von 4800 ℳ auf 6972 ℳ angewachsen ist, so hat es $6972 - 4800 = 2172$ ℳ, also nur einmal eingebracht; folglich stand es auch nur 12 Jahre.

59. Nimmt die eine Haushaltung 113 *kg*, so nimmt die andere $200 - 113 = 87$ *kg*. Nach x Wochen sei der Vorrat in beiden Haushaltungen gleich, so hat die eine in dieser Zeit $3\frac{1}{2}x$ *kg* und die andere $2\frac{1}{5}x$ *kg* verbraucht; und es bleiben der einen noch $113 - 3\frac{1}{2}x$ und der andern $87 - 2\frac{1}{5}x$ *kg* übrig. Da diese Reste einander gleich sein sollen, so ist $113 - 3\frac{1}{2}x = 87 - 2\frac{1}{5}x$; folglich $x = 20$ Wochen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn die eine Hauhaltung in 1 Woche $3\frac{1}{2}$ *kg* verbraucht, so verbraucht die andere in derselben Zeit nur $2\frac{1}{5}$ *kg*; jene also in 1 Woche $3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5} = 1\frac{3}{10}$ *kg* mehr als diese. Die erste hat nun $113 - 87 = 26$ *kg* mehr zu verbrauchen, die sie demnach in $26 : 1\frac{3}{10} = 20$ Wochen verbraucht haben wird.

60. Das Haus habe x *Fl* gekostet. Da das Haus ebenso viele Hunderte gekostet, als Personen in der Gesellschaft waren, so bestand die Gesellschaft aus $\frac{x}{300}$ Personen. Giebt nun jede Person 15 *Fl*, so erhält der Abgebrannte $\frac{15x}{300} = \frac{x}{20}$ *Fl*. Wären nun so viele Gesellschaften in der Stadt, als Personen in der Gesellschaft sind, so wären $\frac{x}{300}$ Gesellschaften da, welche dann $\frac{x}{300} \cdot \frac{x}{300} = \frac{x^2}{300^2}$ Personen enthielten. Würde der Abgebrannte nun von jeder Person ebenfalls 15 *Fl* erhalten, so könnte er mit $\frac{15x^2}{300^2}$ *Fl* sein Haus aufbauen. Daher ist $\frac{15x^2}{300^2} = x$ oder $\frac{15x}{300^2} = 1$; woraus $x = 6000$ *Fl* folgt.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn das Haus dreimal so viel Hunderte kostet, als Personen in der Gesellschaft sind, so besteht die Gesellschaft aus so oftmal 1

Person, als das Haus 300 *Fl* kostet. Giebt nun jede Person 15 *Fl*, so müssen zu 300 *Fl* 20 Personen beitragen. Wären nun 20 Gesellschaften à 20 Personen vorhanden, so wären 400 Personen da, und giebt jede 15 *Fl*, so geben die 400 Personen $400 \times 15 = 6000$ *Fl*, welche das Haus kostet.

61. Es seien x Stunden des Tages verflossen, so waren noch $12 - x$ Std. übrig, welche das Doppelte von $\frac{2}{3}x$ Std. betragen. Es ist demnach $2 . \frac{2}{3}x = 12 - x$; folglich $x = 5\frac{1}{7}$ Std.

62. Hatte Eros x Aepfel, so ist $\frac{1}{5}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 30 + 120 + 300 + 50 = x$; woraus folgt, daß $x = 3360$ Aepfel.

63. Der Müßiggänger sei nach seinem 18. Jahre noch x Jahre alt geworden, so hat er $\frac{3}{8}x$ Jahre verschlafen, $\frac{1}{16}x$ Jahre mit Essen und Trinken zugebracht, $\frac{1}{4}x$ Jahre mit Spazierengehen vertrieben, $\frac{3}{16}x$ Jahre im Spiele verdorben, $\frac{1}{16}x$ Jahre im Lehnstuhle vergähnt. Da er sich nur 2 Jahre der Arbeit gewidmet, so ist $\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x + \frac{1}{16}x + 2 = x$; hieraus folgt, daß $x = 32$ Jahre beträgt. Er ist also $32 + 18 = 50$ Jahre alt geworden.

64. Pythagoras habe x Jünger gehabt, so widmete $\frac{1}{2}x$ sich der Mathematik, $\frac{1}{4}x$ den Naturforschungen und $\frac{1}{7}x$ der Jünger waren bloße Zuhörer. Da nun auch noch 3 Jungfrauen dazu gehörten, so ist $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$; folglich $x = 28$ Jünger.

65. Diophant habe ein Alter von x Jahren erreicht, so ist er $\frac{1}{6}x$ Jahre Knabe, $\frac{1}{12}x$ Jüngling gewesen; $\frac{1}{7}x$ Jahre später fand er die Gattin; 5 Jahre nachher erhielt er ein Kind und lebte mit diesem $\frac{1}{2}x$ Jahre. Nach dessen Tode lebte er noch 4 Jahre. Es ist daher $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{2}x + 9 = x$; folglich $x = 84$ Jahre.

66. Der Hirte habe x Stück Hornvieh; das Drittel hiervon beträgt $\frac{1}{3}x$, wovon zwei Drittel $\frac{2}{3} . \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}x$ ausmachen, und weil dies von der ganzen Anzahl des Bestandes 70 Stück beträgt, so ist $\frac{2}{9}x = 70$, also $x = 315$ Stück.

67. Die Bäuerin habe x Eier. Verkauft sie hiervon $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, so behielt sie noch $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Hiervon verkauft sie wieder die Hälfte und $\frac{1}{2}$, also behielt sie noch $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$; beim dritten Verkaufe hatte sie noch
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$; beim vierten Verkaufe hatte sie noch $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}$ und weil sie beim fünften Verkaufe noch 1 Ei übrig hatte, so ist:
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}] - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 1$, also $x = 63$.

Siehe die Auflösung Seite 16, Beisp. 65 und 66.

Arithmetische Auflösung zu 2. Sie verkauft 5mal das Drittel ihrer Eier und $\frac{1}{3}$ Ei und auf diese Weise blieb ihr zuletzt 1 Ei übrig; folglich ist 1 Ei $+ \frac{1}{3}$ Ei das Drittel des vierten Restes, der also $3 \times 1\frac{1}{3} = 4$ Eier war. Diese

4 Eier und $\frac{1}{3}$ Ei $=4\frac{1}{3}$ sind dem Drittel des dritten Restes gleich, der sonach $3\times4\frac{1}{3}=13$ Eier ausmacht. Diese $13+\frac{1}{3}=13\frac{1}{3}$ Eier betragen das Drittel des zweiten Restes, der also $3\times13\frac{1}{3}=40$ Eier ist. Die $40+\frac{1}{3}=40\frac{1}{3}$ Eier sind $=$ dem Drittel des ersten Restes, der demnach $3\times40\frac{1}{3}=121$ Eier ausmacht. Hiernach sind endlich $121+\frac{1}{3}=121\frac{1}{3}$ Eier $=$ dem Drittel aller Eier, die sie hatte; folglich betrug die Anzahl derselben $3\times121\frac{1}{3}=364$.

β) Der Knabe habe x Nüsse. Nimmt er hiervon $\frac{1}{2}x+10$ weg, so bleiben noch $\frac{1}{2}x-10$ Nüsse in der Schachtel. Nimmt er hiervon die Hälfte nebst 4 Stück weg, so erübrigen noch $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x-10]-4$. Zu diesem Reste werden 10 hinzugelegt und die Anzahl der Nüsse verdoppelt; demnach sind jetzt in der Schachtel $2[(\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x-10]-4)+10]$. Nachdem nun 4 Stück hinzugelegt und die Anzahl abermals verdoppelt worden, befinden sich 108 Nüsse in der Schachtel. Es ist daher:

$$2\{2[(\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}x-10]-4)+10]+4\}=108.$$
$$2[(\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}x-10]-4)+10]=\tfrac{1}{2}(108-2.4)=50$$
$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}x-10]-4=\tfrac{1}{2}(50-2.10)=15$$
$$\tfrac{1}{2}x-10=2.(15+4)=38$$
$$x=2.(38+10)=96.$$

68. α) Der Spieler habe vor dem Spiele x *M* gehabt, so verlor er $\frac{1}{6}x+247$ *M*; er hatte also beim Aufhören des Spieles noch $x-(\frac{1}{6}x+247)$ *M*. Sah er sich nun im Besitze von so viel Pfennigen, als er anfangs Mark hatte, so besaß er jetzt x ₰ $=0{,}01x$ *M*. Daher ist:

$$x-(\tfrac{1}{6}x+247)=0{,}01x;\ \text{also}\ x=300\ \mathcal{M}.$$

Arithmetische Auflösung zu β). Da der Spieler nach dem Spiele noch so viele Neukreuzer behielt, als er vor demselben Gulden gehabt hatte, so betrug $\frac{1}{100}$ seiner jetzigen Barschaft so viel, als $\frac{9}{10}$ derselben weniger 89 *Fl*; folglich mußte $\frac{9}{10}-\frac{1}{100}=\frac{89}{100}$ seines Geldes $=89$ *Fl* sein; also war die ganze Summe 100 *Fl.*

69. Die ganze Summe, zu welcher das Haus veranschlagt wurde, betrage x *M*, so ist:

$$\tfrac{1}{128}x+\tfrac{1}{8}x+\tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{8}x+(\tfrac{1}{128}x+39)+\tfrac{1}{30}x+(\tfrac{1}{6}x-96)+\tfrac{3}{8}(\tfrac{1}{6}x-96)$$
$$+150+\tfrac{1}{30}x+\tfrac{1}{3}x+(\tfrac{1}{8}x+108)+150=x;\ \text{also}\ x=14400\ \mathcal{M}.$$

70. Das Anlage-Kapital sei x *Frc.* Dieses wirft jährlich einen Gewinn von 50 pCt., also $\frac{1}{2}x$ ab. Nach Verlauf des ersten Jahres ist das Kapital mit den Zinsen $x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$. Hiervon 2685 *Frc* weggenommen, giebt als Kapital am Anfange des zweiten Jahres $\frac{3}{2}x-2685=\frac{1}{2}(3x-5370)$. Die Zinsen mit dem Kapital und dem Abzuge am Ende des 2., 3., 4. und 5. Jahres betragen bezüglich:

$\frac{1}{2}(3x-5370)+\frac{1}{4}(3x-5370)-2685=\frac{1}{4}(9x-26850)$ *Frc*;

$\frac{1}{4}(9x-26850)+\frac{1}{8}(9x-26850)-2685=\frac{1}{8}(27x-102030)$ *Frc*;

$\frac{1}{8}(27x-102030)+\frac{1}{16}(27x-102030)-2685=$
$\frac{1}{16}(81x-349050)$ *Frc*;
$\frac{1}{16}(81x-349050)+\frac{1}{32}(81x-349050)-2685=$
$\frac{1}{32}(243x-1133070)$ *Frc*.

Nach der Angabe soll dies das Doppelte des Anlage-Kapitals sein; daher ist:

$\frac{1}{32}(243x-1133070)=2x$; also $x=6360$ *Frc*.

Zweite Auflösung. Heißt das Kapital x, so ist es am Ende des ersten Jahres $1\frac{1}{2}x$ und weil hiervon 2685 *Frc* weggenommen werden, so beträgt dasselbe im 2. Jahre $1\frac{1}{2}x-2685$ *Frc*. Da diese Operation sich fünf Jahre wiederholt und sich das Kapital in dieser Zeit verdoppelt, so ist:

$1\frac{1}{2}\{1\frac{1}{2}[1\frac{1}{2}(1\frac{1}{2}[1\frac{1}{2}x-2685]-2685)-2685]-$
$2685\}-2685=2x$

$(1\frac{1}{2})^5x-2685.(1\frac{1}{2})^4-2685.(1\frac{1}{2})^3-2685.(1\frac{1}{2})^2-$
$2685.1\frac{1}{2}-2685=2x$

$\frac{1}{32}(243-64)x=2685\{(1\frac{1}{2})^4+(1\frac{1}{2})^3+(1\frac{1}{2})^2+1\frac{1}{2}+1\}$

$\frac{179}{32}x=2685(\frac{81}{16}+\frac{27}{8}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+1)$

$\frac{179}{32}x=2685.\frac{211}{16}$: daher $x=2.15.211=6330$ *Frc*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Bei 50 pCt. vermehrt sich das Kapital jedes Jahr um die Hälfte durch die Zinsen; demnach betrüge Kapital und Zinsen am Ende des 1. Jahres das $1\frac{1}{2}$fache; am Ende des 2. Jahres das $2\frac{1}{4}$fache; am Ende des 3. Jahres das $3\frac{3}{8}$fache; am Ende des 4. Jahres das $5\frac{1}{16}$fache und am Ende des 5. Jahres das $7\frac{19}{32}$fache des ursprünglichen Kapitals, wenn nicht jedes Jahr eine Wegnahme von 2685 *Frc* stattgefunden hätte. Nun findet

am Ende des 1. Jahres eine Wegnahme statt von	2685,00	*Frc*
Dadurch entsteht im 2. Jahre ein Zinsenverlust von	1342,50	
Am Ende des 2. Jahres Wegnahme von . . .	2685,00	
Im 3. J. Zinsenverlust von 6712,50 *Frc* macht	3356,25	
Am Ende des 3. J. Wegnahme von	2685,00	
Im 4. Jahre Zinsenverlust von 12753,75 *Frc* .	6376,875	
Am Ende des 4. Jahres Wegnahme	2685,000	
Im 5. Jahre Zinsenverlust von 21815,625 *Frc*	10907,8125	
Am Ende des 5. Jahres Wegnahme von . . .	2685,0000	

Das Kapital hat sich also vermindert um 35408,4375 *Frc*

Nun hätte am Ende des 5. Jahres Kapital und Zinsen das $7\frac{19}{32}$fache statt des zweifachen betragen müssen, folglich ist das $5\frac{19}{32}$fache desselben eingebüßt worden, und da dies 35408,4375 *Frc* beträgt, so war das ursprüngliche Kapital $35408,4375:5\frac{19}{32}=197,8125\times32=6330$ *Frc*.

71. Die Zahl, welche man erhält, wenn man von der zu suchenden Zahl die 1 linker Hand wegnimmt, sei x, so ist die

Zahl selbst, da sie sechsziffrig ist, 100000+x. Bringt man diese Ziffer 1 an die erste Stelle rechter Hand, so entsteht eine Zahl, die das dreifache der ersten beträgt; diese Zahl hat dann die Form 10x+1. Es ist daher

$$10x+1=3(100000+x);\ \text{folglich}\ x=42857.$$

Die Zahl heißt also (100000+42857)=142857.

Zweite Auflösung. Heißt die gesuchte Zahl x, so ist die durch Versetzung der letzten Ziffer 1 (4) entstandene Zahl 10(x—100000)+1 oder 10(x—400000)+4; und da in jenem Falle eine 3mal so große, im andern Falle aber eine $\frac{3}{3}$fache Zahl entsteht, so ist:

$10(x-100000+1=3x$; also $x=999999:7=142857$;

und $10(x-400000)+4=\frac{3}{3}x$;

daher $x=11999988:28=428571$.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Durch die Versetzung der letzten Ziffer 1 linker Hand an die letzte Stelle rechter Hand entsteht eine Zahl, die das Dreifache der gesuchten Zahl ausmachen soll. Daraus folgt, daß, wenn ich die gesuchte Zahl mit 3 multiplizjere, die nämliche Zahl entsteht, wie wenn ich die fragliche Versetzung vornehme. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, bezeichnen wir die gesuchte Zahl mit z′ und die durch Multiplikation mit 3 entstandene mit z″. Die Zahl z″ muß die Ziffer 1 als Einer haben, also müssen der Einer in der Zahl z′ 7 sein, da 3×7 Einer=2 Zehner+1 Einer. Was in z′ Einer sind, muß in z″ Zehner sein; folglich müssen in z′ die Zehner 5 betragen, da 3×5 Zehner+2 Zehner=1 Hundert+7 Zehner. Die Zehner in z′ müssen in z″ Hunderte sein, also 5; folglich betragen die Hunderte in z′ 8, da 3×8 Hunderte+1 Hunderter=2 Tausender+5 Hunderter. Der Tausender sind demnach in z″ 8; also müssen der Tausender in z′ 2 sein, da 3×2 Tausender+2 Tausender=8 Tausender. Der Zehntausender in z″ sind 2; also müssen der Zehntausender in z′ 4 sein, da 3×4 Zehntausender=1 Hunderttausender+2 Zehntausender. Da nun der Hunderttausender in z′ 1 sind, so sind dieselben in z″ 3×1 Hunderttausender+1 Hunderttausender=4 Hunderttausender. Demnach beträgt die gesuchte Zahl z′=142857 und z″ =428571.

72. Man bezeichne die Zahl, die man erhält, wenn man von der zu suchenden Zahl die 2 rechter Hand wegnimmt, mit x, so ist die Zahl selbst um 2 mehr, als das zehnfache von x, also 10x+2. Setzt man aber die 2 an die sechste Stelle links, so erhält man die Zahl x+200000, und weil diese nur $\frac{1}{3}$ der zu suchenden Zahl ist, so hat man:

$\frac{1}{3}(10x+2)=x+200000$, oder $10x+2=3(x+200000)$.

Hieraus folgt, daß $x=85714$. Die Zahl heißt also
$857140+2=857142$.

Diese Aufgabe kann ebenso wie die vorhergehende arithmetisch aufgelöst werden.

73. α) Die Zahl heiße x, so ist der 10. Teil derselben $\frac{1}{10}x$ und der 17. Teil der um 18 verminderten Zahl $=\frac{x-18}{17}$. Weil nun $\frac{1}{10}x$ um 13 größer ist, als $\frac{x-18}{17}$, so erhält man: $\frac{1}{10}x=\frac{x-18}{17}+13$; folglich $x=290$.

β) Die Zahl heiße x, so ist der 7. Teil derselben $\frac{1}{7}x$ und der 10. Teil der um 29 vermehrten Zahl $=\frac{x+29}{10}$. Weil nun $\frac{1}{7}x$ um 2 kleiner ist, als $\frac{x+29}{10}$, so erhält man $\frac{1}{7}x+2=\frac{x+29}{10}$, woraus $x=21$.

74. Die Zahl heiße x; dieselbe mit $7\frac{8}{9}$ multipliziert giebt $7\frac{8}{9}x$; dieses Produkt von $4\frac{5}{6}$ subtrahiert giebt $4\frac{5}{6}-7\frac{8}{9}x$. Diese Differenz in $1\frac{2}{3}$ dividiert, liefert $\frac{1\frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}-7\frac{8}{9}x}$ und weil dieser Quotient $1\frac{7}{8}$ beträgt, so ist $\frac{1\frac{2}{3}}{4\frac{5}{6}-7\frac{8}{9}x}=1\frac{7}{8}$. Hieraus folgt, daß $x=\frac{1}{2}$.

75. Es sei die Zahl x; diese zu $\frac{1}{4}$ addiert, liefert $x+\frac{1}{4}$. Diese Summe in $\frac{1}{4}$ dividiert, giebt $\frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{4}}$, und hiervon $\frac{1}{4}$ subtrahiert, giebt $\frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}$ und da diese Differenz $\frac{1}{4}$ ausmacht, so hat man: $\frac{\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Hieraus folgt $x=\frac{1}{4}$.

76. Die Zahl heiße x. Dieselbe um 55 vermindert und die entstandene Differenz mit $38\frac{1}{2}$ multipliziert, giebt $(x-55)38\frac{1}{2}$. Dieses von 3751 subtrahiert, liefert $3751-(x-55)38\frac{1}{2}$. Weil dies das 33fache der um 11 vermehrten Zahl, also $(x+11)33$ beträgt, so hat man:
$3751-(x-55)38\frac{1}{2}=(x+11)33$. Hieraus folgt $x=77$.

77. Die Jahreszahl heiße x. Von 468 die Hälfte dieser Zahl $=\frac{1}{2}x$ subtrahiert, giebt $468-\frac{1}{2}x$. Dieser Rest, von 135 abgezogen, liefert $135-(468-\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}x-333$ und weil dies

in 79 dividiert $=\frac{79}{\frac{1}{2}x-333}$ zum Quotienten $1\frac{35}{44}$ giebt, so ist $\frac{79}{\frac{1}{2}x-333}=1\frac{35}{44}$.

Hieraus folgt $x=754$, in welchem Jahre Rom erbaut wurde.

78. Das Alter betrage x Jahre. Multipliziert man dieses mit $\frac{2}{3}$ und addiert zum Produkt $\frac{4}{5}$, so erhält man $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}$. Diese Summe in $\frac{13}{15}$ dividiert, giebt $\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}}$. Subtrahiert man diesen Quotienten von $\frac{7}{24}$, so erhält man $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}}$, und da diese Differenz $\frac{1}{4}$ ausmacht, so ist $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$. Hieraus folgt $x=30$ Jahre.

79. Der Lohn eines Meisters sei x *M*, so erhält jeder Geselle $x-1\frac{1}{4}$ und jeder Handlanger $x-1\frac{1}{4}-1\frac{1}{4}=x-2\frac{1}{2}$ *M*. Die 2 Meister erhalten also 2x, die 19 Gesellen $19(x-1\frac{1}{4})$ und die 12 Handlanger $12(x-2\frac{1}{2})$ *M* täglich. Zusammen erhalten sie $111\frac{1}{4}$ *M*; daher ist:

$2x+19(x-1\frac{1}{4})+12(x-2\frac{1}{2})=111\frac{1}{4}$; also $x=5$ *M*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn 1 Meister täglich $1\frac{1}{4}$ *M* mehr als 1 Geselle und 1 Geselle $1\frac{1}{4}$ *M* mehr als 1 Handlanger erhält, so erhält 1 Meister $1\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}=2\frac{1}{2}$ *M* mehr als 1 Handlanger, also 2 Meister $2 . 2\frac{1}{2}=5$ *M* und 19 Ges. $19 . 1\frac{1}{4}=23\frac{3}{4}$ *M* mehr als die Handlanger; es erhalten die 2 Meister und 19 G. $5+23\frac{3}{4}=28\frac{3}{4}$ *M* mehr als die 12 H.; mithin theilen sich in $111\frac{1}{4}-28\frac{3}{4}=82\frac{1}{2}$ *M* die 2 M., 19 G. und 12 H. = 33 Personen zu gleichen Teilen. Demnach kommt auf 1 H. $82\frac{1}{2}:33=2\frac{1}{2}$ *M*; daher auf 1 G. $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}$ *M* und auf 1 Meister $3\frac{3}{4}+1\frac{1}{4}=5$ *M*.

80. Hatte der Landwirt x Ochsen, so konnte er, da sein Futtervorrat nicht für alle auf 20 Wochen ausreichte, dieselben damit nur 14 Wochen lang füttern, folglich hätte der Vorrat für 1 Ochsen 14 . x Wochen gedauert. Schafft er aber 60 Ochsen ab, so hat er noch $x-60$ Ochsen, die er 20 Wochen lang mit dem Vorrat füttern kann; mithin hätte dann 1 Ochs mit demselben Vorrat $20(x-60)$ Wochen ausgereicht. Es ist daher

$20(x-60)=14x$, woraus folgt, daß $x=200$ Ochsen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da er mit dem Futter 20 Wochen auszureichen wünscht, aber nur 14 Wochen ausreichen kann, so folgt daraus, daß er unter Beibehaltung der Zahl seiner Ochsen nur $\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$ der Zeit mit dem Futter ausreicht, also $\frac{3}{10}$ der Zeit weniger, als wenn er

60 Ochsen abschaffte. Im ersten Falle kann er also auch nur $\frac{7}{10}$ der Ochsen beibehalten. Die 60 Ochsen, die er abschaffen will, betragen sonach $\frac{3}{10}$ derselben, also $\frac{1}{10}=20$; folglich hatte er $10 . 20=200$ Ochsen.

81. α) Das Kleid koste x ℳ, so erhielt die Magd jährlich $63+x$ ℳ Lohn; in einem Monat also $\frac{1}{12}(63+x)$ und in $7\frac{1}{2}$ Mon. $7\frac{1}{2}[\frac{1}{12}(63+x)]$ ℳ Lohn. Da sie für $7\frac{1}{2}$ Mon. Dienstzeit zu dem Kleide noch 36 ℳ Lohn erhielt, so ist:

$$7\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12}(63+x)]=x+36; \text{ also } x=9 \text{ ℳ}.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Magd verdient einen jährlichen Lohn von 63 ℳ und 1 Kleid. Für $7\frac{1}{2}$ Monat erhielt sie 36 ℳ und das Kleid, also hätte sie für die an dem vollen Jahre noch fehlenden $4\frac{1}{2}$ Monate $63-36=27$ ℳ erhalten müssen. In $4\frac{1}{2}$ Mon. verdiente sie also 27 ℳ; also in $7\frac{1}{2}$ Mon. $(7\frac{1}{2} . 27):4\frac{1}{2}=45$ ℳ. Für diese Zeit erhielt sie nun 36 ℳ und das Kleid; also war das Kleid zu $45-36=9$ ℳ gerechnet.

β) Setzt man $63=a$, $7\frac{1}{2}=m$, $36=b$, so ist $m[\frac{1}{12}(a+x)]=x+b$, woraus sich $am-12b=12x-mx$ und für

$$x=\frac{am-12b}{12-m} \text{ ergiebt.}$$

82. Die Frau habe x *kg* Flachs, so spann die erste Magd in einem Tage $\frac{1}{36}x$ *kg*, die zweite in einem Tage $\frac{1}{48}x$ *kg*, die Frau selbst, die in einem Tage $\frac{1}{16}$ *kg* mehr spann, als die zweite Magd, $\frac{1}{48}x+\frac{1}{16}$ *kg*. Alle 3 spannen zusammen in einem Tage $\frac{1}{36}x+\frac{1}{48}x+\frac{1}{48}x+\frac{1}{16}$ *kg*, folglich in 8 Tagen $8(\frac{1}{36}x+\frac{1}{24}x+\frac{1}{16})=\frac{1}{18}(10x+9)$. Da sie in acht Tagen mit dem Flachs fertig werden, so ist:

$$\tfrac{1}{18}(10x+9)=x, \text{ also } x=1\tfrac{1}{8} \text{ kg}.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Frau spinnt an 1 Tage $\frac{1}{16}$ *kg* mehr, als die zweite Magd, also in 8 Tagen $\frac{1}{2}$ *kg* mehr. Die erste Magd spinnt denselben in 36 Tagen einmal. Hätte die Frau soviel, wie die zweite Magd gesponnen, so hätten beide zusammen den Flachs in $\frac{48}{2}=24$ Tagen gesponnen, also in 36 Tagen, welches $1\frac{1}{2}\times 24$ Tage ausmacht, auch $1\frac{1}{2}$mal. Der Flachs würde also in 36 Tagen von allen 3 Personen $(1+1\frac{1}{2})=2\frac{1}{2}$ mal gesponnen worden sein. Statt dessen soll er aber in 8 Tagen, also in einer $4\frac{1}{2}$mal so kleinen Zeit nur einmal gesponnen werden; daher wurde in 8 Tagen nur $2\frac{1}{2}:4\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$ des Flachses gesponnen. Die fehlenden $\frac{4}{9}$ des Flachses spann die Frau mehr; also beträgt $\frac{4}{9}$ des Flachses $\frac{1}{2}$ *kg*; folglich die ganze Quantität Flachs $=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ *kg*.

83. Der Bauer habe x Eier, woraus er, da er 25 Stück für 1,5 ℳ

ausbietet, $\frac{x}{25} \times 1,5 = \frac{3}{50}x$ *M* lösen will. Da jemand ihm 15 Eier zerbricht, so hat er nur noch x—15 Eier. Von diesem Reste verkaufte er je 22 Stück zu 1,5 *M*; folglich löst er daraus $\frac{x-15}{22} \times 1,5 = \frac{1,5(x-15)}{22}$ *M*. Da er auf diese Weise ebensoviel löst, als vorher aus seiner ganzen Anzahl, so ist $\frac{3}{50}x = \frac{1,5(x-15)}{22}$; folglich x=125 Eier.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der Bauer bietet 1 Ei für $\frac{3}{50}$ *M* aus. Es werden ihm 15 Eier zerbrochen, also erwächst ihm ein Schaden von $\frac{9}{10}$ *M*, die ihm aber erstattet werden. Weil er diese $\frac{9}{10}$ *M* für sich behalten und doch aus den übrigen Eiern so viel lösen will, als anfangs, so verkauft er jetzt 1 Ei für $\frac{3}{44}$ *M*; also beträgt der Unterschied des jetzigen Preises gegen den früheren $\frac{9}{1100}$ *M*. Um nun die $\frac{9}{10}$ *M* auszugewinnen, muß er $\frac{9}{10} : \frac{9}{1100} = 110$ Eier verkaufen; also hatte er 110+15=125 Eier.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da er 25 Stück für 1,5 *M* geben wollte, aber nur 22 gab, so gewann er dadurch 25—22=3 Stück. Er mußte 15=5×3 Stück gewinnen; folglich hatte er 5 . 25=125 Eier.

84. Er habe vor der Vertauschung x *ha* Wiesenland gehabt. Er vertauscht $\frac{1}{4}x$ gegen Weinberge, $\frac{1}{5}x$ gegen Wald und $\frac{1}{6}x$ gegen Ackerland, zusammen also $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = \frac{37}{60}x$; folglich behält er noch $\frac{23}{60}x$ *ha* Wiesen. Wenn nun 5 *ha* Wiesen denselben Wert haben, wie 3 *ha* Weinberge, so erhält er für $\frac{1}{4}x$ *ha* Wiesen $\frac{1}{4}x \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}x$ *ha* Weinberge. Da 6 *ha* Weinberge=25 *ha* Wald, und Wiesenland zu Weinbergen sich verhält, wie 5 : 3, so verhält sich Wiesenland zu Wald, wie 5 . 6 : 3 . 25, oder wie 30 : 75. Er erhält also für $\frac{1}{5}x$ *ha* Wiesen $\frac{1}{5}x \cdot \frac{75}{30} = \frac{1}{2}x$ *ha* Wald. Da sich ferner Wald zu Ackerland verhält, wie 5 : 4, so verhält sich Wiesenland zu Ackerland wie 5 . 6 . 5 : 3 . 25 . 4, oder 150 : 300, oder wie 1 : 2; mithin erhält er für $\frac{1}{6}x$ *ha* Wiesen $\frac{1}{3}x$ *ha* Ackerland. Die $\frac{3}{20}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x$ sind $= \frac{59}{60}x$ *ha*, die er gegen $\frac{37}{60}x$ *ha* Wiesen vertauscht hat. Da er sich nun im Besitze von 574 *ha* Land sieht, so ist also:

$$\frac{59}{60}x + \frac{23}{60}x = 574;\ x = 420\ ha\ \text{Wiesenland.}$$

85. Hatte die Griechin x Drachmen bei sich, so hatte sie nach der Erhörung ihrer Bitte 2x und nach der Opferung 2x—2 Drachmen. Ihre Bitte um Verdoppelung ihres Geldes wird zum zweitenmal erhört; sie opfert zum Danke wieder 2 Drachmen, also hatte sie 2(2x—2)—2=2(2x—3) Drachmen. Hier-

durch sieht sie sich im Besitze von doppelt soviel Geld, als anfangs, deshalb ist

$2(2x-3)=2x$; folglich $x=3$ Drachmen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Weil die Frau nach Erhörung ihrer ersten Bitte 2 Drachmen opferte, so wurden ihr bei der zweiten Bitte um Verdoppelung ihres Geldes diese 2 Drachmen nicht verdoppelt; sie erlitt also dadurch einen Schaden von $2\times2=4$ Drachmen, und da sie nun noch zuletzt 2 Drachmen opferte, so betrug ihr ganzer Verlust $4+2=6$ Drachmen. Hätte sie nach Erhörung ihrer zweimaligen Bitte um Verdoppelung ihres Geldes nicht die 2 Drachmen geopfert, so hätte sie das 4fache, statt des 2fachen ihres ursprünglichen Geldes haben müssen. Demnach ist der Verlust von 6 Drachmen das 2fache ihres Geldes; folglich hatte sie anfangs $6:2=3$ Drachmen.

86. Die Bevölkerungen der Gemeinden A und B verhalten sich wie $7:11$ und die der Gemeinden B und C wie $5:8$, also verhalten sich die Bevölkerungen der Gemeinden A und C, wie $7.5:11.8=35:88$. Die Gemeinde C erhalte nun x *ha* von der Waldfläche, so erhält B $\frac{5}{8}x$ und A $\frac{35}{88}x$ *ha*. Außerdem erhält A noch $\frac{1}{20}$ des Anteils von B und C; folglich erhält A im ganzen $\frac{35}{88}x+\frac{1}{20}(x+\frac{5}{8}x)=\frac{843}{1760}x$ *ha*. Da die zu verteilende Fläche 7406 *ha* groß ist, so hat man: $x+\frac{5}{8}x+\frac{843}{1760}x=7406$; folglich $x=3520$ *ha* für C und demnach erhält B $\frac{5.3520}{8}=2200$ und A $\frac{843.3520}{1760}=1686$ *ha*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn sich die Bevölkerungen der Orte A und B wie $7:11$ oder wie $35:55$, und die der Orte B und C wie $5:8$ oder wie $55:88$ verhalten, so verhalten sich die Bevölkerungen von A, B und C, wie $35:55:88$: d. h. da das Land im Verhältnis der Bevölkerungen der 3 Orte geteilt werden soll, so kämen von je $35+55+88=178$ *ha* 35 auf A, 55 auf B und 88 auf C, wenn A nicht außerdem noch $\frac{1}{20}$ des Anteils von B und C, also von je $55+88=143$ dieser beiden erhielte. Dadurch erhält jetzt A $42\frac{3}{20}$ *ha*, während die Anteile von B und C dieselben bleiben. Von je $42\frac{3}{20}+55+88=185\frac{3}{20}$ *ha*, die zur Verteilung kommen, erhält also A $42\frac{3}{20}$, B 55 und C 88. Es sollen nun $7406=40\times185\frac{3}{20}$ *ha* verteilt werden; folglich erhält A $40\times42\frac{3}{20}=1686$, B $40\times55=2200$ und C $40\times88=3520$ *ha*.

87. Erreicht der Luftball eine Höhe von x *m* über der Spitze eines 412 *m* hohen Berges und fällt um $\frac{1}{4}$ dieser Höhe, so steht er nur noch $x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$ *m* hoch. Steigt er jetzt wieder um $\frac{1}{10}$ dieser letzten Höhe, nämlich $\frac{1}{10}.\frac{3}{4}x=\frac{3}{40}x$ *m*,

so hat er jetzt eine Höhe von $\frac{3}{4}x + \frac{3}{40}x = \frac{33}{40}x$ *m*. Nachdem derselbe um $\frac{19}{20}$ der zum erstenmale erlangten Höhe, also $\frac{19}{20}x$ *m* gefallen, kommt er am Fuße des Berges an, hat also beim Herunterfallen nicht nur die zuletzt erreichte Höhe von $\frac{33}{40}x$ *m*, sondern auch noch die Höhe des Berges von 412 *m* abgemacht. Es ist daher:
$\frac{19}{20}x = \frac{33}{40}x + 412$. Hieraus folgt, daß $x = 3296$ *m*.

88. Der Spieler besitze vor dem Spiele x ℳ, so verliert er $\frac{7}{10}x$, behält also noch $(x - \frac{7}{10}x) = \frac{3}{10}x$. Er gewinnt hierauf $\frac{1}{9}$ des Restes, also gewinnt er $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{10}x = \frac{1}{30}x$, folglich hat er wieder $(\frac{3}{10}x + \frac{1}{30}x) = \frac{1}{3}x$. Hiervon verliert er $\frac{7}{12}$, also $\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{7}{36}x$, mithin bleibt ihm noch $(\frac{1}{3}x - \frac{7}{36}x) = \frac{5}{36}x$ ℳ übrig. Hiervon gewinnt er wieder $\frac{1}{8}$, also $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{36}x = \frac{5}{288}x$, also hat er $\frac{5}{36}x + \frac{5}{288}x = \frac{45}{288}x$. Von diesem Reste verliert er $\frac{4}{5}$, also $\frac{4}{5} \cdot \frac{45}{288}x = \frac{36}{288}x$; folglich bleibt ihm zuletzt nur noch $\frac{45}{288}x - \frac{36}{288}x = \frac{1}{32}x$ ℳ übrig. Da er sich nun gemäß der Aufgabe im Besitze von 9 ℳ sieht, so ist

$\frac{1}{32}x = 9$; folglich $x = 288$ ℳ.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da $\frac{7}{10} = \frac{252}{360}$, $\frac{1}{9} = \frac{40}{360}$, $\frac{7}{12} = \frac{210}{360}$, $\frac{1}{8} = \frac{45}{360}$ und $\frac{4}{5} = \frac{288}{360}$ ist, so kann man sich vorstellen, als habe der Spieler zuvor sein Geld in 360 gleiche Teile geteilt, wovon er anfangs 252 verliert, es bleiben ihm also noch $360 - 252 = 108$; er gewinnt $\frac{1}{9}$ dieses Restes, also $108 : 9 = 12$ solcher Teile wieder; hat also jetzt $108 + 12 = 120$; hiervon verliert er $\frac{7}{12}$, also $120 \times \frac{7}{12} = 70$, und es blieben ihm noch $120 - 70 = 50$, wovon er $\frac{1}{8}$, also $6\frac{1}{4}$ wieder gewinnt; er hat also $50 + 6\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$. Nun verliert er hiervon $\frac{4}{5}$, also 45, wonach ihm schließlich von seinen 360 Teilen nur noch $56\frac{1}{4} - 45 = 11\frac{1}{4}$ übrig bleiben. Nun sieht er sich im Besitze von 9 ℳ; folglich betragen die $11\frac{1}{4}$ oder $\frac{45}{4}$ Teile seines Geldes 9 ℳ; daher sind 45 Teile = 36 ℳ; also 360 Teile = 45.8 Teile auch $8 \times 36 = 288$ ℳ.

89. A D F E C B

Die Entfernung des Ortes A von B betrage x Meilen, so hat das Schiff bei einer Entfernung von 4 Meilen von B, $(x-4)$ Meilen gemacht. Hier wird es um den 19. Teil des gemachten Weges zurückgeworfen, folglich hat es nur

$$x - 4 - \frac{x-4}{19} = \frac{18x - 72}{19} \text{ Meilen gemacht.}$$

Um den 24. Teil dieser Entfernung segelt es wieder auf B zu, folglich hat es jetzt $\frac{18x-72}{19} + \frac{18x-72}{19.24} = \frac{225x - 900}{228}$ Meilen gemacht. Wird es nun um den 20. Teil seiner Ent=

fernung von A zurückgetrieben, so ist seine jetzige Entfernung von A

$$\frac{225x-900}{228}-\frac{225x-900}{228.20}=\frac{855x-3420}{912} \text{ Meilen.}$$

Nachdem es hiervon den 9. Teil abgemacht, läuft es in den Hafen ein, erreicht also B; dieses giebt

$$\frac{855x-3420}{912}+\frac{855x-3420}{912.9}=\frac{4275x-17100}{4104} \text{ Meilen.}$$

Es ist demnach: $\frac{4275x-17100}{4104}=x;$

folglich x=100 Meilen Entfernung des Ortes A von B. Demnach ist:

$x-4=96$ M. = AC in obiger Figur
$\frac{x-4}{19}=5\frac{1}{19}$ „ = DC
$\frac{18x-72}{19.24}=3\frac{15}{19}$ „ = DE
$\frac{225x-900}{228.20}=4\frac{14}{19}$ „ = EF
$\frac{855x-3420}{9.912}=10$ „ $=\frac{1}{9}AF=FB$

$=119\frac{11}{19}$ Meilen hat das Schiff im ganzen zurückgelegt.

90. Mit Bezug auf die Figur im vorhergehenden Beispiele sei hier

$$AB=x;\ CB=n;\ AB-CB=AC=x-n;$$

$$DC=\frac{1}{x}AC=\frac{x-n}{a};$$

$$AD=AC-DC=x-n-\frac{x-n}{a}=\frac{x(a-1)-n(a-1)}{a}$$

$$=(x-n)\left(\frac{a-1}{a}\right);$$

$$DE=\frac{1}{b}AD=(x-n)\left(\frac{a-1}{a}\right)\frac{1}{b};$$

$$AD+DE=AE=(x-n)\left(\frac{a-1}{a}\right)+(x-n)\left(\frac{a-1}{a}\right)\frac{1}{b}$$

$$=\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right];$$

$$FE=\frac{1}{c}AE=\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{1}{c};$$

$$AF=AE-FE=\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]$$

$$-\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{1}{c}=\left(\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{c-1}{c}\right);$$

$$\frac{1}{d}AF=FB=\left(\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{c}\right]\frac{c-1}{c}\right)\frac{1}{d}\text{; folglich}$$

$$AF+FB=AB=\left(\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{c-1}{c}\right)$$

$$+\left(\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{c-1}{c}\right)\frac{1}{d}\text{, oder}$$

$$AB=x=\left(\left[\left((x-n)\frac{a-1}{a}\right)\frac{b+1}{b}\right]\frac{c-1}{c}\right)\frac{d+1}{d}\text{, oder}$$

$$abcdx=(x-n)(a-1)(b+1)(c-1)(d+1)\text{, oder}$$

$$x[(a-1)(b+1)(c-1)(d+1)-abcd]$$
$$=n(a-1)(b+1)(c-1)(d+1);$$

$$\text{folglich } x=\frac{n(a-1)(b+1)(c-1)(d+1)}{(a-1)(b+1)(c-1)(d+1)-abcd}.$$

91. Der Wasserbehälter sei zu Anfang mit x l angefüllt gewesen, so wurde $(\frac{5}{12}x+40)$ l ausgelassen und es blieb als Rest noch $[x-(\frac{5}{12}x+40)]=\frac{1}{12}(7x-480)$ l in demselben. Hierzu setzt man $\frac{4}{13}\cdot\left(\frac{7x-480}{12}\right)-20$ l; also befand sich in demselben

$$\frac{7x-480}{12}+\frac{4}{13}\times\left(\frac{7x-480}{12}\right)-20=$$
$$\frac{7x-480}{12}+\frac{7x-1260}{39}=\frac{119x-11280}{156}\ l.$$

Hiervon zapft man

$$\frac{7}{11}\cdot\left(\frac{119x-11280}{156}\right)-20=\frac{833x-113280}{1716}\ l \text{ ab, folglich blieb}$$

noch in demselben:

$$\frac{119x-11280}{156}-\frac{833x-113280}{1716}=\frac{119x-2700}{429}\ l.$$

Auf diese Weise enthält der Behälter 700 l weniger, als anfangs; folglich ist

$$\frac{119x-2700}{429}+700=x. \text{ Hieraus folgt, daß } x=960\ l.$$

92. A erhalte x *Frc*, so erhält B $1\frac{1}{2}x-300=\frac{1}{2}(3x-600)$;
C $\frac{3}{4}.(2\frac{1}{2}x-300)+113=\frac{1}{8}(15x-896)$ *Frc*;
D $\frac{4}{7}[x+\frac{3}{4}(2\frac{1}{2}x-300)+113]-\frac{3}{5}(1\frac{1}{2}x-300)=$

$$\frac{26x-4060}{35}\ Frc;$$

E $\frac{1}{6}[x+1\frac{1}{2}x-300+\frac{3}{4}(2\frac{1}{2}x-300)+113+$
$\frac{4}{7}[x+\frac{3}{4}(2\frac{1}{2}x-300)+113]-\frac{3}{5}(1\frac{1}{2}x-300)]+627=$
$\frac{1}{6}[x+\frac{1}{2}(3x-600)+\frac{1}{8}(15x-896)+\frac{1}{35}(26x-4060)]$

$$+627=\frac{1433x+970480}{1680}\ Frc;$$

Da die zu verteilende Summe 17000 *Frc* beträgt, so ist

$$x+\frac{3x-600}{2}+\frac{15x-896}{8}+\frac{26x-4060}{35}+\frac{1433x+970480}{1680}=17000.$$

Hieraus ergiebt sich, daß x=2800 *Frc* für A;

$$\frac{3.2800-600}{2}=3900 \text{ Frc für B};$$

$$\frac{15.2800-896}{8}=5138 \;\;" \;\;" \;\;\text{C};$$

$$\frac{26.2800-4060}{35}=2196 \;\;" \;\;" \;\;\text{D};$$

$$\frac{1433.2800+970480}{1680}=2966 \;\;" \;\;" \;\;\text{E};$$

93. In dem zweiten Zimmer mögen sich anfangs x Personen befunden haben, so waren im ersten 4x Personen. Gehen aus dem ersten 13 Personen in das zweite, so befinden sich in jenem (4x—13) und in diesem (x+13). Weil sich nun in diesem $1\frac{1}{3}$mal so viele Personen befinden, als im ersten, so ist

$$1\tfrac{1}{3}(4x-13)=x+13;$$

folich x=7 Personen im zweiten Zimmer und 4.7=28 Personen im ersten.

Zweite Auflösung. Man nehme an, im 2. Zimmer seien etwa $10=\alpha_1$ Personen, so sind im ersten 4.10=40 Pers. Gehen aus diesem 13 in jenes, so sind im ersten 40—13=27 und im 2. Zimmer 10+13=23. Hieran fehlen aber 13 P., um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen, denn $23+13=36=1\frac{1}{3}.27$. Der durch die falsche Annahme entstandene Fehler beträgt sonach $13=\varphi'$. Man nehme jetzt zweitens an, es seien etwa 11 $\text{P.}=\alpha_2$ im zweiten, so sind im ersten 4.11=44 P. Verlassen 13 das erste und gehen in das zweite, so enthält das erste noch 44—13 =31 und das zweite 11+13=24 P. Hieran fehlen aber noch $17\frac{1}{3}$ P., denn $24+17\frac{1}{3}=41\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}.31$ P. Der zweite Fehler beträgt demnach $17\frac{1}{3}=\varphi''$. Wenn wir die Personen im zweiten Zimmer mit x bezeichnen, so ist:

$$x=\frac{13.11-17\frac{1}{3}.10}{13-17\frac{1}{3}}=\frac{-30\frac{1}{3}}{-4\frac{1}{3}}=7.$$

94. Habe ich in der rechten Tasche x *M*, so habe ich in der linken x $\text{₰}=\frac{x}{100}$ *M*. Bringe ich aus der rechten in die linke 6,93 *M*, so bleibt in der rechten noch x—6,93 *M* und die linke enthält $\frac{x}{100}+6{,}93$ *M*. Da sich hierdurch das Ver-

hältnis umkehrt, da x—6,93 so viele Pfennige betragen, als $\frac{x}{100}+6,93$ Mark sind, so ist dieses 100mal größer als jenes. Hiernach ist:

$$100(x-6,93)=\frac{x}{100}+6,93;\ \text{also}\ x=7\ ℳ.$$

Zweite Auflösung. Angenommen ich hätte 10 ℳ in in der rechten Tasche, so habe ich 10 ₰ in der linken. Bringe ich aus der rechten 6,93 ℳ in die linke, so enthält die rechte noch 3,07 ℳ und die linke 7,03 ℳ. Auf diese Weise habe ich in der rechten 2,9997 ℳ mehr, als statthaft ist. Nehme ich an, ich hätte in der rechten 11 ℳ, so habe ich in der linken 11 ₰. Nach der verlangten Operation habe ich dann noch in der rechten 4,07 ℳ und in der linken 7,04 ℳ, folglich habe ich in der rechten 3,9996 ℳ mehr, als zulässig ist. Hier ist also $\alpha_1=10$, $\alpha_2=11$, $\varphi'=2,9997$, $\varphi''=3,9996$; daher beträgt die Anzahl der Mark, die ich in der rechten Tasche habe:

$$x=\frac{2,9997.11-3,9996.10}{2,9997-3,9996}=\frac{-6,9993}{-0,9999}=7\ ℳ.$$

95. A habe x Goldstücke à 20 ℳ=20x ℳ; dann hat B x Markstücke=x ℳ und C x ein Fünftelmarkstücke=$\frac{1}{5}$x ℳ. A giebt an B 48 Stück=20.48 ℳ, also behält er noch 20(x—48) ℳ. C giebt ebenfalls 48 Stücke=$\frac{1}{5}$.48 ℳ an B, behält also noch $\frac{1}{5}$(x—48) ℳ. Auf diese Weise hat B $x+20.48+\frac{1}{5}.48=x+969\frac{3}{5}$ ℳ. Weil nun A und C ebensoviel an Geld haben sollen, als B, so ist:

$$20(x-48)+\frac{1}{5}(x-48)=x+969\tfrac{3}{5};\ x=101\ \text{Stück}.$$

96. A B C G D E F

Da das Schulhaus zwischen C und D etwa in G so errichtet werden soll, daß die Summe der Entfernungen der 3 Ortschaften A, B, C gleich der Summe der Entfernungen von D, E, F werde, so nehme man an, es müsse x *km* von C erbaut werden. Nun ist AB=3 *km*, BC=$2\frac{1}{2}$ *km*, CG=x *km*; mithin ist A vom Schulhause $3+2\frac{1}{2}+x=5\frac{1}{2}+x$ *km*, B $2\frac{1}{2}+x$ *km*, C x *km* entfernt. Nun ist CD=5 *km*, also GD=5—x *km*, DE=2 *km*, also GE=5—x+2=7—x *km* und EF=1 *km*, daher GF=7+x+1=8—x *km*. Weil nun AG+BG+GC=GD+GE+GF sein soll, so ist $(5\frac{1}{2}+x)+(2\frac{1}{2}+x)+x=(5-x)+(7-x)+(8-x)$, also x=2 *km*=CG.

97. Der Vater sei nach x Jahren 8mal so alt, als sein Sohn. Alsdann ist der Vater (30+x) und der Sohn (2+x) Jahre alt. Weil nun (30+x) das 8fache von (2+x) ist, so erhält man: 30+x=8(2+x); folglich x=2 Jahre.

Ferner sei der Vater nach x Jahren 5mal so alt als der Sohn, so ist

$30+x=5(2+x)$; folglich $x=5$ Jahre.

War der Vater vor x Jahren 57mal so alt, als sein Sohn, so war er damals $(30-x)$ und sein Sohn $(2-x)$ Jahre alt; und weil des Vaters Alter das 57fache von dem Alter des Sohnes ist, so ergiebt sich:

$30-x=57(2-x)$; folglich $x=1\frac{1}{2}$ Jahre.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Soll der Vater 8mal so alt sein, als der Sohn, so muß jener des Sohnes Alter 7mal mehr alt sein, als dieser. Der Vater ist aber immer $(30-2)=28$ Jahre älter; mithin wird er 8mal so alt sein, wenn der Sohn $\frac{28}{7}=4$ Jahre alt sein wird; dies ist, da der Sohn jetzt 2 Jahre zählt, nach 2 Jahren der Fall.

98. Nach x Jahren sei A qmal so alt als B, so ist A $(m+x)$ und B $(n+x)$ Jahre alt. Es ist also

$m+x=q(n+x)$, oder $x(q-1)=m-nq$;

folglich $x=\frac{m-nq}{q-1}$ Jahre.

War A vor x Jahren qmal so alt, als B, so ist

$m-x=q(n-x)$; folglich $x=\frac{nq-m}{p-1}$ Jahre.

99. Die Tochter sei jetzt x Jahre alt, so ist die Mutter 6x Jahre alt. Soll nach 5 Jahren die Mutter $3\frac{1}{2}$mal so alt, als ihre Tochter sein, so ist sie $6x+5$ und die Tochter $x+5$ Jahre alt. Es ist also $3\frac{1}{2}(x+5)=6x+5$; folglich $x=5$ und $5x=30$ Jahre.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Sollte die Mutter 6mal so alt bleiben, so hätte ihr Alter um $6\times5=30$ Jahre zunehmen müssen, während das Alter der Tochter nur 5 Jahre zunimmt. Weil nun aber ihr Alter auch nur 5 Jahre zunimmt, also $30-5=25$ kleiner blieb, wurde aus dem 6maligen Alter der Mutter das $3\frac{1}{2}$malige. Die 25 Jahre betragen sonach das $6-3\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$malige Alter der Tochter nach 5 Jahren; also ist diese alsdann $25:2\frac{1}{2}=10$ Jahre alt; ihr jetziges Alter ist also $10-5=5$ und daher die Mutter $6\times5=30$ Jahre.

Dritte Auflösung. Die Mutter sei jetzt 36 Jahre alt, so ist ihre Tochter 6 Jahre alt. Nach 5 Jahren ist die Mutter 41 und die Tochter 11 Jahre alt; dann ist die Mutter aber $2\frac{1}{2}$ Jahre älter, als sie sein sollte, um $3\frac{1}{2}$mal so alt zu sein, als ihre Tochter. Nehme ich nun an, die Mutter sei jetzt 42 Jahre alt, so ist ihre Tochter 7 Jahre alt, und nach 5 Jahren übersteigt das Alter der Mutter um 5 Jahre dasjenige, das $3\frac{1}{2}$mal so groß sein soll als das

ihrer Tochter. Hier ist $\alpha_1=36$, $\alpha_2=42$, $\varphi'=2\frac{1}{2}$, $\varphi''=5$, also ist das Alter der Mutter

$$x=\frac{2\frac{1}{2}\,.\,42-5\,.\,36}{2\frac{1}{2}-5}=\frac{-75}{-2\frac{1}{2}}=30 \text{ Jahre.}$$

100. A sei jetzt x Jahre, so ist B $\frac{x}{n}$ Jahre alt. Nach m Jahren soll er pmal so alt sein, als B. Dieses giebt

$$x+m=p\left(\frac{x}{n}+m\right), \text{ oder } (n-p)x=mn(p-1);$$

$$\text{folglich } x=mn\frac{p-1}{n-p} \text{ Jahre.}$$

101. Das Ersparnis des Vaters habe vor x Jahren so viel betragen, als das seiner Söhne zusammen genommen. Damals betrug das Ersparnis des Vaters 600(50—x) *M*; das des ersten Sohnes 600(27—x); das des zweiten 600(24—x); das des dritten 600(19—x) und das des vierten 600(16—x) *M*. Es ist daher:

$$600(50-x)=600(27-x)+600(24-x)+600(19-x)+600(16-x): \text{ folglich } x=12 \text{ Jahre.}$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der Vater hat 50 Jahre lang jedes Jahr 600 *M* erspart. Seine 4 Kinder aber haben zusammen jetzt 86 Jahre lang gespart, also 86—50=36 Jahre länger. In dieser Zeit beträgt ihr Ersparnis 36×600=21600 *M*. Nun sparen sie jährlich 4×600=2400 *M*; der Vater aber nur 600 *M*; folglich jene 2400—600 *M*=1800 *M* mehr; demnach betrug das Ersparnis des Vaters vor 21600 : 1800=12 Jahren im ganzen soviel, als das seiner 4 Kinder zusammen genommen.

102. Nach x Jahren sei das Ersparnis des Vaters die Hälfte dessen, was seine Söhne zusammen zurückgelegt haben. Alsdann ist:

$$2[600(50+x)]=600(27+x+24+x+19+x+16+x);$$

$$\text{folglich } x=7 \text{ Jahre.}$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der Vater spart in 50 Jahren 30000 *M* und die Kinder in 86 Jahren 86×600=51600 *M*. Es fragt sich nun, nach welcher Zeit die Kinder das doppelte Ersparnis des Vaters, also 60000 *M* erreichen. An demselben fehlen ihnen jetzt noch 60000—51600=8400 *M* und da die Kinder jährlich 2400 *M*, der Vater aber nur 600 *M* spart, also 600 *M* weniger, als die Hälfte seiner Kinder, so wird nach 8400 : 1200=7 Jahren das Ersparnis der Kinder das Doppelte von dem ihres Vaters betragen.

103. A B C D E

Der Ort D sei von E x *km* entfernt, also DE=x, so ist A von E, also AE=(19+3+5+x)=(27+x); B von E,

oder BE$=(3+5+x)=(8+x)$; C von E, oder CE$=(5+x)$ *km* entfernt. Da nun die von A nach E gereiste Person soviel an Postgeld bezahlte, als die von B, C und D zusammen, so muß auch AE$=$BE$+$CE$+$DE sein. Es ist daher: $27+x=(8+x)+(5+x)+x$; folglich $x=7$ *km*.

104. A liegt von B 37 *km*. B liege von C x *km*, so liegt C von D $(34-x)$ und D von E 14 *km*. Der Fuhrmann, welcher 400 *kg* von A nach C, also $(37+x)$ *km* fährt, würde, wenn er nur 1 *km* zu fahren hätte, $400(37+x)$ *kg* für dasselbe Geld fahren. Der Fuhrmann, der aus B nach C, also x *km* 300 *kg* fährt, würde unter obiger Voraussetzung $300x$ *kg* fahren, ebenso der Fuhrmann von C nach D $550(34-x)$ *kg* und der von C nach E $450(34-x+14)$ *kg*. Da der Kaufmann den beiden ersten Fuhrleuten ebensoviel an Fracht bezahlt, als den beiden letzten, so müssen auch ihre bezüglichen Ladungen gleich groß sein. Es ist demnach: $400(37+x)+300x=550(34-x)+450(34-x+14)$; folglich $x=15$ *km* $=$ der Entfernung von B nach C.

105. Die Frau habe x Stränge Garn gehabt. Wenn nun $(x+9)$ Stränge $(100+10)$ *m* Leinwand geben, so giebt 1 Strang $\frac{100+10}{x+9}$ *m*, und wenn man aus $(x-9)$ Strängen $(100-10)$ *m* erhält, so erhält man aus 1 Strang $\frac{100-10}{x-9}$ *m*. Da nun in beiden Fällen aus jedem Strang gleich viel *m* kommen, so ist auch;

$$\frac{100+10}{x+9}=\frac{100-10}{x-9};\ x=90 \text{ Stränge.}$$

Zweite Auflösung. Es seien x Stränge. Da der Weber zu $100+10=110$ *m* Tuch 9 Stränge mehr brauchte, als die Frau brachte, so hätte sie $(x+9)$ Stränge bringen müssen, und dann würde der Weber für 1 *m* $\frac{x+9}{110}$ Stränge gebraucht haben. Da die gebrachten Stränge für $100-10=90$ *m* um 9 Stränge zuviel betragen, so kommen auf 90 *m* nur $(x-9)$ Stränge und daher auf 1 *m* $\frac{x-9}{90}$ Stränge. Es ist daher:

$$\frac{x+9}{110}=\frac{x-9}{90};\ x=90 \text{ Stränge.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Aus der Aufgabe geht hervor, daß aus den vorhandenen Strängen 100 *m* Leinwand gewebt werden können. Für 10 *m* sind nun 9 Stränge erforderlich, also für 1 *m* $\frac{9}{10}$ Strang; für 100 *m* Ellen also $100 \cdot \frac{9}{10}=90$ Stränge.

106. α) Er besitze x *kg*. Verkauft er 1 *kg* zu 1,54 *M*, so hat er an dem Verkaufspreise von 1,54x *M* einen Nutzen von 18 *M*; mithin beträgt der Einkaufspreis 1,54x—18 *M*. An dem Verkaufspreise von 1,12x *M* hat er einen Schaden von 24 *M*; in diesem Falle beträgt der Einkaufspreis 1,12x+24 *M*. Es ist also:

$$1{,}54x-18=1{,}12x+24;\text{ also } x=100\ kg.$$

Zweite Auflösung. Er habe das *kg* zu x *M* gekauft. Berechnet man nun, wie viel *kg* er in jedem Falle verkauft, so ist:

$$\frac{18}{1{,}54-x}=\frac{24}{x-1{,}12};\text{ also } x=1{,}36\ M;\text{ daher hat}$$

er 18:(1,54—1,36)=100 *kg* gekauft.

β) Er habe 20 *kg*, woraus er 20.77=1540 *Nkr* löst, und da er hieran 900 *Nkr* verdient, so haben ihm die 20 *kg* 1540—900=640 *Nkr* gekostet. Verkauft er die 20 *kg* zu 20.56=1120 *Nkr*, so haben sie ihm 1120+1200=2320 *Nkr* gekostet. Also erster Fehler 2320—640=1680.

Er habe jetzt 20 *kg*, so beträgt der Verkaufspreis 30.77= 2310 *Nkr*, und weil er hieran 900 *Nkr* gewinnt, so war der Einkaufspreis 1410 *Nkr*. Verkauft er sie dagegen zu 30.56=1680 *Nkr*, so haben sie ihm 2880 *Nkr* gekostet, mithin zweiter Fehler 1470. Es ist also $\alpha_1=20$, $\alpha_2=30$, $\varphi'=1680$, $\varphi''=1470$, also $x=\frac{30.1680-20.1470}{1680-1470}=100\,kg$.

Zweite Auflösung. Es sei der Einkaufspreis für 1 *kg*=x *Nkr*, so ist $\frac{9}{0{,}77-x}=\frac{12}{x-0{,}56}$, woraus x=68 *Nkr*. Er besitzt also 9:(0,77—0,68)=100 *kg*.

107. Der Behälter fasse x *l* Wasser. Fließen alle 3 Minuten 20 *l* hinein, so fehlen nach einer gewissen Zeit noch 40 *l* an der vollständigen Füllung; es sind alsdann (x—40) *l* darin, wozu es einer Zeit von $\frac{3(x-40)}{20}$ Minuten bedurfte. Fließen aber in denselben alle 5 Minuten 52 *l*, so werden nach derselben Zeit 72 *l* Wasser übergelaufen sein; es flossen alsdann (x+72) *l* in $\frac{5(x+72)}{52}$ Minuten. Da nun die Zeiten beide Male dieselben sind, so ist:

$$\frac{3(x-40)}{20}=\frac{5(x+72)}{52};$$

folglich x=240 *l*. In $\frac{3(240-40)}{20}=30$ Minuten fließen 240—40=200 *l* hinein; folglich müssen in jeder Minute

240:30=8 l hineinfließen, wenn der Behälter nach derselben Zeit gefüllt sein soll.

Zweite Auflösung. Der Behälter müsse x Minuten geöffnet sein; dann fließen $6\frac{2}{3}$x l ein. Da nun 40 l an der vollständigen Füllung fehlen, so enthält derselbe $6\frac{2}{3}x+40 = 6\frac{2}{3}(x+6)$ l. Fließen alle 5 Minuten 52 l ein, so sind in denselben nach x Minuten $10\frac{2}{5}$x l eingeflossen, und weil in diesem Falle 72 l übergelaufen sind, so faßt er $10\frac{2}{5}x - 72 = \frac{4}{5}(13x-90)$ l; daher ist:

$$6\tfrac{2}{3}(x+6) = \tfrac{4}{5}(13x-90);$$

folglich x=30 Minuten; daher enthält der Behälter

$$6\tfrac{2}{3}(30+6) = \tfrac{4}{5}(13.30-90) = 240\ l.$$

Dritte Auflösung. Im ersten Falle fließen in jeder Minute $6\frac{2}{3}$ l ein und im andern Falle $10\frac{2}{5}$ l. Angenommen es müssen in jeder Minute x l hineinfließen, so fließen im ersten Falle $(x-6\frac{2}{3})$ l zu wenig und im andern Falle $(10\frac{2}{5}-x)$ l zu viel in jeder Minute ein; demnach war der Behälter bezüglich $\frac{40}{x-6\frac{2}{3}}$ und $\frac{72}{10\frac{2}{5}-x}$ Minuten lang geöffnet. Da die Zeiten dieselben sind, so ist:

$$\frac{40}{x-6\frac{2}{3}} = \frac{72}{10\frac{2}{5}-x};$$

folglich x=8 l; also war der Behälter $40:(8-6\frac{2}{3})=30$ Minuten lang offen, in welcher Zeit 8.30=240 l einflossen.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Im zweiten Falle fließen in jeder Minute $10\frac{2}{5}-6\frac{2}{3}=3\frac{11}{15}$ l mehr ein als im ersten Falle. Demnach beträgt der Unterschied in 1 Minute $3\frac{11}{15}$ l und der Unterschied im ganzen 40+72 =112 l; folglich floß das Wasser während $112:3\frac{11}{15}=30$ Minuten beidemale. Es müssen demnach $(6\frac{2}{3}\times30+40)= 200+40=240$ l zur Füllung des Behälters fließen.

108. Der Maurer mache bei $8\frac{1}{2}$ Stunden täglicher Arbeit x *cbm* wöchentlich, so ist das, was an 37 *cbm* fehlt =(37—x) *cbm*. Arbeitet er aber täglich 10 Stunden, also eine $1\frac{3}{17}$-mal so lange Zeit, als im ersten Falle, so macht er wöchentlich $1\frac{3}{17}$x *cbm*, was aber mehr als 37 *cbm* beträgt. Dieser Ueberschuß ist$=(1\frac{3}{17}x-37)$ *cbm*. Da nun jener Mangel und dieser Ueberschuß einander gleich sind, so ist:

$$1\tfrac{3}{17}x-37=37-x;\ \text{folglich}\ x=34\ cbm.$$

Zweite Auflösung. Was der Maurer über resp. unter 37 *cbm* die Woche macht, sei x, so macht er bei 10stündiger Arbeit täglich in 1 Woche (37+x) und bei $8\frac{1}{2}$stündiger Arbeit (37—x) *cbm*. Im ersten Falle macht er stündlich $\frac{37+x}{6.10}$ und im andern Falle $\frac{37-x}{6.8\frac{1}{2}}$ *cbm*. Da er in

jeder Stunde gleichviel macht, so ist:

$$\frac{37+x}{6.10}=\frac{37-x}{6.8\frac{1}{2}},$$

folglich $x=3$ *cbm*; daher macht er bei $8\frac{1}{2}$stündiger Arbeit wöchentlich $37-3=34$ *cbm*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Bei 10stündiger Arbeit täglich arbeitet er wöchentlich $6.10=60$ Stunden und bei $8\frac{1}{2}$stündiger Arbeit nur $6.8\frac{1}{2}=51$ Stunden. In jenem Falle macht er ebensoviel über 37, als er in diesem unter 37 *cbm* macht. Würde er also 1 Woche 60 und die andere 51 Stunden, also im ganzen $60+51=111$ Stunden arbeiten, so würde er in dieser Zeit gerade $37+37=74$ *cbm* machen, demnach in 1 Stunde $74:111=\frac{2}{3}$ *cbm*, folglich machte er in der Woche bei $8\frac{1}{2}$stündiger Arbeit $51.\frac{2}{3}=34$ *cbm*.

109. Er habe die 670 *Frc* nach x Monaten zu bezahlen, so muß er die 980 *Frc* nach $(x+4\frac{1}{2})$ Monaten bezahlen. Da er beide Summen bar mit $4\frac{4}{5}$ Prozent Diskonto fürs Jahr bezahlt, so beträgt derselbe für 1 Monat $4\frac{4}{5}:12=\frac{2}{5}$ pCt. und für x Monate $\frac{2}{5}x$ pCt.; mithin beträgt der Diskonto für die erste Summe $6{,}7\times0{,}4x=2{,}68x$ *Frc*. Für die zweite Summe beträgt der Diskonto in $(x+4\frac{1}{2})$ Monaten $\frac{2}{5}(x+4\frac{1}{2})=(0{,}4x+1{,}8)$ Prozent, also für die Summe von 980 *Frc* $9{,}8(0{,}4x+1{,}8)=(3{,}92x+17{,}64)$ *Frc*. Da er im ganzen $670+980=1650$ *Frc* zu bezahlen hat, er aber sogleich beide Summen mit 1594,41 *Frc* abträgt, so beträgt der sämtliche Diskonto $1650-1594{,}41=55{,}59$ *Frc*. Es ist daher:
$2{,}68x+3{,}92x+17{,}64=55{,}59$;
folglich $x=5{,}75=5\frac{3}{4}$ Monate.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der Diskonto von 980 *Frc* in $4\frac{1}{2}$ Monat zu $4\frac{4}{5}$ pCt. fürs Jahr beträgt 17,64 *Frc*, demnach haben die beiden Summen $670+980=1650$ *Frc* für die nämliche Zeit $55{,}59-17{,}64=37{,}95$ *Frc* Diskonto gegeben. Nun geben 1650 *Frc* in 1 Monat $16{,}5\times0{,}4=6{,}6$ *Frc* Diskonto; demnach haben sie 37,95 *Frc* in $37{,}95:6{,}6=5{,}75$ Monaten gegeben; folglich ist das erste Kapital nach $5\frac{3}{4}$ Monaten zu bezahlen.

110. Es seien x Prozent Rabatt auf Hundert n pCt. Rabatt in Hundert, so hat man nach dem Proportionssatze:

$$100:(100-n)=x:\frac{x(100-n)}{100};\text{ es ist daher;}$$

$$\frac{x(100-n)}{100}=n;\ x=\frac{100n}{100-n}\text{ pCt. Rabatt.}$$

Zweite Auflösung. $100-n$ geben n, 100 geben x folglich ist: $\frac{100}{100-n}=\frac{x}{n}$; folglich $x=\frac{100n}{100-n}$.

111. Es mögen x pCt. Rabatt in Hundert, n pCt. Rabatt auf Hundert sein, so hat man wieder:

$$100:(100+n)=x:\frac{x(100+n)}{100}; \text{ Es ist also:}$$

$$\frac{x(100+n)}{100}=n;\ x=\frac{100n}{100+n}\text{ pCt. Rabatt.}$$

Zweite Auflösung. 100+n geben n, 100 geben x; daher ist: $\frac{100+n}{100}=\frac{n}{x}$; folglich $x=\frac{100n}{100+n}$.

112. Wird beim ersten Fasse x pCt. Tara gerechnet, so betrug die Tara beim zweiten $(x-6\frac{7}{8})$ pCt. Das Brutto-Gewicht des Öles betrug demnach $\frac{536.100}{100-x}$ und das des Reises $\frac{580.100}{106\frac{7}{8}-x}$. Da die beiden Fässer von gleichem Brutto-Gewichte sind, so ist: $\frac{536.100}{100-x}=\frac{580.100}{106\frac{7}{8}-x}$; folglich $x=16\frac{1}{4}$ pCt.

Zweite Auflösung. Das Brutto-Gewicht jeder Ware betrage x *kg*. Wird nun das Netto-Gewicht des Reises berechnet, so erhält man die Gleichung

$$x-\frac{100(x-536)-6\frac{7}{8}x}{100}=580;$$

also x=640 *kg* Brutto. Demnach beträgt die Tara beim Öle $\frac{100(640-536)}{640}=16\frac{1}{4}$ pCt.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die Brutto-Gewichte der beiden Waren sind gleich, aber die Netto-Gewichte nicht. Das kommt daher, weil beim Öle $6\frac{7}{8}$ pCt. mehr an Tara gerechnet wurde, als beim Reis. Der Unterschied der Netto-Gewichte beträgt 580—536=44 *kg*; folglich betrug das Brutto-Gewicht einer jeden Ware $(44.100):6\frac{7}{8}=640$ *kg*. Da nun das Netto-Gewicht des Öles 536 *kg* beträgt, so beträgt die Tara 640—536=104 *kg*. Für 640 *kg* Brutto beträgt die Tara 104 *kg*, also für 1 *kg* $\frac{13}{80}$ *kg*; demnach für 100 *kg* auch $100.\frac{13}{80}=16\frac{1}{4}$ *kg*. Oder: Dadurch, daß beim Reis $6\frac{7}{8}$ pCt. weniger gerechnet wurde, betrug dessen Netto-Gewicht 44 *kg* mehr als das des Öles. Demgemäß wurde beim Reis an jedem einzelnen *kg* auch $6\frac{7}{8}:100=\frac{11}{160}$ *kg* weniger in Abzug gebracht, weshalb das Brutto-Gewicht einer jeden Ware $44:\frac{11}{160}=640$ *kg* beträgt u. s. w.

113. Der Diskonto sei zu x pCt. für den Monat gerechnet worden, so macht dies für 9 Monate 9x und für 15 Monate 15x pCt.

Im ersten Falle bezahlt er statt 100 *M* nur (100—9x) und im zweiten Falle nur (100—15x) *M*. Demnach betrug die erste Summe vor Abzug des Diskonto so oft mal 100 *M*, als (100—9x) in 1208 enthalten ist; dies gibt $\frac{1208.100}{100-9x}$ *M*; ebenso erhalten wir für die zweite Summe vor Abzug des Diskonto: $\frac{1160.100}{100-15x}$ *M*. Da nun die beiden zu bezahlenden Summen einander gleich sind, so ist: $\frac{1208.100}{100-9x}=\frac{1160.100}{100-15x}$; folglich $x=\frac{5}{8}$ pCt. für den Monat, also $12.\frac{5}{8}=7\frac{1}{2}$ pCt. fürs Jahr. Jede der beiden Summen ist demnach 120800: $(100-9.\frac{5}{8})=1280$ *M*.

Zweite Auflösung. Jede der beiden Summen sei x. Berechne, zu wie viel Prozent beide Summen diskontiert wurden, so erhält man die Gl.

$$\frac{400}{3}\left(\frac{x-1208}{x}\right)=\frac{400}{5}\left(\frac{x-1160}{x}\right)$$

x=1280 *M*, wobei der Diskonto zu

$$\frac{400}{3}\left(\frac{1280-1208}{1280}\right)=7\tfrac{1}{2}$$ pCt. berechnet wurde.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da man bei einem für zwei gleiche Summen gleichen Diskonto für die erste der beiden Summen 1208 *M*, und für die zweite 1160 *M* bar bezahlt, so bezahlt man von der letzteren 1208—1160 =48 *M* Diskonto mehr als von der ersten; dies kommt aber daher, weil man die zweite Summe 15—9=6 Monate später zu bezahlen verpflichtet war. Für diese 6 Monate betrug der Diskonto 48 *M*; also für 1 Monat 8 *M*; folglich betrug der Diskonto der ersten Summe 9.8=72 *M* und der zweiten 15.8=120 *M*. Jede der beiden Summen ist also =1208+72=1160+120=1280 *M*. Nun beträgt der Diskonto von 1280 *M* für 1 Jahr 12×8= 96 *M*; also beträgt er von 100 *M* (96.100):1280= $7\frac{1}{2}$ *M*; weshalb die beiden Summen mit $7\frac{1}{2}$ pCt. diskontiert wurden.

114. Jede Summe betrage x, so beträgt der Diskonto für m Jahre x—s, also für 1 Jahr $\frac{x-s}{m}$; daher wurde der Diskonto bei dieser Summe zu $\left(100\cdot\frac{x-s}{m}\right):x=100\cdot\frac{x-s}{mx}$ pCt. gerechnet. Auf dieselbe Weise findet man, daß der Diskonto bei der zweiten Summe zu $100\cdot\frac{x-s'}{nx}$ pCt. berechnet wurde. Da

der Diskonto bei beiden Summen derselbe ist, so haben wir $\frac{x-s}{m}=\frac{x-s'}{n}$, folglich $x=\frac{ns-ms'}{n-m}$.

Demnach beträgt der Diskonto $\left[100\left(\frac{ns-ms'}{n-m}-s\right)\right]:\left(m\cdot\frac{ns-ms'}{n-m}\right)=100\cdot\frac{s-s'}{ns-ms'}$ pCt.

115. Ein *hl* Öl habe x *M* im Einkaufe gekostet. Hieran sind bei 8 pCt. Gewinn $\frac{8x}{100}=\frac{2x}{25}$ *M* verdient; also verkauft er denselben zu $\left(x+\frac{2x}{25}\right)$ *M*. Da nun 1 *hl* im Verkaufe 108 *M* kostet, so ist: $x+\frac{2x}{25}=108$; folglich $x=100$ *M* Einkaufspreis. Wollte man 1 *hl* zu 96 *M* verkaufen, so würde man ihn $100-96=4$ *M* unter dem Einkaufspreise verkaufen, man würde also an 100 *M*. 4 *M* verlieren, was einen Verlust von 4 pCt. ausmacht.

Zweite Auflösung. Er gewinne oder verliere x pCt., wenn er 1 *hl* zu 96 *M* verkauft; in diesem Falle hat er für je $(100+x)$ *M* Einnahme 100 *M* Auslage; also für 96 *M* Einnahme $\frac{96.100}{100+x}$ *M* Auslage. Gewinnt er 8 pCt., wenn er 1 *hl* zu 108 *M* verkauft, so hat 1 *hl* ihm $108.\frac{100}{108}=100$ *M* gekostet; es ist daher: $\frac{96.100}{100+x}=100$; folglich $x=-4$, also 4 pCt. Verlust.

Dritte arithmetische Auflösung. Sind an 108 *M* 8 pCt. verdient, so hat er für jede 100 *M*, die er ausgegeben, 108 *M* eingenommen; folglich hat er für 108 *M*, die er eingenommen, nur $\frac{108}{108}\cdot 100=100$ *M* ausgegeben u. s. w.

116. Die Ware koste x, so hat er p—x gewonnen; mit x gewinnt er p—x, also mit 1 gewinnt er $\frac{p-x}{x}$, daher mit 100 auch $100\cdot\frac{p-x}{x}$, und weil dies n ausmacht, so ist: $100\cdot\frac{p-x}{x}=n$; folglich $x=\frac{100p}{100+n}$ Einkaufspreis. Verkauft man die Ware zu p', so würde man, je nachdem $p'>$ oder $<\frac{100p}{100+n}$ wäre, $\pm p'\mp\frac{100p}{100+n}$ gewinnen oder verlieren, was

$$\left[100\left(\pm p' \mp \frac{100n}{100+n}\right)\right] : \frac{100p}{100+n} = \frac{\pm p'(100+n) \mp 100p}{p} \text{ pCt.}$$

Gewinn oder Verlust ausmacht.

117. α) Er gewinne oder verliere x pCt., so hat man: $97\frac{1}{2}:(100+x)=117:124,5$; oder: $117(100+x)=97\frac{1}{2}\times124,5$; also $x=+3\frac{3}{4}$; daher sind $3\frac{3}{4}$ pCt. gewonnen.

Zweite Auflösung. Der Ballen koste im Einkaufspreise x *M*, so verliert er hieran $2\frac{1}{2}x:100=\frac{1}{40}x$ *M*; er verkauft ihn also zu $x-\frac{1}{40}x$ *M* und weil er den Ballen mit $2\frac{1}{2}$ pCt. Verlust zu 117 *M* verkauft, so ist: $x-\frac{1}{40}x=117$; folglich $x=120$ *M* Einkaufspreis. Verkauft er ihn zu $124\frac{1}{2}$ *M*, so verdient er an 120 *M* $4\frac{1}{2}$ *M*; also sind $(100.4\frac{1}{2}):120=3\frac{3}{4}$ pCt. gewonnen.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Wenn er $2\frac{1}{2}$ pCt. verliert, so heißt das: Für jede 100 *M*, die er ausgegeben, nimmt er nur $100-2\frac{1}{2}=97\frac{1}{2}$ *M* ein; also hat er für jede *M* Einnahme $100:97\frac{1}{2}=\frac{40}{39}$ *M* Auslage, daher für 117 *M* Einnahme $\frac{40}{39}\times117=120$ *M* Auslage. Das Übrige wie bei der zweiten Auflösung.

β) Der Einkaufspreis der Ware sei x, so ist:

$$x-\frac{n.x}{100}=p\text{; folglich } x=\frac{100p}{100-n}.$$

Beträgt nun der Preis der Ware p′, so sind, wenn $p'>\frac{100p}{100-n}$ ist, $\left(p'-\frac{100p}{100-n}\right)$ gewonnen; wenn aber $p'<\frac{100p}{100-n}$ ist, $\frac{100p}{100-n}-p'$ verloren; im ersten Falle hat man:

$$100\left(p'-\frac{100p}{100-n}\right):\frac{100p}{100-n}=\frac{p'(100-n)-100p}{p}\text{ pCt. Gewinn;}$$

im andern Falle

$$100\left(\frac{100p}{100-n}-p'\right):\frac{100p}{100-n}=\frac{100p-p'(100-n)}{p}\text{ pCt. Verlust.}$$

118. Die erste Majorität besteht aus der Minorität und der Differenz zwischen Majorität und Minorität, oder auch aus 300 und der halben Differenz. Die Majorität ist 300 nebst der halben Differenz und die Minorität 300 weniger der halben Differenz. Die Stimmendifferenz zwischen Majorität und Minorität wird überhaupt dadurch hervorgebracht, daß zu der einen Hälfte der Abstimmenden, hier zu 300, so viel Personen von der andern Hälfte, hier wieder von 300 gingen, als die Hälfte der Differenz zwischen Majorität und Minorität beträgt. Denn stimmten z. B. von den 300 Personen auf einer Seite 10 nicht mit, so würde die Majorität die Minorität um 10 Stimmen übertreffen; nun gehen diese 10 Personen aber

auf die andere Seite und stimmen dort, also kommen noch 10 zu den vorigen 10 Stimmen, um welche die Majorität schon größer war. Also die Differenz zwischen Majorität und Minorität ist immer dadurch entstanden, daß halb so viel Stimmen zu 300 kamen, als jene Differenz betrug. Gerade so viel als in der Majorität also zu 300 kam, fehlt in der Minorität an 300.

Gehen wir nun zur zweiten Majorität über. Diese ist aus der ersten Minorität, also aus 300 weniger der Hälfte der Differenz, entstanden und zwar dadurch, daß x Stimmen dazu kamen, von der ersten Majorität abfielen. Von den x Stimmen war eine Anzahl, gleich der Hälfte der ersten Differenz, nötig, um die frühere Minorität auf 300 zu bringen. Der Teil, der von x abging, ist also gleich der Hälfte der ersten Differenz. Nun traten die übrigen der x Personen noch zu diesen 300, und dadurch wurde eine Minorität und Majorität gebildet, deren Stimmendifferenz doppelt so groß war als die Stimmendifferenz bei der ersten Abstimmung.

Die obige erste Stimmendifferenz kam daher, daß eine Zahl von Personen gleich der halben Differenz zu 300 kam; die jetzige Stimmendifferenz kommt daher, daß zweimal so viel Personen zu 300 kommen, also zweimal die halbe erste Differenz; woraus folgt, daß x in 3 gleiche Teile geteilt ist: erster Teil gleich der halben ersten Differenz oder $\frac{1}{3}x$ ist in 300 enthalten, zwei Teile also gleich $\frac{2}{3}x$, jeder gleich der halben ersten Differenz ist zu 300 gekommen. Die zweite Majorität besteht also aus $300+\frac{2}{3}x$; die erste Majorität war 300 nebst der halben Differenz; da diese $=\frac{1}{3}x$ ist, so ist die erste Majorität $300+\frac{1}{3}x$. Da sich nun die zweite Majorität zur ersten verhält, wie 8:7, so ist:

$$(300+\tfrac{2}{3}):(300+\tfrac{1}{3}x)=8:7$$

$$7(300+\tfrac{2}{3}x)=8(300+\tfrac{1}{3}x);\text{ folglich } x=150.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die erste Majorität besteht aus einer Zahl, die der ersten Minorität nebst der Differenz zwischen Majorität und Minorität gleich ist, oder auch aus 300 nebst der halben ersten Differenz.

Die zweite Majorität besteht ebenfalls aus einer Zahl, die der zweiten Minorität nebst der Differenz zwischen der zweiten Majorität und der zweiten Minorität gleich ist, oder auch aus 300 nebst der halben zweiten Differenz. Die zweite Differenz ist aber nach der Aufgabe doppelt so groß, als die erste Differenz; folglich muß auch die halbe zweite Differenz doppelt so groß sein, als die halbe erste Differenz; d. h. in dem Ausdruck für die erste Majorität ist bei 300 ein Teil, wenn in der zweiten Majorität zwei Teile bei 300 sind. Die zweite Majorität unterscheidet sich also von der

ersten nur durch einen solchen Teil, den sie mehr bei 300 hat, d. h. durch einmal die halbe erste Differenz.

Da die erste Majorität 7 solcher Teile hat, wie die zweite 8, so muß die halbe erste Differenz, welche die zweite Majorität mehr hat, als die erste, ein solcher Teil sein, d. h. einer der sieben Teile der ersten oder einer der acht Teile der zweiten Majorität.

Nehme ich von 300 nebst der halben ersten Differenz diesen letztern weg, so bleibt noch sechsmal die halbe erste Differenz; demnach ist 300 sechsmal der halben ersten Differenz gleich; folglich beträgt die halbe erste Differenz $300:6=50$. Die erste Differenz zwischen der ersten Majorität und der ersten Minorität ist also $2.50=100$. Daher beträgt die erste Minorität: $\frac{1}{2}(600-100)=250$.

Die zweite Differenz ist doppelt so groß, wie die erste, also $2.100=200$; daher die zweite Majorität $\frac{1}{2}(600+200)$ $=400$ beträgt. Diese Majorität von 400 ist durch den Zutritt der Abgefallenen aus 250 entstanden; es sind also hinzugekommen oder von der Majorität abgefallen $400-250=150$.

119. Heinrich I. habe x Jahre regiert, so regierte Otto II., dessen Regierungszeit 7 Jahre weniger betrug, als die Heinrichs I., $x-7$ Jahre. Da Otto I. doppelt so lange, als Otto II. und dazu noch so lange als Heinrich I. regierte, so betrug dessen Regierungszeit $2(x-7)+x=3x-14$ Jahre. Wenn Otto I. noch 1 Jahr länger regiert hätte, so würde er doppelt so lange, als Otto III. regiert haben, folglich regierte Otto III. $\frac{1}{2}(3x-13)$ Jahre. Da endlich Heinrich II. 3 Jahre länger regierte, als Otto III., so regierte er $\frac{1}{2}(3x-13)+3=\frac{1}{2}(3x-7)$ Jahre. Nun starb Heinrich II. $2^{10}=1024$ n. Chr.; demgemäß kam

Heinrich II. zur Regierung um $1024-\frac{1}{2}(3x-7)=1027\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}x$,
Otto III. „ „ „ $1027\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(3x-13)=$
$1034-3x$,
Otto II. „ „ „ $1034-3x-(x-7)=1041-4x$,
Otto I. „ „ „ $1041-4x-(3x-14)=1055-7x$,
Heinrich. I. „ „ „ $1055-7x-x=1055-8x$.

Die Summe der Regierungsjahre aller 5 Kaiser beträgt $x+(x-7)+(3x-14)+\frac{1}{2}(3x-13)+\frac{1}{2}(3x-7)=8x-31$ J. Da nun sämtliche Regierungsjahre dem Produkte aus 4 auf einander folgenden ungeraden Zahlen gleich sind und diese Zahlen keine anderen sein können, als 1, 3, 5, 7, so ist $8x-31=1\times3\times5\times7$, woraus folgt, daß $x=17$; also

regierte Heinrich I. v. $1055-8x$ bis $1055-7x=$ v. 919 b. 936,
„ Otto I. „ $1055-7x$ „ $1041-4x=$ „ 936 „ 973,
„ Otto II. „ $1041-4x$ „ $1034-3x=$ „ 973 „ 983,
„ Otto III. „ $1034-3x$ „ $1027\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}x=$ „ 983 „ 1002,
„ Heinrich II. „ $1027\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}x$ bis 1024 $=$ „ 1002 „ 1024.

b) Bewegungsaufgaben (120—177).

§. 385b. 120. α) Treffen beide Boten nach x Tagen zusammen, so hat der erste von A nach M gehende Bote, der täglich $37\frac{1}{2}$ *km* macht, $37\frac{1}{2}x$, und der zweite, der täglich $52\frac{1}{2}$ *km* macht, $52\frac{1}{2}x$ *km* zurücklegt. Da der zweite aber den Weg $BA=90$ *km* mehr macht als der erste, so ist $37\frac{1}{2}x+90=52\frac{1}{2}x$; folglich $x=6$; also treffen sie nach 6 Tagen und zwar in einer Entfernung von $52\frac{1}{2}\times 6=315$ *km* von B zusammen.

β) Angenommen, sie träfen x *km* von A zusammen, so hat der von A ausgehende Bote diesen Weg in $\frac{x}{35\frac{5}{8}}$ Tagen und der von B ausgehende, der im ganzen $(x+56\frac{1}{4})$ *km* machen muß, denselben in $\frac{x+56\frac{1}{4}}{46\frac{7}{8}}$ Tagen abgemacht. Da sie nun beide gleich viel Tage bis zu ihrer Zusammenkunft gebrauchen, so ist $\frac{x}{35\frac{5}{8}}=\frac{x+56\frac{1}{4}}{46\frac{7}{8}}$; folglich $x=178\frac{1}{8}$ *km* von A, also $178\frac{1}{8}+56\frac{1}{4}=234\frac{3}{8}$ *km* von B und beide treffen in $178\frac{1}{8}:35\frac{5}{8}=5$ Tagen zusammen.

121. Die beiden Körper mögen nach x Zeiteinheiten zusammentreffen, so macht der eine von B ausgehende Körper in dieser Zeit cx und der andere von A nachfolgende Körper in dieser Zeit $c'x$ *m*. Da dieser nun auch die ursprüngliche Entfernung von d mehr macht, als jener, so ist $cx+d=c'x$; folglich $x=\frac{d}{c'-c}$. Nach diesen Zeiteinheiten wird der zweite nachfolgende Körper den ersten einholen und zwar in einem Abstande von $c'\cdot\frac{d}{c'-c}=\frac{c'd}{c'-c}$ *m* vom entfernteren Orte.

122. α) Sie mögen nach x Tagen zusammentreffen, so hat der eine $5\frac{1}{4}x$ und der andere $7\frac{3}{4}x$ Meilen gemacht; zusammen also $13x$ Meilen, und weil die Summe beider Wege der Entfernung beider Orte gleich ist, so ist $13x=78$; folglich $x=6$ Tage. Sie treffen also in einer Entfernung von $6.5\frac{1}{4}=31\frac{1}{2}$ M. vom Wohnorte des ersteren oder $7\frac{3}{4}.6=46\frac{1}{2}$ M. von demjenigen des letzteren zusammen.

A ———— D ———— B

Zweite Auflösung. Angenommen, beide träfen in D zusammen und der von A nach D Reisende gebrauche hierzu x Meilen, so gebraucht der von B nach D gehende $(78-x)$

Meilen; oder AD=x, so ist DB=(AB−AD)=(78−x) Meilen. Der erste macht die x Meilen in $\frac{x}{5\frac{1}{4}}$ Tagen und der zweite die (78−x) Meilen in $\left(\frac{78-x}{7\frac{3}{4}}\right)$ Tagen, und weil beide gleich viel Tage gebrauchen, so ist: $\frac{x}{5\frac{1}{4}}=\frac{78-x}{7\frac{3}{4}}$; folglich $x=31\frac{1}{2}$=AD; also DB=(AB−AD)=$(78-31\frac{1}{2})=46\frac{1}{2}$. Sie trafen demnach in $31\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}=6$ Tagen zusammen.

β) Arithmetische Auflösung. Legt der eine täglich $8\frac{3}{4}$ und der andere $9\frac{1}{2}$ Meilen zurück, so machen beide täglich $8\frac{3}{4}+9\frac{1}{2}=18\frac{1}{4}$ Meilen. Beim Zusammentreffen haben sie nun die Strecke von 73 Meilen abgemacht in $73:18\frac{1}{4}=4$ Tagen, in einer Entfernung von $4.8\frac{3}{4}=35$ Meilen vom Wohnorte des ersteren.

123. Sie treffen nach x Zeiteinheiten zusammen, so hat der eine cx und der andere c′x Raumeinheiten gemacht, zusammen also x(c+c′) und weil die Entfernung beider Orte=d ist, so erhält man: x(c+c′)=d; folglich $x=\frac{d}{c+c'}$.

124. Der zweite Kurier hole den ersten in x Stunden nach Abgang des ersten ein, so macht der erste, der alle Stunden $9\frac{3}{8}$ *km* zurückgelegt, $9\frac{3}{8}x$ *km*, der zweite, $1\frac{1}{2}$ Stunden später abgehende macht $12\frac{3}{16}(x-1\frac{1}{2})$ *km*. Da sie zur Zurücklegung des Weges gleich viel *km* machen, so ist $9\frac{3}{8}x=12\frac{3}{16}(x-1\frac{1}{2})$, folglich $x=6\frac{1}{2}$ Stunden. Der zweite Kurier holt den ersten ein in einer Entfernung von $6\frac{1}{2}\times9\frac{3}{8}=60\frac{15}{16}$ *km*.

125. A sei von B x *km* entfernt. Der Eilwagen macht in jeder Stunde 9 *km*, er legt also den Weg von A nach B in $\frac{x}{9}$ *km* zurück. Um 2 Uhr 20 Min. oder $8\frac{1}{3}$ Stunde später fährt der Dampfwagen von B nach A und legt alle Stunden 45 *km* zurück, braucht also zu dem Wege $\frac{x}{45}$ Stunden. Da nun beide zu derselben Zeit ankommen, so hat der Dampfwagen $8\frac{1}{3}$ Stunden weniger gebraucht, als der Eilwagen. Es ist also $\frac{x}{9}=\frac{x}{45}-8\frac{1}{3}$, woraus $x=93\frac{3}{4}$ *km*.

126. Nach x Zeiteinheiten mögen beide Körper nach Abgang des zweiten zusammentreffen. Der erste Körper, der in jeder Zeiteinheit c Raumeinheiten macht, legt, da der zweite sich n Zeiteinheiten später zu bewegen anfängt, im ganzen c(x+n) Raumeinheiten zurück, während der zweite c′x Raumeinheiten macht. Es ist daher

$c(x+n)=c'x$; folglich $x=\frac{nc}{c'-c}$ Zeiteinheiten.

127. Beide Fußgänger mögen sich x Stunden nach Abgang des zweiten begegnen. Der erstere, $2\frac{1}{2}$ Stunden früher abgehende, gebraucht bis zum Zusammentreffen $(x+2\frac{1}{2})$ Stunden $=30(2x+5)$ Minuten. Da er alle 3 Minuten 182 *m* abmacht, so legt er in $30(2x+5)$ Minuten $10.(2x+5).182=1820(2x+5)$ *m* zurück; indes macht der andere in x Stunden $=60x$ Minuten, da er in jeder Minute 56 *m* zurücklegt, $56.60x=3360x$ *m*. Beim Zusammentreffen haben beide einen Weg von $52\frac{1}{2}$ *km* $=52500$ *m* gemacht; daher ist: $1820(2x+5)+3360x=52500$; $x=6\frac{1}{5}$ Stunden $=6$ St. 12 Min. nach Abgang des zweiten treffen sie zusammen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der erste macht in 1 Min. $182:3=60\frac{2}{3}$ *m*, also in $2\frac{1}{2}$ St. $=150$ Minuten, die er vor dem anderen voraus hatte, auch $150\times60\frac{2}{3}=9100$ *m*. Nachdem der zweite sich auf den Weg begiebt, haben beide einen Weg von $52\frac{1}{2}\times1000-9100=43400$ *m* zu machen. Beide legen zusammen in 1 Min. $60\frac{2}{3}+56=116\frac{2}{3}$ *m* zurück; folglich werden beide zu gleicher Zeit so oft mal eine Minute zu den 43400 *m* gebrauchen, als $116\frac{2}{3}$ *m* in 43400 *m* enthalten ist; d. i. 372.1 Min. $=6$ Stunden 12 Min. nach Abgang des zweiten oder nach 6 St. 12 Min. $+2$ St. 30 Min. $=8$ St. 42 Min. nach Abgang des ersten treffen sie zusammen.

128. Beide Körper mögen in x Zeiteinheiten nach Abgang des zweiten zusammentreffen, so hat der erste $c(x+n)$ und der zweite $c'x$ Raumeinheiten zurückgelegt. Da die Entfernung beider Körper d Raumeinheiten beträgt, so ist

$$c(x+n)+c'x=d;\ \text{folglich}\ x=(d-nc):(c+c').$$

129. Der erste Bote lege täglich x *km* zurück. Dieser machte in $(5+8)=13$ Tagen also $13x$ *km*; der andere, der täglich $18\frac{3}{4}$ *km* mehr machen muß, um den ersten in 8 Tagen einzuholen, legt in diesen 8 Tagen $8(x+18\frac{3}{4})$ *km* zurück. Es ist daher $13x=8(x+18\frac{3}{4})$, woraus $x=30$ *km*.

130. Das nachgeschickte Corps müsse täglich x *km* machen, also in 6 Tagen 6x *km*. Das erste hat in $(2+6)=8$ Tagen $8\times33\frac{3}{4}=270$ *km* gemacht; daher ist

$$6x=270,\ \text{folglich}\ x=45\ km.$$

131. Beide Kuriere treffen in x Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen. Der erste braucht 3 Stunden mehr als der zweite, also braucht er $(x+3)$ Stunden, indes der andere nur x Stunden geht. Nun verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie 5:7, d. h. in der nämlichen Zeit, in welcher der erste 5 Meilen macht, macht der zweite 7 Meilen; folg-

lich hat der erste in (x+3) Stunden 5(x+3) Meilen und der zweite in x Stunden 7 Meilen beim Zusammentreffen zurückgelegt, und da beide denselben Weg abgemacht haben, so ist $7x=5(x+3)$; folglich $x=7\frac{1}{2}$ Stunden.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Während der erste Kurier in 1 Stunde 1 Meile macht, legt der zweite in 1 Stunde $1\frac{2}{5}$ M. zurück; dieser gewinnt jenem also bei jeder Meile $\frac{2}{5}$ M. ab. Er muß ihm $3\times1=3$ M. abgewinnen, was demnach in $3:\frac{2}{5}=7\frac{1}{2}$ Stunden der Fall sein wird.

132. Sie mögen nach x Zeiteinheiten zusammentreffen, alsdann war der erste (x+t) Zeiteinheiten auf dem Wege. Es ist daher $m(x+t)=nx$; folglich $x=mt:(n-m)$ Zeiteinheiten.

133. Der Reiter hole den Fußgänger in x Stunden ein. Der Fußgänger macht alle 7 Stunden 30 *km*, also in x Stunden $\frac{30x}{7}$ *km*, und der Reiter alle 3 Stunden 30 *km*, in x Stunden $\frac{30x}{3}$ *km*. Durch seine größere Geschwindigkeit gewinnt der Reiter dem Fußgänger die 60 *km*, die jener mehr zu machen hat, ab; daher ist: $\frac{30x}{7}+60=\frac{30x}{3}$; folglich $x=10\frac{1}{2}$ Stunden; daher wird der Reiter, da überdies noch $1\frac{1}{2}$ Stunde zur Ruhezeit verwendet wurde, den Fußgänger nach $10\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=12$ Stunden einholen.

134. Der zweite Körper hole den ersten in x Minuten ein, so macht der erste $\frac{(x\pm t)m}{a}$ und der zweite $\frac{nx}{b}\mp d$ *m*. Es ist daher

$$\frac{(x\pm t)m}{a}=\frac{nx}{b}\mp d, \text{ folglich } x=\frac{b(\pm mt\pm ad)}{an-bm}.$$

135. Nach x Stunden mögen die Mittelpunkte beider Scheiben zusammenfallen und möge ferner die Finsternis angefangen und geendet haben, so hat die Sonne $\frac{x}{12}$ und der Mond $\frac{17x}{16}$ Mondbreiten gemacht. Beide Scheiben stehen nun um 9 Uhr 13 Minuten vormittags noch $5\frac{7}{8}$ Mondbreiten von einander, die der Mond durch die größere Geschwindigkeit seines Laufes der Sonne abgewinnt. Es ist daher

$$\frac{x}{12}+5\tfrac{7}{8}=\frac{17x}{16}; \text{ folglich } x=6 \text{ Stunden.}$$

Also nach 6 Stunden oder 3 Uhr 13 Minuten nachmittags war die totale Finsternis.

Wenn die Mittelpunkte der Scheiben der Sonne und des Mondes um 9 Uhr 13 Minuten noch $5\frac{7}{8}$ Mondbreiten

von einander stehen, so müssen um dieselbe Zeit ihre Scheiben bis zur Berührung ihrer Ränder, also bis zum Anfange der Finsternis um 1 Mondbreite weniger als $5\frac{7}{8}$ und beim Ende der Finsternis um 1 Mondbreite mehr als $5\frac{7}{8}$ von einander stehen. Daher ist

$$\frac{x}{12}+4\tfrac{7}{8}=\frac{17x}{16};\ \text{folglich } x=4\tfrac{46}{47} \text{ Stunden.}$$

Die Finsternis fing also um 2 Uhr $11\frac{34}{47}$ Minuten an.
Endlich hat man:

$$\frac{x}{12}+6\tfrac{7}{8}=\frac{17x}{16};\ \text{folglich } x=7\tfrac{1}{47} \text{ Stunden.}$$

Die Finsternis hörte $7\frac{1}{47}$ Stunden nach 9 Uhr 13 Minuten auf, also um 4 Uhr $14\frac{13}{47}$ Minuten.

136. α) Der Weg von A nach B werde von beiden Boten zusammen in x Stunden zurückgelegt, so macht der erste in 1 Stunde $\frac{1}{6\frac{1}{4}}=\frac{4}{25}$ des Weges, also in x Stunden $\frac{4}{25}x$ des Weges und der zweite in 1 Stunde $\frac{1}{9\frac{3}{8}}=\frac{8}{75}$ des Weges, also in x Stunden $\frac{8}{75}x$ des Weges, zusammen machen sie in x Stunden $(\frac{4}{25}x+\frac{8}{75}x)=\frac{4}{15}x$ des Weges, und weil sie dann den ganzen Weg zusammen abgemacht haben, so ist $\frac{4}{15}x=1$; folglich $x=3\frac{3}{4}$ Stunden.

Arithmetische Auflösung zu β). Legt der erstere den Weg in 12 und der zweite in 15 Stunden zurück, so macht jener in 1 Stunde $\frac{1}{12}$ des Weges und dieser $\frac{1}{15}$ des Weges; also legen sie beide in 1 Stunde $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{9}{60}$ des Weges zurück; demnach wird das Zusammentreffen nach $1:\frac{9}{60}=6\frac{2}{3}$ Stunden stattfinden, wo beide den ganzen Weg zusammen abgemacht haben.

137. Setzt man statt $6\frac{1}{4}$ und $9\frac{3}{8}$ die allgemeinen Zahlzeichen m und n, so ist

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=1;\ \text{folglich } x=\frac{mn}{m+n}.$$

138. Wenn der Eilwagen um 6 Uhr abends in B ankommt, so hat er nach halb 10 Uhr noch $8\frac{1}{2}$ Stunden gebraucht. Er hat aber eine halbe Stunde zum Ausruhen verwendet; mithin hat er zur Zurücklegung des Weges 8 Stunden, im ganzen also $(8+1\frac{1}{2})=9\frac{1}{2}$ Stunden gebraucht. Während der Eilwagen also 8 Stunden machen muß, macht der Dampfwagen denselben Weg in $1\frac{1}{2}$ Stunde. Ihre Geschwindigkeiten verhalten sich demnach wie 16:3. Der Dampfwagen brauche nun x Stunden, um von B nach A zu fahren, so muß der Eilwagen $5\frac{1}{3}x$ Stunden fahren, um denselben Weg zu machen. Er legt diesen Weg aber in $9\frac{1}{2}$ Stunden zurück;

es ist also: $5\frac{1}{3}x=9\frac{1}{2}$; folglich $x=1\frac{25}{32}$ Stunde $=1$ Stunde $46\frac{7}{8}$ Minuten. Mithin kommt der Dampfwagen um $(8+1\frac{25}{32})$ $=9\frac{25}{32}=9$ Uhr $46\frac{7}{8}$ Min. in A an.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Nach der ersten Auflösung verhalten sich die Geschwindigkeiten der beiden Wagen wie $16:3$ oder wie $1:\frac{3}{16}$. Während also der Eilwagen 1 Stunde gebraucht, hat der Dampfwagen nur $\frac{3}{16}$ Stunde nötig; folglich braucht der Dampfwagen in den $9\frac{1}{2}$ Stunden, die der Eilwagen zur Zurücklegung des Weges von A nach B nötig hatte, nur $9\frac{1}{2}\times\frac{3}{16}=1\frac{25}{32}$ Stunden u. s. w.

139. Der erste Bote macht den Weg von A nach B in $1\frac{1}{4}$ Stunden, dagegen macht der zweite in derselben Zeit nur $\frac{3}{4}$ der Länge des Weges, also verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie $4:3$. Der erste hole nun den zweiten in x Stunden ein, so gebraucht der zweite nur $\frac{3}{4}x$ Stunden. Beim Zusammentreffen der beiden Boten hat der erste Bote zur Zurücklegung des Weges von A nach B $=1\frac{1}{4}$ Stunden mehr gemacht, als der zweite; es ist daher

$$x=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4};\text{ folglich } x=5 \text{ Stunden.}$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Beim Zusammentreffen hat der erste Bote $1\frac{1}{4}$ Std. $=\frac{5}{4}$ Std. mehr gemacht als der zweite. Da sich ihre Geschwindigkeiten wie $4:3$ oder wie $1:\frac{3}{4}$ verhalten, so gewinnt der eine dem andern in jeder Stunde $\frac{1}{4}$ Std. ab; da nun $\frac{5}{4}$ Std. abzugewinnen sind, so kommen sie nach $\frac{5}{4}:\frac{1}{4}=5$ Std. zusammen.

140. Nach den bei der vorhergehenden Auflösung angestellten Betrachtungen hat man, wenn $1\frac{1}{4}=p$, $\frac{3}{4}=q$:

$$x=qx+p;\text{ folglich } x=p:(1-q).$$

141. Das von Köln abfahrende Schiff gebraucht von 6 Uhr morgens bis 6 Uhr abends 12 Std., und das von Koblenz abfahrende von 12 Uhr mittags bis 5 Uhr abends zur Zurücklegung desselben Weges 5 Std. In 12 Std. macht ersteres $93\frac{3}{4}$ *km*, also in 1 Std. $\frac{93\frac{3}{4}}{12}=7\frac{13}{16}$ *km* und das zweite in 1 Std. $\frac{93\frac{3}{4}}{5}=18\frac{3}{4}$ *km*. Wenn sie sich nun x Std. nach Abgang des ersten begegnen, so hat das eine in dieser Zeit $7\frac{13}{16}x$ *km* und das andere, welches $(12-6)=6$ Std. später abfährt, in $(x-6)$ Std. $18\frac{3}{4}(x-6)$ *km* gemacht. Beim Zusammentreffen haben sie den ganzen Weg gemacht, also ist $7\frac{13}{16}x+18\frac{3}{4}(x-6)=93\frac{3}{4}$, folglich $x=7$ Std. $45\frac{15}{17}$ Min., mithin begegnen sie sich um 1 Uhr $45\frac{15}{17}$ Min. und zwar in einer Entfernung von

$$93\frac{3}{4}\times 7 \text{ Std. } 45\frac{15}{17} \text{ Min.}=60\frac{45}{68}\ km \text{ von Köln.}$$

142. Nach x Minuten möge ihre wechselseitige Entfernung 15 m betragen, so hat der erste Körper $\frac{5}{6}$x und der zweite $\frac{7}{8}$x m gemacht. Es ist daher: $\frac{7}{8}x-\frac{5}{6}x=18-15$; folglich $x=72$ Minuten=1 Stunde 12 Minuten vor ihrem Zusammentreffen oder $\frac{7}{8}x-\frac{5}{6}x=18+15$; folglich $x=792$ Minuten= 13 Stunden 12 Minuten nach ihrem Zusammentreffen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Legt der eine Körper in 6 Min. 5 m und der andere in 8 Min. 7 m zurück, so legt der eine $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=\frac{1}{24}$ m in jeder Minute mehr zurück. Betrug ihre anfängliche Entfernung 18 m und ihre jetzige 15, so haben sie sich um $18-15=3$ m genähert, wozu sie $3:\frac{1}{24}=72$ Minuten Zeit gebrauchten.

143. Nach x Sekunden sei ihre Entfernung l, so hat der erste cx und der zweite c′x Fuß zurückgelegt. Es ist daher

$$c'x-cx=d\mp l;$$

folglich $x=\frac{d-l}{c'-c}$ vor und $\frac{d+l}{c'-c}$ Sekunden nach ihrem Zusammenstoßen.

144. Nach x Minuten mögen beide Körper noch 39 m von einander sein, oder was dasselbe ist, mögen sie 243 ∓ 39 m zurückgelegt haben, so hat der erste in dieser Zeit 5x m und der andere 7x m, zusammen also 12x m gemacht. Es ist daher: $12x=243\mp39$; folglich $x=17$ Minuten und $23\frac{1}{2}$ Minuten.

145. Setzt man statt 243, 5, 7, 39 die allgemeinen Zeichen d, c, c′ und l, so hat man:

$$(c+c')x=d\mp l;\ \text{folglich}\ x=\frac{d\mp l}{c+c'}.$$

146. Sollen die Körper nicht gegen einander, sondern von einander laufen, so wird ihre wechselseitige Entfernung dadurch immer größer. Nimmt man an, daß in diesem Falle ihre Entfernung nach x Minuten l m betragen haben soll, so ist

$$cx+c'x=l-d;\ \text{folglich}\ x=\frac{l-d}{c+c'}.$$

147. Würden beide Körper immer gleichförmig sich bewegen, so würden sie stets eine Entfernung von $AB=x$ m haben. Da der eine in jeder Minute n m mehr zurücklegt, als der andere, so hat er in t Minuten tn m mehr zurückgelegt, und dadurch haben beide Körper eine Entfernung von l m erhalten. Da sie anfänglich x m von einander entfernt waren, so sind sie jetzt $x\mp l$ m entfernt, je nachdem sie entweder bereits zusammen getroffen sind oder nicht. Diese Entfernung haben sie dadurch erhalten, daß der eine tn m mehr gemacht hat, also ist:

$$x\mp l=tn;\ \text{also}\ x=tn\pm l=AB.$$

Waren sie nach x Minuten zusammen, so hatte der eine den ganzen Weg von $tn \pm l$ *m* zurückgelegt. Der eine legt nun in jeder Minute n *m* mehr zurück, als der andere, also in x Minuten xn *m* mehr. Durch diese xn *m* hatte er einen Vorsprung vor dem andern von $tn \pm l$, also ist

$$xn = tn \pm l;\ \text{folglich}\ x = t \pm \frac{l}{n}.$$

148. Das Dampfschiff gebrauche von M bis N x Stunden, so macht es in dieser Zeit $2\frac{1}{3}$ x Meilen; das Segelschiff hat vor der Abfahrt des Dampfschiffes schon $3\frac{1}{3}$ Meilen zurückgelegt, wozu es $\frac{3\frac{1}{3} \times 3}{2} = 5$ Stunden gebrauchte, und da es auch 5 Stunden später ankam, so hat es im ganzen $(5+5)=10$ Stunden mehr gebraucht, als das Dampfschiff; es fährt also $(x+10)$ Stunden, worin es $\frac{2}{3}(x+10)$ Meilen zurücklegt. Es ist also $2\frac{1}{3}x = \frac{2}{3}(x+10)$, folglich $x=4$ Stunden. Demnach ist M von N um $\frac{7 \cdot 4}{3} = 9\frac{1}{3}$ Meilen entfernt.

Zweite Auflösung. M sei von N x Meilen entfernt, so macht das Dampfschiff diesen Weg in $\frac{3}{7}x$ Stunden, und das Segelschiff in $1\frac{1}{2}x$ Stunden. Dieses letztere hat aber schon $3\frac{1}{3}$ Meilen vor der Abfahrt des ersteren gemacht, und hierzu $\frac{3\frac{1}{3} \cdot 3}{2} = 5$ Stunden gebraucht. Es kommt ebenso 5 Std. später an; also hat es im ganzen 10 Std. mehr gebraucht, als das Dampfschiff. Es ist daher $\frac{3}{7}x + 10 = 1\frac{1}{2}x$; folglich $x = 9\frac{1}{3}$ Meilen ist M von N entfernt; und das Dampfschiff gebrauchte $\frac{3 \cdot 9\frac{1}{3}}{7} = 4$ Stunden.

Dritte Auflösung. Das Segelschiff brauchte x Stunden, um die Fahrt von M nach N zu machen, so legt es $\frac{2}{3}x$ Meilen zurück. Das Dampfschiff gebraucht aber nach der zweiten Auflösung 10 Stunden weniger als das Segelschiff, also nur $(x-10)$ Stunden, worin es $\frac{7}{3}(x-10)$ Meilen abmacht. Es ist demnach: $\frac{7}{3}(x-10) = \frac{2}{3}x$; folglich $x=14$ Stunden gebraucht das Segelschiff, also $(14-10)=4$ das Dampfschiff, und M ist von N $\frac{2}{3} \cdot 14 = 9\frac{1}{3}$ Meilen entfernt.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Das Segelschiff, das vor der Abfahrt des Dampfschiffes schon $3\frac{1}{3}$ Meilen zurückgelegt, hat hierzu 5 Stunden gebraucht, und da es auch 5 Stunden später ankommt, als das Dampfschiff, so ist es im ganzen 10 Stunden länger unterwegs gewesen, als jenes; in dieser Zeit machte es $2 \times 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}$ Meilen. Diese $6\frac{2}{3}$ M. gewinnt ihm das Dampfschiff ab; dasselbe

gewinnt ihm in 1 Stunde $\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ Meilen ab; um ihm nun die $6\frac{2}{3}$ Meilen abzugewinnen, gebraucht es $6\frac{2}{3}:\frac{5}{3}=20:5=4$ Stunden, in welcher Zeit es also den Weg von M nach N abmachte, der sonach $4\times2\frac{1}{3}=9\frac{1}{3}$ Meilen betrug.

Fünfte (arithmetische) Auflösung. Das Dampfschiff legt 1 Meile in $\frac{3}{7}$ Stunden, und das Segelschiff in $\frac{3}{2}$ Stunden 1 Meile zurück, also gebraucht dieses zur Zurücklegung von 1 Meile $\frac{3}{2}-\frac{3}{7}=\frac{15}{14}$ Stunden mehr, als jenes. Es hat im ganzen 10 Stunden mehr gebraucht; in dieser Zeit legte es $10:\frac{15}{14}=9\frac{1}{3}$ Meilen zurück = der Entfernung von M nach N.

149. Der Fußgänger möge x Stunden nach Abgang des Reiters doppelt so viel Weg zurückgelegt haben, als der Reiter, so hat ersterer, der $5\frac{3}{4}$ Stunden früher abgeht, im ganzen gemacht $(x+5\frac{3}{4})$ Stunden, in denen er $\frac{3}{7}(x+5\frac{3}{4})$ und der Reiter $\frac{6}{5}x$ Meilen gemacht. Es ist daher:

$\frac{3}{7}(x+5\frac{3}{4})=\frac{1}{5}(2.6.x)$; folglich $x=1\frac{1}{4}$ Stunde.

Zweite Auflösung. Der Fußgänger habe x Stunden nach seiner Abreise den doppelten Weg des Reiters abgemacht, so hat er $\frac{3}{7}x$ und der Reiter $\frac{6}{5}(x-5\frac{3}{4})$ Meilen gemacht. Da nun die Meilenzahl, die der Fußgänger gemacht, doppelt so viel beträgt, als die des Reiters, so ist $\frac{3}{7}x=\frac{12}{5}(x-5\frac{3}{4})$; folglich $x=7$ Stunden nach seiner Abreise, und daher $(7-5\frac{3}{4})=1\frac{1}{4}$ Stunde nach Abreise des Reiters.

Ferner habe der Reiter x Stunden nach seinem Abgange doppelt so viel Weg gemacht, als der Fußgänger, so hat er $\frac{6}{5}x$ und der andere $\frac{3}{7}(x+5\frac{3}{4})$ Meilen zurückgelegt. Es ist daher: $\frac{6}{5}x=\frac{6}{7}(x+5\frac{3}{4})$; folglich $x=14\frac{3}{8}$ Stunden.

Nimmt man an, der Reiter habe x Stunden nach der Abreise des Fußgängers den doppelten Weg dieses letzteren gemacht, so ist $2.\frac{3}{7}x=\frac{6}{5}(x-5\frac{3}{4})$; folglich $x=20\frac{1}{8}$ Stunden nach Abreise des Fußgängers und $(20\frac{1}{8}-5\frac{3}{4})=14\frac{3}{8}$ Stunden nach Abreise des Reiters.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Der Reiter macht in 5 Stunden 6 Meilen oder in $\frac{5}{4}$ Stunde $\frac{6}{4}$ Meile. Ist der Reiter also $1\frac{1}{4}$ Stunde unterwegs, so hat er $1\frac{1}{2}$ Meile gemacht. Da nun der Fußgänger zur Zurücklegung des doppelten Weges des Reiters, also zu $2.1\frac{1}{2}=3$ Meilen 7 Stunden gebraucht und er schon $5\frac{3}{4}$ Stunde eher abgegangen war, als der Reiter, so hatte der Fußgänger $1\frac{1}{4}$ Stunde nach Abgang des Reiters bereits den doppelten Weg des letzteren zurückgelegt.

150. Die Entfernung der Orte C und D betrage x Meilen, so gebrauchte das Dampfschiff auf seiner Hinreise, da es stündlich $2\frac{1}{3}$ Meilen macht, mit dem Aufenthalt $\left(\frac{x}{2\frac{1}{3}}+1\frac{1}{2}\right)$ Stunden

und auf seiner Rückreise, da es gegen den Strom nur mit halber Geschwindigkeit, also stündlich nur $2\frac{1}{3}:2=1\frac{1}{6}$ Meile fahren konnte, $\frac{x}{1\frac{1}{6}}$ Stunden; im ganzen gebrauchte es auf der Hin- und Herreise also $\left(\frac{x}{2\frac{1}{3}}+\frac{x}{1\frac{1}{6}}+1\frac{1}{2}\right)$ Stunden. Das Segelschiff aber, das vor Abfahrt des Dampfschiffes schon $\frac{1}{2}$ Meile gemacht hatte, gebrauchte, stündlich nur $\frac{2}{3}$ Meile zurücklegend, $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$ Stunden. Da sie nun gleichviel Zeit unterwegs sind, so ist $\frac{x}{2\frac{1}{3}}+\frac{x}{1\frac{1}{6}}+1\frac{1}{2}=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$; folglich $x=10\frac{1}{2}$ Meilen.

Zweite Auflösung. Das Dampfschiff brauche x Stunden, um die Reise nach D zu machen, so hat es in dieser Zeit $2\frac{1}{3}x$ Meilen = der Entfernung der Orte C und D abgemacht. Da es gegen den Strom nur mit halber Geschwindigkeit fahren konnte, so hatte es zur Rückreise doppelt so viel Zeit, also 2x Stunden, im ganzen also $(x+2x)=3x$ St. + $1\frac{1}{2}$ St. Aufenthalt gebraucht. Ehe das Dampfschiff abfuhr, hatte das Segelschiff schon $\frac{1}{2}$ Meile gemacht, hatte also noch $(2\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})$ M. des Weges abzumachen. Da es stündlich $\frac{2}{3}$ M. gebraucht, so hat es diesen Weg in $\frac{3}{2}(2\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})$ Stunden zurückgelegt. Es ist also: $\frac{3}{2}(2\frac{1}{3}x-\frac{1}{2})=3x+1\frac{1}{2}$; folglich $x=4\frac{1}{2}$ Stunden, in welcher Zeit es $4\frac{1}{2}.2\frac{1}{3}=10\frac{1}{2}$ Meilen machte = der Entfernung des Ortes C von D.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da das Segelschiff $\frac{1}{2}$ Meile zurückgelegt hat, ehe das Dampfschiff abfuhr, so war ersteres $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ Std. früher abgefahren, als letzteres. Ueberdies hielt sich das Dampfschiff $1\frac{1}{2}$ Std. in D auf, während welcher Zeit das Segelschiff seinen Weg fortsetzte; demnach hat das Segelschiff im ganzen zur Zurücklegung des Weges von C nach D $\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}$ Std. mehr gebraucht. Wäre nun das Dampfschiff, statt in D umzukehren, nach der $1\frac{1}{2}$stündigen Rast immer stromabwärts gefahren, so hätte es zu der Zeit, wo das Segelschiff in D ankam, das Dreifache des Weges von C nach D abgemacht. Somit ist der Unterschied der Zeit, die beide Schiffe zur Zurücklegung ihrer resp. Strecken gebrauchen = $2\frac{1}{2}$ Std., und der Unterschied des Weges = $\frac{1}{3}$. Nun macht das Dampfschiff in 3 Std. 7 Meilen und das Segelschiff in 3 Std. 2 M.; folglich macht dieses in $1\frac{1}{6}.3=3\frac{1}{2}$ Std. $1\frac{1}{6}.2=2\frac{1}{3}$ M. $=\frac{1}{3}.7$ M. Dann ist aber der Unterschied der Zeit nur $\frac{1}{2}$ Std.; er soll aber $2\frac{1}{4}$, also $4\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$ Std. sein; also macht das Dampfschiff in $4\frac{1}{2}.3=13\frac{1}{2}$ St. $4\frac{1}{2}.7=31\frac{1}{2}$ M. und das Segelschiff in $4\frac{1}{2}.3\frac{1}{2}=15\frac{3}{4}$ Std. $4\frac{1}{2}.2\frac{1}{3}=10\frac{1}{2}$ M. $=\frac{1}{3}.31\frac{1}{2}$; folglich ist C $10\frac{1}{2}$ M. von D entfernt.

151. Das zweite Dampfschiff habe x St. gebraucht, um von M bis zum ersten Dampfschiffe zu gelangen, so hat dasselbe, da es alle 3 Std. $8\frac{1}{2}$ Meilen macht, $2\frac{5}{6}x$ M. zurückgelegt, das erste dagegen, welches alle 4 Stunden 5 Meilen macht, $\frac{5}{4}(x+1)$. Da nun das zweite einen doppelt so großen Weg gemacht, als das erste, so ist: $2\frac{5}{6}x=\frac{5}{2}(x+1)$; folglich $x=7\frac{1}{2}$ Stunden. Die Entfernung des Ortes C von M ist daher

$$2\frac{5}{6}.7\frac{1}{2}+\frac{5}{4}(7\frac{1}{2}+1)=31\frac{7}{8} \text{ Meilen.}$$

Zweite Auflösung. C sei von M x Meilen entfernt. Da das aus M fahrende Schiff beim Zusammentreffen einen doppelt so großen Weg, also $\frac{2}{3}$ des Weges, oder $\frac{2}{3}x$ Meilen gemacht hat, so hat das erste nur $\frac{1}{3}$ des Weges, oder $\frac{1}{3}x$ Meilen zurückgelegt. Dazu hat dieses $\frac{4}{5}.\frac{1}{3}x=\frac{4}{15}x$ Stunden, und jenes $\frac{3}{8\frac{1}{2}}\times\frac{2}{3}x=\frac{4}{17}x$ Stunden gebraucht. Da ersteres eine Stunde länger unterwegs ist, als letzteres, so ist also:

$$\frac{4}{15}x=\frac{4}{17}x+1; \text{ folglich } x=31\frac{7}{8} \text{ Meilen.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Das stromaufwärtsfahrende Schiff ist beim Zusammentreffen mit dem stromabwärtsfahrenden 1 Stunde länger unterwegs, hat aber nur die Hälfte des Weges des andern abgemacht. Jenes macht alle 4 Std. 5 Meilen, dieses alle 3 St. $8\frac{1}{2}$ M. Damit dieses also das Doppelte des Weges von jenem gemacht habe, muß es in $1\frac{3}{17}.3=3\frac{9}{17}$ St. $1\frac{3}{17}.8\frac{1}{2}=10$ Meilen gemacht haben. In diesem Falle aber ist der Unterschied der Zeit nur $\frac{8}{17}$, und nicht eine Stunde$=2\frac{1}{8}.\frac{8}{17}$; folglich hat das eine Schiff beim Zusammentreffen mit dem andern in $2\frac{1}{8}.4=8\frac{1}{2}$ Std. $2\frac{1}{8}.5=10\frac{5}{8}$ Meilen, und das andere in $2\frac{1}{8}.3\frac{9}{17}=7\frac{1}{2}$ Std. $2\frac{1}{8}.10=21\frac{1}{4}$ M. gemacht. C ist also $10\frac{5}{8}+21\frac{1}{4}=31\frac{7}{8}$ Meilen von M entfernt.

152. Die Entfernung beider Orte sei x engl. Meilen, so macht der Wagen diesen Weg in $\frac{1}{32}x$ Stunden. Wegen Verschiedenheit der Ortsuhren gewinnt er bei je 10 Meilen 1 Min. an Zeit, bei je 600 Meilen also 1 Stunde an Zeit; folglich gebraucht er nur $(\frac{1}{32}x-\frac{1}{600}x)$ Stunden. Da er nun zur Zurücklegung des Weges $7\frac{1}{10}$ Stunden gebraucht, so ist:

$$\frac{1}{32}x-\frac{1}{600}x=7\frac{1}{10}; \text{ folglich } x=240 \text{ engl. Meilen.}$$

Zweite Auflösung. Der Unterschied der Uhren betrage x Minuten; dann hätte der Wagen nach der Uhr des Ortes A um 4 Uhr $(6+x)$ Minuten in B ankommen müssen, wäre also $7.60+(6+x)=(426+x)$ Minuten lang unterwegs gewesen, in welcher Zeit er $\frac{(426+x)32}{60}$ Meilen = der Entfernung der Orte A und B abgemacht hätte. Da er nun bei je 10 Meilen 1 Minute gewann, so gewann er im ganzen

$\frac{(426+x)32}{60.10}$ Minuten. Hiernach ist: $\frac{(426+x)32}{60.10}=x$; folglich $x=24$ Minuten. Also ist A $\frac{(426+24)32}{60}=240$ Meilen von B entfernt.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Nach der Angabe gewinnt der Wagen bei je 10 zurückgelegten Meilen 1 Minute an Zeit. Es muß dies aus bekannten astronomischen Gründen stattfinden, da jeder nach Westen gelegene Punkt wegen der Drehung der Erde von Westen nach Osten weniger Zeit als ein von ihm ostwärts liegender Punkt hat und der Wagen von Osten nach Westen fährt. Auf je 32 zurückgelegten Meilen gewinnt er also $3\frac{1}{5}$ Min. an Zeit, d. h. wenn er von einem Orte 1 Stunde lang nach Westen $=32$ Meilen gemacht hat, so ist die Ortszeit, zu welcher er in diesem Punkte anlangt, nicht 60 Minuten, sondern $60-3\frac{1}{5}=56\frac{4}{5}$ mehr, als zur Zeit der Abfahrt.

Nach	den	ersten	zurückgelegten	32	Meilen	ist	also	9	Uhr	$56\frac{4}{5}$	Min.	Ortszeit,
„	„	zweiten	„	„	„	„	„	10	„	$53\frac{3}{5}$	„	„
„	„	dritten	„	„	„	„	„	11	„	$50\frac{2}{5}$	„	„
„	„	vierten	„	„	„	„	„	12	„	$47\frac{1}{5}$	„	„
„	„	fünften	„	„	„	„	„	1	„	44	„	„
„	„	sechsten	„	„	„	„	„	2	„	$40\frac{4}{5}$	„	„
„	„	siebenten	„	„	„	„	„	3	„	$37\frac{3}{5}$	„	„

Nach $7\times32=224$ Meilen ist also die Ortszeit in dem Punkte 3 Uhr $37\frac{3}{5}$ Min. Er fährt aber noch bis 4 Uhr 6 Minuten, d. h. noch $28\frac{2}{5}$ Min. länger. In $56\frac{4}{5}$ Minuten legt er 32 Meilen zurück, also in 1 Minute $32:56\frac{4}{5}=\frac{40}{71}$ Meile; demnach in $28\frac{2}{5}$ Minuten $28\frac{2}{5}\times\frac{40}{71}=16$ Meilen, also hat er zusammen $224+16=240$ Meilen $=$ der Entfernung von A nach B gemacht.

Oder: Der Wagen fährt unter obiger Berücksichtigung der verschiedenen Ortszeiten in 1 Minute $32:56\frac{4}{5}=\frac{40}{71}$ Meile. Er fährt aber von morgens 9 Uhr bis nachmittags 4 Uhr 6 Min. $=7$ Stunden 6 Min. $=426$ Minuten; also macht er in dieser Zeit $426.\frac{40}{71}=6\times40=240$ engl. Meilen.

153. Die Entfernung der beiden Städte sei x *km*. Hätte der Eilwagen die ganze Hin- und Rückreise gemacht, so hätte er 2x *km* zurückgelegt. Jedoch begegnete er nach 9 Std. auf der Rückreise von B nach A dem Fußgänger, der mit ihm zugleich von A ausgegangen war. Der Fußgänger legte in den 9 Std. $3\times15=45$ *km* zurück. Diese 45 *km* hat der Wagen noch bis zur Ankunft in A zu machen, er hat also im ganzen nur $2x-45$ *km* gemacht. Hierzu gebraucht er $\frac{4(2x-45)}{37\frac{1}{2}}$ Stunden, im ganzen also mit dem Aufenthalt

$\frac{4(2x-45)}{37\frac{1}{2}}+1$ Std. Es ist daher $\frac{4(2x-45)}{37\frac{1}{2}}+1=9$, folglich $x=60$ *km*. Da der Fußgänger bereits 45 *km* zurückgelegt, so hatte er noch $(60-45)=15$ *km* zu machen.

154. Beide Zeiger gehen um eine und dieselbe Zeit und von einem und demselben Punkte zugleich aus nach einer Richtung, jedoch mit verschiedener Geschwindigkeit. Denn der Minutenzeiger hat eine 12mal geschwindere Bewegung, als der Stundenzeiger, oder jener durchläuft in derselben Zeit einen 12mal größeren Raum, als dieser. Gesetzt nun, der Stundenzeiger bewege sich nach 12 Uhr noch x Minuten, ehe er vom Minutenzeiger eingeholt werde, so muß dieser nicht allein den ganzen Umlauf=60 Minuten, sondern auch die x Minuten, die der Stundenzeiger in derselben Zeit durchläuft, abmachen. Während also der Minutenzeiger $(x+60)$ Minuten macht, macht der Stundenzeiger nur x Minuten. Da nun die Geschwindigkeit des Minutenzeigers 12mal so groß ist, als die des Stundenzeigers, so ist also auch $(x+60)$ Minuten eine 12mal größere Zeit als x Minuten. Es ist daher:

$$12x=x+60;\ \text{folglich}\ x=5\tfrac{5}{11}\ \text{Minuten}.$$

Nach 12 Uhr decken sie sich zum erstenmal also um 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten, zum zweitenmal um 2 Uhr $10\frac{10}{11}$ Minuten, überhaupt immer um 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minuten später. Im ganzen stehen sie $60:5\frac{5}{11}=11$mal übereinander.

155. *α*) Man nehme an, der Stunden- und Minutenzeiger ständen um 12 Uhr übereinander und der Stundenzeiger mache x Minuten nach 12 Uhr, wo beide Zeiger in gerader Linie einander gegenüberstehen. Nun weiß man, daß der Minutenzeiger einen ganzen Umlauf oder 60 Minuten macht, während der Stundenzeiger $\frac{1}{12}$ Umlauf oder 5 Minuten macht. Stände nun der Stundenzeiger auf 12 Uhr still, und der Minutenzeiger bewege sich wie gewöhnlich fort, so würde er $\frac{1}{2}$ Umlauf oder 30 Minuten zu machen haben, in welchem Falle beide Zeiger eine gerade Linie ausmachten. Nun bewegt sich aber der Stundenzeiger ebenfalls fort und zwar um x Minuten; daher muß der Minutenzeiger nicht allein den halben Umlauf=30 Minuten, sondern auch noch die x Minuten des Stundenzeigers machen. Während dieser nun $(x+30)$ Minuten macht, macht der Stundenzeiger nur x Minuten. Da die Bewegung des ersteren aber 12mal so groß als die des letzteren ist, so ist auch:

$$12x=x+30;\ \text{folglich}\ x=2\tfrac{8}{11}.$$

Der Stundenzeiger macht also $2\frac{8}{11}$ Minuten, während der Minutenzeiger $32\frac{8}{11}$ Minuten nach 12 Uhr macht. Also stehen die Zeiger nach 12 Uhr zum erstenmal um 12 Uhr $32\frac{8}{11}$ Min.

in gerader Linie untereinander. Beim zweitenmal und für die Folge muß sowohl der Stunden- als auch der Minutenzeiger das Doppelte, also $5\frac{5}{11}$ und $65\frac{5}{11}$ Minuten machen, ehe sie untereinander zu stehen kommen. Bewegt sich daher der Minutenzeiger nach 12 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten um $65\frac{5}{11}$ Minuten, so stehen beide Zeiger um 1 Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten zum zweitenmal nach 12 Uhr untereinander u. s. w., jedesmal also 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minuten später. Dies wird demnach $60:5\frac{5}{11}=11$mal der Fall sein.

β) Um 3 Uhr bilden beide Zeiger einen rechten Winkel. Nun mache der Stundenzeiger noch x Bogenminuten ab, ehe er wieder mit dem Sekundenzeiger einen rechten Winkel bildet, dann hat dieser nicht allein die halbe Peripherie des Zifferblattes, also 30 Bogenminuten, sondern auch noch die des Stundenzeigers, also x abgemacht, demnach im ganzen $x+30$. Es ist daher

$$12x=30+x;\text{ folglich } x=2\tfrac{8}{11}\text{ Minuten.}$$

Daher bilden die beiden Zeiger nach 3 Uhr zum erstenmal um 3 Uhr $(30+2\frac{8}{11})=32\frac{8}{11}$ Min.; zum zweitenmal um 4 Uhr $5\frac{5}{11}$ Min. einen rechten Winkel, immer also $32\frac{8}{11}$ Min. später, und dies wird somit $60:2\frac{8}{11}=22$mal der Fall sein.

γ) 1. In 1 Stunde macht der Stundenzeiger 5 Bogenminuten ab. Um halb ein Uhr steht also der Stundenzeiger $5:2=2\frac{1}{2}$ Bogenminute nach 12 Uhr, der Sekundenzeiger aber auf 12 Uhr. Nun hole dieser jenen in x Sekunden ein. Der Sekundenzeiger macht in 1 Min. = 60 Sek. den ganzen Kreis des Zifferblattes, also 60 Bogenminuten, mithin in 1 Sek. $60:60=1$ Bogenminute, in x Sekunden x Bogenminuten. Der Stundenzeiger aber macht in 60 Min. oder $60.60=3600$ Sek. nur 5 Bogenminuten, folglich in x Sek. $\frac{x}{720}$ Bogenminuten. Wenn der Sekundenzeiger den Stundenzeiger einholt, hat jener nicht nur die $2\frac{1}{2}$ Bogenminuten, die der letztere voraus hatte, sondern auch noch $\frac{x}{720}$ Bogenminuten abgemacht; es ist daher:

$$x=\frac{x}{720}+2\tfrac{1}{2};\text{ folglich } x=2\tfrac{362}{719}\text{ Sekunden.}$$

γ) 2. Nach x Sekunden stehe der Sekundenzeiger gerade in der Mitte zwischen dem Stundenzeiger und Minutenzeiger. Dieser macht in 60 Sek. 1 Bogenminute ab, also in x Sek. $\frac{x}{60}$ Bogenminuten. Um halb ein Uhr hat er nach 12 Uhr schon 30 Bogenminuten abgemacht, demnach im ganzen $\frac{x}{60}+30$.

Der Stundenzeiger macht in 12 Stunden$=12\times60\times60=43200$ Sek. 60 Bogenminuten, also in 1 Sek. $\frac{1}{720}$, folglich in x Sek. $\frac{x}{720}$ Bogenminuten. Er steht aber um halb ein Uhr $2\frac{1}{2}$ Bogenminute über 12 Uhr, daher hat dieser zusammen $\frac{x}{720}+2\frac{1}{2}$ Bogenminute nach 12 Uhr abgemacht. Der Sekundenzeiger macht in 1 Sek. 1 Bogenminute ab, also in x Sek. auch x Bogenminuten und geht punkt halb ein Uhr von 12 Uhr ab, macht also im ganzen nach 12 Uhr x Bogenminuten. Da er nun in der Mitte zwischen den beiden andern Zeigern stehen soll, so ist die Differenz zwischen ihm und dem Stundenzeiger gleich der Differenz zwischen ihm und dem Minutenzeiger; daher ist:

$x-\left(2\frac{1}{2}+\frac{x}{720}\right)=\left(\frac{x}{60}+30\right)-x$; also $x=16\frac{568}{1427}$ Sekunden.

γ) 3. Um halb ein Uhr steht der Sekundenzeiger auf 12 Uhr, der Minutenzeiger auf 6 Uhr, hat also nach 12 Uhr 30 Bogenminuten abgemacht. Nun hole der Sekundenzeiger nach x Sek. den Minutenzeiger ein, in dieser Zeit hat er aber nach dem Vorhergehenden auch x Bogenminuten abgemacht, wohingegen der Minutenzeiger außer den 30 auch noch $\frac{x}{60}$, also im ganzen $\frac{x}{60}+30$ Bogenminuten abgemacht hat. Daher ist: $x=\frac{x}{60}+30$; folglich $x=30\frac{30}{59}$ Sek.

156. α) Da sich der vorangehende Körper t Zeiteinheiten früher oder später zu bewegen anfängt, als der nachfolgende, so ist ihre anfängliche Entfernung $(d\pm ct)$ Raumeinheiten. Der zweite Körper mag den ersten in x Zeiteinheiten einholen, so hat er $c'x$ und der erste cx Raumeinheiten gemacht. Dieser hat aber außerdem noch einen Vorsprung von $(d\pm ct$ Raumeinheiten vor dem zweiten voraus, die der zweite dem ersteren durch seine größere Geschwindigkeit abgewinnen muß. Es ist daher $c'x=cx+d\pm ct$; folglich $x=\frac{d\pm ct}{c'-c}$ Zeiteinheiten. Soll der zweite den ersten zum zweitenmal einholen, so hat er nicht nur den ganzen Umfang von m Raumeinheiten, sondern auch den Weg zu machen, den der erste macht. Es ist daher:

$$c'x=cx+m;\ \text{also}\ x=\frac{m}{c'-c};$$

folglich holt der zweite den ersten in $\frac{m}{c'-c}$ Zeiteinheiten ein nach dem ersten Zusammentreffen; vom ersten Auslaufen aber

an gerechnet in $\frac{d \pm ct}{c' - c} + \frac{m}{c' - c} = \frac{d \pm ct + m}{c' - c}$ Zeiteinheiten. Ebenso findet man die Zeit, zu welcher der zweite den ersten einholt, zum drittenmal $= \frac{d \pm ct + m}{c' - c} + \frac{m}{c' - c} = \frac{d \pm ct + 2m}{c' - c}$ Zeiteinheiten und überhaupt die Zeit, zu welcher beide Körper zum nten Male zusammentreffen

$$= \frac{d \pm ct}{c' - c} + \frac{(n-1)m}{c' - c} = \frac{d \pm ct + (n-1)m}{c' - c}.$$

β) Laufen die Körper gegeneinander, so ist nach den in der vorhergehenden Auflösung angestellten Betrachtungen ihre anfängliche Entfernung $(d \mp ct)$ Raumeinheiten, und daher findet ihr erstes Zusammentreffen nach $\frac{d \mp ct}{c' + c}$ Zeiteinheiten statt. Zum zweitenmal treffen sie, da ihre jetzige Entfernung m Raumeinheiten beträgt, nach $\frac{m}{c' + c}$ Zeiteinheiten zusammen, und vom ersten Anfange ihrer Bewegung bis zum zweiten Zusammentreffen nach $\left(\frac{d \mp ct}{c' + c} + \frac{m}{c' + c}\right) = \frac{d \mp ct + m}{c' + c}$ Zeiteinheiten; zum nten Male treffen sie demnach nach

$$\left(\frac{d \mp ct}{c' + c} + \frac{(n-1)m}{c' + c}\right) = \frac{d \mp ct + (n-1)m}{c' + c}$$

Zeiteinheiten zusammen.

157. Die Peripherie des Kreises betrage x *m*. Da ihre anfängliche Entfernung 9 *m* ist, so hat der eine Körper beim ersten Zusammentreffen nach 2 Minuten dem andern 9 *m* abgewonnen; er gewinnt ihm also überhaupt in jeder Minute $4\frac{1}{2}$ *m* ab; nach 10 Minuten hat er demnach $10 . 4\frac{1}{2} = 45$ *m* mehr gemacht als der andere. Beim zweiten Zusammentreffen mußte der eine den ganzen Umfang $= x$ *m* und den zurückgelegten Weg des andern machen, gewann ihm also x m ab, im ganzen in 10 Minuten $(x+9)$ *m*. Es ist demnach: $x + 9 = 45$; folglich $x = 36$ *m*.

Zweite Auflösung. Da der eine Körper in 1 Minute dem andern $4\frac{1}{2}$ *m* abgewinnt, so gewinnt er ihm $(x+9).$*m* in $(x+9):4\frac{1}{2}$ Minuten ab. Da die Zeit, in welcher er $(x+9)$ *m* mehr macht, als der andere, 10 Minuten ist, so hat man: $(x+9):4\frac{1}{2} = 10$; folglich $x = 36$ *m*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die ursprüngliche Entfernung der beiden Körper beträgt 9 *m*. Holt der eine den andern in 2 Minuten ein, so hat er ihm in dieser Zeit 9 *m* abgewonnen. Da er ihn nach 10 Minuten zum zweitenmale einholt, so hat er ihm in dieser Zeit $\frac{10}{2} \times 9 =$

$5.9\,m$ abgewonnen; zur Zurücklegung der Peripherie braucht er daher nur $4.9=36\,m$ zu machen. Oder: Wenn sie sich nach 10 Minuten zum zweitenmal treffen, so gelangt der eine Körper nach 8 Minuten nach dem ersten Zusammentreffen an dem Punkte an, von wo er zum erstenmal mit dem zweiten zusammentraf, hatte also in dieser Zeit gerade die Peripherie durchlaufen, welche er dem andern Körper abgewonnen hatte. Dieselbe betrug demnach $\frac{9}{2}\times 8 = 36\,m$.

158. Wenn die Körper nach t′ Minuten von ihrem ersten Auslaufen zum zweitenmal zusammentreffen, so kommen sie $(t'-t)$ Minuten nach ihrem ersten Zusammentreffen zusammen. Dies ist für die Folge ihre Geschwindigkeit von einem Zusammentreffen bis zum andern. Beim dritten Zusammentreffen haben sie also wieder $(t'-t)$ Sekunden gebraucht und zwar vom zweiten Zusammentreffen an gerechnet; im ganzen haben sie also bis jetzt $(t+t'-t+t'-t)=(2t'-t)$ Sekunden gebraucht und zwar von ihrem ersten Auslaufen an; folglich findet das dritte Zusammentreffen nach $(2t'-t)$ Sekunden statt.

159. Die zweite und dritte Uhr soll mit der Normaluhr x Minuten nach Mittag übereinstimmen. Die zweite Uhr geht in 24 Stunden $=24.60=1440$ Min. 5 Min. vor, in einer Min. also $\frac{5}{1440}=\frac{1}{288}$, in x Min. $\frac{x}{288}$ Min. Die dritte Uhr geht in 1440 Min. 8 Min. nach, in x Min. also $\frac{8}{1440}x=\frac{1}{180}x$ Min. Da die zweite Uhr, Mitternacht als Anfang genommen, 11 Uhr 40 Min. $=11.60+40=700$ Min. zeigt, so kommt dazu erstens die Zeit bis zur Uebereinstimmung, also x, zweitens die Zeit, welche sie voreilt, also $\frac{x}{288}$, also hat sie bis zur Uebereinstimmung im ganzen $700+x+\frac{x}{288}$ Min. gemacht. Die dritte Uhr zeigt 12 Uhr 45 Min., also 65 Min. mehr, als die zweite, also 765 Minuten nach dem angenommenen Anfangspunkte. Dazu kommt auch die Zeit bis zur Uebereinstimmung mit x Min., und da sie in dieser Zeit $\frac{x}{180}$ Minuten zurückbleibt, muß letzteres abgezogen werden, also hat sie $765+x-\frac{x}{180}$ Min. gemacht. Nun zeigen die beiden Uhren mit der Normaluhr dieselbe Zeit, nämlich x Minuten nach Mittag, also sind beide Ausdrücke $=x$, folglich sind sie auch unter sich gleich. Daher

$$700+x+\frac{x}{288}=765+x-\frac{x}{180},$$

folglich $x=7200$ Min. $=5$ Tagen. Oder: Die zweite Uhr geht 20 Min. zu spät, die dritte 45 Min. zu früh; demnach beträgt der Unterschied im Gange der beiden Uhren um 12 Uhr mittags $20+45=65$ Minuten. Dieser Unterschied werde nun in x Tagen ausgeglichen, so beträgt der Unterschied in dem Gange der beiden Uhren, da die eine täglich 5 ihrer Minuten vorgeht und die andere 8 ihrer Minuten nachgeht, $5x+8x=13x$; mithin ist: $13x=65$; also $x=5$. Sie stimmen also nach 5 Tagen mittags 12 Uhr mittlerer Sonnenzeit überein. Nun sind 5 Tage der ersten Uhr $=$ 5 Tage 25 Min. auf der zweiten. Also steht die zweite Uhr auf 11 Uhr 40 Min. $+25$ Min. nach 5 Tagen; folglich zeigen beide Uhren 12 Uhr 5 Min.

160. α) Die Sonne möge, nachdem sie sich x Tage vorwärts bewegt hat, vom Monde eingeholt werden, so hat der Mond außer der Zeit, die er selbst zur Vollendung seines Laufes gebraucht, auch noch diese x Tage zu durchlaufen. In der Zeit also, in welcher der Mond $(x+27\frac{231539}{720000})$ Tage machen muß, macht die Sonne nur x Tage. Nun vollendet der Mond seinen Lauf in $27\frac{231539}{720000}$ Tagen; dagegen gebraucht die Sonne zu demselben Wege $365\frac{17443}{720000}$ Tage; also hat der Mond eine $13\frac{7087436}{19671539}$mal größere Geschwindigkeit als die Sonne; folglich sind auch $(x+27\frac{231539}{720000})$ Tage um $13\frac{7087436}{19671539}$mal größer als x Tage. Es ist daher

$$13\tfrac{7087436}{19671539}x=x+27\tfrac{231539}{720000}.$$

Hieraus folgt, daß $x=2$ Tage 5 Stunden 57,82 Sekunden. Addiert man den für x gefundenen Wert zu $27\frac{231539}{720000}$ Tagen, so findet man, daß der Mond die Sonne nach 29 Tagen 12 Stunden 44 Minuten 2,8 Sekunden erreicht.

β) a. Zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen mögen x Monate verfließen. Setzen wir nun die mittlere monatliche Geschwindigkeit der Erde $=1$, so ist die der Venus $=\frac{13}{8}$ und der zu überholende Weg $=12$ Mon. Mithin ist $\frac{13}{8}x=1.x+1.12$, woraus $x=19\frac{1}{5}$ Mon. oder $1\frac{3}{5}$ Jahr.
b. Hier ist $\frac{13}{8}x=1.x+1.6$, folglich $x=9\frac{3}{5}$ Mon. oder $\frac{4}{5}$ Jahr.
c. u. d. Da die Venus $\frac{4}{5}$ Jahr lang rechts und ebenso lange Zeit links von der Sonne erscheint, so muß sie $\frac{4}{5}$ Jahr lang Morgenstern und $\frac{4}{5}$ Jahr lang Abendstern sein.

161. α) Gesetzt die beiden Körper, die wir A und B nennen wollen, beginnen die Bewegung zu gleicher Zeit von demselben Punkte aus. Nach der Aufgabe durchläuft A die Peripherie des Kreises in t Sekunden, also in 1 Sekunde $\frac{1}{t}$ der Peripherie. B holt ihn nach t' Skd. ein, dann hat A $t' \cdot \frac{1}{t} = \frac{t'}{t}$ der Periph. abgemacht; demnach legt B den ganzen Weg samt dem von

A durchlaufenen Stück in t' Sekunden zurück; diese Strecke ist aber $\left(1+\frac{t'}{t}\right)=\frac{t+t'}{t}$; also legt B in 1 Sekunde $\frac{1}{t'}\cdot\frac{t+t'}{t}=\frac{t+t'}{t't}$ zurück. Gebraucht er nun x Sekunden, um einen Umlauf zu vollenden, so hat er in dieser Zeit $\frac{x(t+t')}{t't}$ abgemacht, und da dies gleich der Peripherie ist, so hat man:

$$\frac{x(t+t')}{t't}=1;\ \text{folglich}\ x=\frac{t't}{t+t'}.$$

171. β) A B C G D E F

Die von A, B, C auslaufenden Körper seien bezüglich K', K'', K'''. Nach x Zeiteinheiten befinde sich K' gerade in der Mitte zwischen den beiden andern, habe also etwa den Punkt D auf der Linie AF erreicht, so hat der Körper K' die Strecke AD, der Körper K'' die Strecke BG und K''' die von CE zurückgelegt. In dieser Zeit hat K' $c'x$, K'' $c''x$ und K''' $c'''x$ Längeneinheiten zurückgelegt. Nun ist

(1) $AB=m$; (2) $AC=AB+BC=n$;
(3) $BC=AC-AB=n-m$; (4) $BG=BC+CG=c''x$;
(5) $CG=BG-CB=c''x-(n-m)$;
(6) $AG=AC+CG=c''x+m$;
(7) $AD=AC+CG+GD=c'x$;
(8) $GD=AD-(AC+CG)=x(c'-c'')-m$;
(9) $CE=CG+GD+DE=c'''x$;
(10) $CD=CG+GD=AD-AC=c'x-n$;
(11) $DE=CE-(CG+GD)=x(c'''-c')+n$;
(12) $AE=AC+CE=c'''x+n$.

Hieraus ergiebt sich, daß K' die Strecke AB und GD mehr zurückgelegt, als K'', und K'' die Strecke AB+BC=AC weniger, dahingegen die Strecke DE, oder weil DE=GD die Strecke GD mehr zurückgelegt hat als K'. Die beiden Körper K'' und K''' hätten also die doppelte Strecke des Körpers K' abgemacht, wenn sie AB+AC=2AB+BC noch abgemacht hätten. Daher ist

$$\underbrace{AB+BC+CG+GD}_{AD}$$
$$=\tfrac{1}{2}[\underbrace{(AB+BC+CG)}_{\frac{1}{2}AG}+\underbrace{(AB+BC+CG+2GD)}_{\frac{1}{2}AE}]\quad \text{oder}$$
$$c'x=\tfrac{1}{2}(c''x+m)\ +\ \tfrac{1}{2}(c'''x+n).$$

Hieraus folgt $x=\frac{m+n}{2c'-c''-c'''}$.

Oder: Da GD=DE ist, so setze man die unter (8) und

(11) hierfür gefundenen Werte ein und man hat alsdann: $x(c'-c'')-m=x(c'''-c')+n$; woraus sich ebenfalls der Wert für x ergiebt.

162. Angenommen, der Hase mache noch x Sprünge, ehe er vom Hunde eingeholt werde. Wenn nun der Hase in derselben Zeit 5 Sprünge macht, in welcher der Hund deren 4 macht, so muß der Hund beim Zusammentreffen mit dem Hasen $\frac{4x}{5}$ Sprünge gemacht haben. Der Hund gewinnt dem Hasen also $\frac{1}{5}x$ seiner Sprünge, wie auch die 90 Sprünge ab, die der Hase gemacht hatte, ehe der Hund ihn zu verfolgen anfing; er gewann ihm demnach im ganzen $(\frac{1}{5}x+90)$ Hasensprünge ab. Da nun 7 Hasensprünge an Größe so viel betragen, als 5 Hundesprünge, so ist 1 Hundesprung gleich $1\frac{2}{5}$ Hasensprung; bei jedem Sprung, den der Hund thut, gewinnt er also dem Hasen $\frac{2}{5}$ Hasensprung ab; folglich gewinnt der Hund mit seinen $\frac{4x}{5}$ Sprüngen $\frac{2.4x}{5.5}$ Hasensprünge. Es ist daher:

$$\tfrac{1}{5}x+90=\frac{2.4x}{5.5};$$

folglich $x=750$ Sprünge hat der Hase und $\frac{4x}{5}=\frac{4.750}{5}=$ 600 Sprünge der Hund gemacht.

Zweite Auflösung. Der Hund müsse x Sprünge machen, ehe er den Hasen einholt, so hat der Hase $\frac{5x}{4}$ Sprünge gemacht, und da er einen Vorsprung von 90 Sprüngen hat, so hat der Hase in dem Augenblicke, wo er mit dem Hunde zusammentrifft, $\left(\frac{5x}{4}+90\right)$ Sprünge gemacht. Wenn nun 7 Hasensprünge=5 Hundesprünge sind, so würde der Hase, um die x Hundesprünge zurückzulegen, $\frac{7x}{5}$ Sprünge machen müssen. Da er nun in beiden Fällen gleich viel Sprünge macht, so ist auch

$$\frac{5x}{4}+90=\frac{7x}{5};\ \text{folglich}\ x=600\ \text{Sprünge.}$$

Dritte Auflösung. Man nehme an, der Hund lege etwa in 5 Sprüngen 1 Dekameter zurück und er mache in einer bestimmten Zeit 4 Sprünge, so legt er in jener Zeit einen Weg von $\frac{4}{5}$ Dekameter zurück, d. h. die Geschwindigkeit des Hundes kann durch $\frac{4}{5}$ dargestellt werden. Unter diesen Voraussetzungen muß nach der Aufgabe der Hase in 7 Sprüngen eine Strecke von 1 Dekameter zurücklegen und in

jener Zeit einen Weg von $\frac{5}{7}$ Dekameter, d. h. die Geschwindigkeit des Hasen kann durch $\frac{5}{7}$ bezeichnet werden. Nun hole der Hund den Hasen nach x Hasensprüngen ein, so muß der Hund einen Raum von $(90+x)$ Hasensprüngen zurücklegen; und da sich bei einerlei Zeit die Geschwindigkeiten gerade wie die durchlaufenen Räume verhalten, so hat man: $\frac{4}{5}:\frac{5}{7}=(90+x):x$, woraus $x=750$. Der Hase kann also noch 750 Sprünge machen und da 7 Hasensprünge=5 Hundesprünge sind, so sind $750+90=840$ Hasensprünge $=840.\frac{5}{7}=600$ Hundesprünge.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Der Hase macht in derselben Zeit $5.5=25$ Sprünge, in welcher der Hund deren $5.4=20$ macht. Da aber $4.7=28$ Hasensprünge so groß sind, als $4.5=20$ Hundesprünge, so nähert sich der Hund in 20 Sprüngen dem Hasen um $28-25=3$ Hasensprünge. Da der Hund nun 90 Hasensprünge einbringen muß, so hat er $\frac{90}{3}.20=30.20=600$ Sprünge zu machen.

163. Ist die Mauer $26\frac{2}{3}$ *m* lang, 1 *m* breit und 4 *m* hoch, so ist der Kubikinhalt derselben $26\frac{2}{3}\times1\times4=106\frac{2}{3}$ *cbm*. Der erste Maurer macht in 1 Tage bei 9stündiger Arbeit $5\frac{1}{3}$ *cbm*; also in 1 Stunde $5\frac{1}{3}:9=\frac{16}{27}$ *cbm*. Der zweite macht in 9 Tagen bei 11stündiger Arbeit $53\frac{1}{3}$ *cbm*, also in 1 Stunde $53\frac{1}{3}:99=\frac{160}{297}$ *cbm*. Die Mauer möge nun von beiden Arbeitern bei 10stündiger Arbeit täglich in x Tagen fertig werden, so würde der erste in 10x Stunden $\frac{160}{27}x$ und der zweite $\frac{1600}{297}x$ *cbm* machen, beide zusammen also die Mauer von $106\frac{2}{3}$ *cbm* fertig stellen. Nun versäumt aber der erste 5 Tage oder 50 Arbeitsstunden, der zweite 2 Tage oder 20 Arbeitsstunden. Ersterer macht daher in 50 Stunden $50\times\frac{16}{27}=29\frac{17}{27}$ und der andere in 20 Stunden $20\times\frac{160}{297}=10\frac{230}{297}$ *cbm* weniger. Es ist daher:

$$\frac{160}{27}x+\frac{1600}{297}x-\left(29\frac{17}{27}+10\frac{230}{297}\right)=106\frac{2}{3};$$

$x=13$ Tage.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Mauer enthält $106\frac{2}{3}$ *cbm*. Bei 10stündiger Arbeit macht der eine $\frac{160}{27}$ und der andere $\frac{1600}{297}$ *cbm*, also zusammen machen sie an jedem Tage $\frac{160}{27}+\frac{1600}{297}=\frac{3360}{297}$ *cbm*. Würden beide Arbeiter zu gleicher Zeit die Arbeit begonnen und ohne Unterbrechung fortgesetzt haben, so würde die Mauer in $106\frac{2}{3}:\frac{3360}{297}=9\frac{3}{7}$ Tagen fertig geworden sein. Nun versäumt der eine 5 Tage, in denen der andere allein arbeitet; in dieser Zeit werden also nur $5\times\frac{1600}{297}=26\frac{278}{297}$ *cbm* fertig. Der zweite Arbeiter versäumt 2 Tage, in denen der erste allein arbeitet und worin dieser $2\times\frac{160}{27}=11\frac{23}{27}$ *cbm* macht. In $5+2=7$ Tagen wurden sonach nur $26\frac{278}{297}+11\frac{23}{27}=38\frac{234}{297}$ *cbm* der Mauer fertig. Es blieb demnach für gemeinschaftliche Arbeit noch

$106\frac{2}{3} - 38\frac{234}{297} = 67\frac{29}{33}$ *cbm* übrig, welche sie zusammen in $67\frac{29}{33} : \frac{3360}{297} = 6$ Tagen fertig machen. Demnach wurde im ganzen $7+6=13$ Tage lang an der Mauer gearbeitet.

164. Der Wasserbehälter mag nach x Minuten nach der Öffnung der zweiten Röhre angefüllt sein, so fließen durch die erste Röhre $\frac{51x}{7}$ *l* aus; außerdem aber auch noch, weil sie 11 Min. früher als die zweite geöffnet wird, $\frac{11.51}{7} = \frac{561}{7}$ *l*; im ganzen also $\frac{51x+561}{7}$ *l*. Dagegen fließt durch die zweite $\frac{47x}{4}$ *l* hinzu. Da nun der Behälter nur zur Hälfte gefüllt ist, so ist $\frac{47x}{4} - \frac{51x+561}{7} = 527$; folglich x=2 Stunden 16 Minuten nach der Öffnung der zweiten und 2 Stunden $(16+11)=27$ Minuten nach Öffnung der ersten Röhre.

Zweite Auflösung. Der Behälter sei x Minuten nach Öffnung der ersten Röhre angefüllt, so fließen durch die erste Röhre $\frac{51x}{7}$ *l*, dagegen aber durch die zweite $\frac{(x-11)47}{4}$ *l*, hinzu. Es ist daher: $\frac{(x-11)47}{4} - \frac{51x}{7} = 527$; folglich x= 2 Stunden 27 Minuten nach Öffnung der ersten Röhre.

Dritte (arithmetische) Auflösung. In $4.7=28$ Minuten fließen $4.51=204$ *l* aus und in $7.4=28$ Minuten fließen durch die zweite Röhre $7.47=329$ *l* ein; also fließen in 28 Minuten $(329-204)=125$ *l* mehr ein, als aus. In 11 Minuten, welche die zweite Röhre allein geöffnet ist, fließen $\frac{11.51}{7} = 80\frac{1}{7}$ *l* aus; es befinden sich also im Behälter nur noch $(527-80\frac{1}{7}) = 446\frac{6}{7}$ *l*; damit demnach der Behälter voll werde, müssen noch $(1054-446\frac{6}{7}) = 607\frac{1}{7}$ *l* hinzufließen. Die vollständige Füllung wird demnach in so oftmal 28 Minuten von der zweiten geschehen, als 125 *l* in $607\frac{1}{7}$ *l* enthalten sind $= \frac{28.607\frac{1}{7}}{125} = 136$ Minuten = 2 Stunden 16 Minuten u. s. w.

165. Silen trinke x Becher, so kann Bacchus 2x vertragen. Als Silen zu trinken anfing, hatte Bacchus schon 6 Becher getrunken; er trank also in Vereinigung mit Silen $2x-6$ Becher. So oft nun Bacchus 5 Becher leerte, trank Silen nur 3, folglich verhält sich $(2x-6):x=5:3$; also $x=18$; demnach trank Bacchus $2\times18=36$ Becher.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Hätte Bacchus

mit Silen zu gleicher Zeit zu trinken angefangen, so mußte, da jener das Doppelte von diesem getrunken, auf je 6 Becher des Bacchus 3 des Silen kommen. Es kommen jetzt aber nur auf je 5 des erstern 3 des letztern, also 1 Becher weniger. So oft also Bacchus im voraus 1 Becher getrunken hat, so oft kommen auf ihn 6 und auf Silen 3; das macht für Bacchus $6 \times 6 = 36$ und für Silen $6 \times 3 = 18$ Becher. Oder: So oft Bacchus einen Becher im voraus getrunken, kommen 5 auf ihn, die er in Gesellschaft mit Silen getrunken; das macht $6 \times 5 = 30$; folglich trank er im ganzen $30 + 6 = 36$ Becher.

166. α) Der Behälter werde von allen 3 Röhren in x Stunden gefüllt, so füllt die erste in dieser Zeit $\frac{1}{4}x$, die zweite $\frac{1}{10}x$, die dritte $\frac{1}{15}x$ des Behälters. Es ist demnach $\frac{1}{4}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{15}x = 1$; folglich $x = 2$ Stunden 24 Minuten.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die dritte Röhre füllt den Teich 1mal in 15 Stunden; die zweite in 10 Stunden 1mal, also in 15 Stunden $1\frac{1}{2}$mal; die erste in 4 Stunden 1mal, also in 15 Stunden $3\frac{3}{4}$mal. Durch alle 3 Röhren würde demnach der Behälter in 15 Stunden $(1 + 1\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}) = 6\frac{1}{4}$mal gefüllt werden. Er soll aber nur 1mal gefüllt werden, folglich gehen auch nur $15 : 6\frac{1}{4} = 2\frac{2}{5}$ Stunden dazu.

β) Nach der vorhergehenden Auflösung hat man:

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} = 1; \text{ folglich } x = \frac{mnp}{mn + mp + np} \text{ Stunden.}$$

167. Der leere Teich werde bei Öffnung aller 3 Schleusen in x Tagen angefüllt, so wird in dieser Zeit durch die erste Röhre $\frac{4}{5}x$, durch die zweite $\frac{4}{7}x$ des Teiches angefüllt, dagegen durch die dritte in dieser Zeit $\frac{4}{3}x$ desselben ausgeleert. Es ist demnach: $\frac{4}{5}x + \frac{4}{7}x - \frac{4}{3}x = 1$; folglich $x = 26\frac{1}{4}$ Tage.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die zweite Schleuse füllt den Teich in $1\frac{3}{4}$ Tag einmal; die erste in $1\frac{1}{4}$ Tag einmal, also in $1\frac{3}{4}$ Tag $1\frac{2}{5}$mal; also würde durch beide Schleusen der Teich in $1\frac{3}{4}$ Tag $1 + 1\frac{2}{5} = 2\frac{2}{5}$mal gefüllt werden. Die dritte Schleuse leert ihn in $\frac{3}{4}$ Tag einmal; also leert sie ihn in $1\frac{3}{4}$ Tag $2\frac{1}{3}$mal; folglich bleibt in $1\frac{3}{4}$ Tag Zeit bei Öffnung aller Schleusen der Teich noch um $2\frac{2}{5} - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ gefüllt; mithin bedarf es zur ganzen Füllung unter den angegebenen Bedingungen $15 \times 1\frac{3}{4} = 26\frac{1}{4}$ Tage.

168. In x Stunden werde der leere Behälter gefüllt, so füllt die erste Röhre $\frac{1}{m}x$, die zweite $\frac{1}{n}x$, die dritte leert dagegen $\frac{1}{p}x$ des Behälters. Es ist daher

$\frac{1}{m}x+\frac{1}{n}x-\frac{1}{p}x=1$; folglich $x=\frac{mnp}{mp+np-mn}$ Stunden.
Soll aber der volle Behälter geleert werden, so hat man:
$\frac{1}{p}x-\left(\frac{1}{m}x+\frac{1}{n}x\right)=1$; folglich $x=\frac{mnp}{mn-mp-np}$ Stunden.

169. Da Kreise im quadratischen Verhältnisse ihrer Halbmesser stehen, so verhalten sich die beiden Öffnungen, wie

$$(1\tfrac{1}{2})^2:(3\tfrac{1}{2})^2=9:49.$$

Die Geschwindigkeiten der Wasserströme verhalten sich, wie 7:9. Weil nun die Quantität Wasser, welche jede Röhre giebt, im geraden Verhältnisse mit der Größe der Öffnung und im geraden mit der Geschwindigkeit steht, so verhalten sich also beide Wassermengen für einen gleichen Zeitraum, wie 9.7:49.9=1:7. Es fließe nun aus der ersten Öffnung x *l*, so fließt aus der andern in derselben Zeit (x+1458). Hieraus ergiebt sich folgende Proportion: x:(x+1458)=1:7; woraus folgt, daß x=243 *l* aus der einen und (1458+243) =1701 *l* aus der andern.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Nach den in der ersten Auflösung angestellten Betrachtungen verhalten sich beide Wassermengen für einen gleichen Zeitraum wie 1:7. Da nun die erste Öffnung 1458 *l* mehr ausschütten müßte, um in derselben Zeit soviel auszuschütten, wie die zweite, so müssen 1458 *l* den 6 Verhältnisteilen gleich sein, also ein Teil=243; es gab daher die erste Öffnung 1.243=243 und die zweite 7.243=243+1458=1701 *l*.

170. Die Schritte beider Fußgänger verhalten sich hinsichtlich ihrer Größe, wie 5:6 und hinsichtlich ihrer Anzahl in derselben Zeit, wie 7:6. Es verhalten sich demnach die zurückgelegten Wege beider, wie 5.7:6.6=35:36. Der erste mache im ganzen x Schritte, so macht der zweite nicht allein die x Schritte des ersten, sondern auch die 200 Schritte, die der erste bis zur Erreichung des Ortes B noch machen muß; im ganzen macht der zweite also (x+200) Schritte des ersten. Es ist daher: x:(x+200)=35:36. Hieraus ergiebt sich x=7000 Schritte, die der erste und $\frac{5}{6}\times7200=6000$ Schritte, die der zweite macht.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da sich die zurückgelegten Wege beider Fußgänger wie 35:36 verhalten, so ergiebt sich hieraus, daß der zweite bei Zurücklegung des Weges von A nach B dem ersten $\frac{1}{35}$ seiner Schritte abgewann. Der zweite machte nun im ganzen 200 Schritte des ersten in derselben Zeit mehr; also hatte der erste noch $\frac{1}{35}$ seiner Schritte=200 zu machen; mithin mußte er von A bis B 35.200=7000 Schritte machen und der zweite $\frac{6}{7}\times7000=6000$ Schritte.

171. Der Fleiß beider Maurer steht in dem Verhältnisse, wie 4:5; ihre Ausdauer, wie 10:9. Da nun das Verhältnis der Arbeit der beiden Maurer aus den Verhältnissen ihres Fleißes und ihrer Ausdauer zusammengesetzt ist, so verhalten sich ihre gegenseitigen Arbeiten, wie 4.10:5.9=8:9. Der erste Arbeiter mache nun x *cbm*, so macht der zweite (34−x) *cbm*, welches folgende Proportion giebt: x:(34−x)=8:9; folglich x=16 *cbm* der erste, (34−16)=18 *cbm* der zweite.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Da sich ihre gegenseitigen Arbeiten wie 8:9 verhalten, so kommen bei 8+9=17 *cbm* hiervon auf den ersten 8 und auf den zweiten 9. So oft sie nun 17 *cbm* zu machen haben, muß der eine 8 und der andere 9 davon machen; dies ist 34:17=2mal der Fall; folglich macht der eine 2.8=16 und der andere 2.9=18 *cbm*.

172. *a*) Das Gras, welches während des Abweidens gewachsen, sei=x; so fressen 8 Pferde in 7 Wochen (40+x) *ha* Gras, also 1 Pferd in 1 Woche $\frac{40+x}{56}$ *ha*. Bei gleichem Futter weiden 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 50 *ha* ab; es verhalten sich demnach die beiden Wiesen hinsichtlich ihrer Größe, wie 40:50 oder wie 4:5; dagegen die Zeiten, in denen geweidet wird und das Gras nachwächst, wie 7:8; demnach verhalten sich die gegenseitigen Grasnachwüchse wie 28:40 oder wie 7:10. Es wachsen also auf der zweiten Wiese $\frac{10}{7}$x *ha* nach. Die 9 Pferde weiden daher in 8 Wochen (50+$\frac{10}{7}$x) *ha* ab; also in 1 Woche $\frac{1}{72}$(50+$\frac{10}{7}$x)= $\frac{350+10x}{504}$ *ha*. Da nun 1 Pferd in jeder Woche gleich viel abweidet, so ist: $\frac{40+x}{56}=\frac{350+10x}{504}$; folglich x=10 *ha*; mithin weidete 1 Pferd in 1 Woche $\frac{40+10}{56}=\frac{25}{28}$ *ha* ab.

Die erste Wiese von 40 *ha* verhält sich ferner zur dritten von 60 *ha* hinsichtlich ihrer Größe, wie 2:3, und die Zeiten, in welchen geweidet wird, wie 7:12; also verhalten sich die Grasnachwüchse wie 7:18. Während auf den 40 *ha* bei der Weidezeit 10 *ha* Gras nachwuchsen, wachsen auf der dritten Wiese $\frac{18.10}{7}=\frac{180}{7}$ *ha* nach. Im ganzen wuchsen demnach auf der dritten Wiese (60+$\frac{1}{7}$.180) *ha* in 12 Wochen, also in 1 Woche $\frac{600}{84}$ *ha*. Da nun 1 Pferd in 1 Woche $\frac{25}{28}=\frac{75}{84}$ *ha* abweidet, so können $\frac{600}{84}:\frac{75}{84}$=8 Pferde 12 Wochen lang auf 60 *ha* weiden.

Zweite Auflösung. Das Gras, das während des Ab-

weidens in 1 Woche auf 1 *ha* nachwächst, sei x, so wächst in 7 Wochen auf 40 *ha* 280x nach. Es verzehrt demnach 1 Pferd in 1 Woche $\frac{40+280x}{56}$ *ha* Gras. Da bei gleichem Futter 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 50 *ha* abweiden, so weidet 1 Pferd in 1 Woche $\frac{50+400x}{72}$ *ha*. Es ist demnach $\frac{40+280x}{56}=\frac{50+400x}{72}$; folglich $x=\frac{1}{28}$ *ha*; mithin weidete 1 Pferd in 1 Woche $(40+280.\frac{1}{28}):56=\frac{25}{28}$ *ha*; also in 12 Wochen $12.\frac{25}{28}=\frac{75}{7}$ *ha*. Nun wachsen auf 60 *ha* in 12 Wochen $60+\frac{180}{7}=\frac{600}{7}$ *ha* Gras, worauf $\frac{600}{7}:\frac{75}{7}=8$ Pferde 12 Wochen lang weiden können. Eine dritte Auflösung dieses Beispiels ergiebt sich aus 172. β).

β) Setzt man hier 8 Pferde=a, 7 Wochen=c, 40 *ha*=b, 9 Pferde=d, 8 Wochen=f, 50 *ha*=e, 12 Wochen=h und 60 *ha*=g, so kann man sich jede der zwei Zahlen a und d als der Pferde, welche das Gras der Wiesen b und e während der Zeiten c und f abfressen, in zwei Teile geteilt vorstellen. Die ersten Teile fraßen das Gras, das im Anfange bereits dastand; und diese Teile stehen in geradem Verhältnis der Größe der Wiesen und im umgekehrten Verhältnisse der Zeiten, in welchen sie dieselben abweiden. Die zweiten Teile verzehrten das Gras, das während jener Zeit nachwuchs, und diese stehen in dem zusammengesetzten Verhältnis aus dem geraden des abzuweidenden Grases und dem umgekehrten der hierzu gebrauchten Zeit. Nun ist aber das Gras, das diese zweiten Abteilungen von Pferden abzuweiden haben, im zusammengesetzten Verhältnisse der Größe der Wiesen und der Zeiten, während welchen das Gras darauf wächst. Folglich stehen jene zweiten Teile im einfachen geraden Verhältnis der Größe der Wiesen. Zunächst ist also jede der zwei gegebenen Größen a und d so in zwei Teile zu teilen, daß ein Teil von a zu einem Teile von d das gegebene Verhältnis $\frac{b}{c}$ zu $\frac{e}{f}$ und der andere Teil von a zu dem andern Teile von d das gegebene Verhältnis b zu e habe. Ist nun der erste Teil von a=x, so ist der andere a−x, der erste von $d=\left(\frac{e}{f}:\frac{b}{c}\right)x=\frac{ec}{fb}x$ und der andere $(d-\frac{ec}{fb}x)$ und man erhält also:

$$(a-x):(d-\frac{ec}{fb}x)=b:e,$$

woraus folgt, daß $x=\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)}$, und daher ist

$$a-x=a-\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)}=\frac{bdf-aec}{e(f-c)};$$

$$\frac{ec}{fb}x=\frac{ecf(ae-bd)}{fbe(f-c)}=\frac{c(ae-bd)}{b(f-c)} \text{ und}$$

$$d-\frac{ec}{fb}x=d-\frac{ecf(ae-bd)}{fbe(f-c)}=\frac{dbf-aec}{b(f-c)}.$$

Angenommen nun es könnten x Pferde h Wochen lang auf einer Wiese von g *ha* weiden, so zerlege man x wieder in zwei Teile, etwa y und z, so daß $y+z=x$, und stelle sich vor, der eine Teil verzehre das vorgefundene Gras und der andere das nachwachsende, so hat man:

$$\frac{b}{c}:\frac{g}{h}=\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)}:y, \text{ oder } \frac{b}{c}y=\frac{g}{h}\cdot\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)},$$

woraus folgt, daß $y=\frac{cg}{bh}\cdot\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)}$.

Ferner ist $b:g=\frac{bdf-aec}{e(f-c)}:z$, woraus sich ergiebt, daß

$$z=\frac{g}{b}\cdot\frac{bdf-aec}{e(f-c)};$$

folglich ist $y+z=x=\frac{cg}{bh}\cdot\frac{f(ae-bd)}{e(f-c)}+\frac{g}{b}\cdot\frac{bdf-aec}{e(f-c)}=$

$$\frac{cgf(ae-bd)+gh(bdf-aec)}{beh(f-c)}=\frac{bdgf(h-c)-aceg(h-f)}{beh(f-c)}.$$

Setzt man in diese Formel die Werte ein, so hat man:

$$x=\frac{40.9.60.8.(12-7)-8.7.50.60.(12-8)}{40.50.12.(8-7)}=8 \text{ Pferde.}$$

173. Die erste Maschine habe x Pferdekraft, so hat die zweite $54-x$. Die erste hebt in 1 Minute $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$ *hl* 155 *m* oder 1 *hl* 341 *m* hoch, also 1 Pferdekraft $\frac{341}{x}$ *m* hoch. Die zweite hebt in 1 Minute 1 *hl* $272\frac{4}{5}$ *m* hoch, also 1 Pferdekraft $\frac{272\frac{4}{5}}{54-x}$ *m* hoch. Hieraus ergiebt sich: $\frac{341}{x}=\frac{272\frac{4}{5}}{54-x}$; folglich $x=30$ Pferde ersetzen die erste und $54-30=24$ Pferde die zweite Maschine.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die erste Maschine hebt in 1 Minute 1 *hl* 341 *m* und die zweite $272\frac{4}{5}$ *m* hoch; also heben sie zusammen 1 *hl* $341+272\frac{4}{5}=612\frac{4}{5}$ *m* hoch. Statt der Maschine sollen nun aber 54 Pferde 1 *hl*

Wasser in 1 Minute auf dieselbe Höhe bringen; also sind statt der ersten Maschine (341.54):613$\frac{4}{5}$=30 Pferde und statt der zweiten (272$\frac{4}{5}$.54):613$\frac{4}{5}$=24 Pferde zu nehmen.

174. Die erste Maschine hebt in 6 Minuten 13 *hl* 168 *m*, also in 1 Minute 1 *hl* auf 364 *m*. Die zweite hebt in 3 Minuten 10 *hl* auf eine Höhe von 72 *m*, also in 1 Minute 1 *hl* auf eine Höhe von 240 *m*. Der Wasserbehälter werde nun in einer Höhe von x *m* über der Sohle angebracht, so hebt die erste Maschine auf diese Höhe in 1 Minute $\frac{364}{x}$ *hl*, welche die zweite auf eine Höhe von $\frac{240x}{364}$ *m* hebt. Beide Maschinen heben also die Masse $x+\frac{240x}{364}$ *m* hoch und da sie das Wasser aus einer Tiefe von 276$\frac{5}{6}$ *m* zu heben haben, so ist: $x+\frac{240}{364}x=276\frac{5}{6}$; folglich $x=166\frac{5}{6}$ *m*.

Zweite Auflösung. Die erste Maschine hebt, wenn x denselben Wert behält, auf die verlangte Höhe $\frac{364}{x}$ *hl*; nun muß die andere Maschine die Wassermenge $(276\frac{5}{6}-x)$ *m* hoch heben, auf welche Höhe sie $\frac{240}{276\frac{5}{6}-x}$ *hl* bringt. Da nun beidemale dieselbe Wassermenge gehoben wird, so ist:

$$\frac{364}{x}=\frac{240}{276\frac{5}{6}-x};\ \text{also}\ x=166\frac{5}{6}\ m.$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die erste Maschine hebt 1 *hl* in 1 Minute 364 *m* hoch, und die zweite ebensoviel in derselben Zeit 240 *m* hoch; demnach verhalten sich die Höhen, worauf beide Maschinen 1 *hl* in 1 Minute bringen, wie 364 : 240 oder wie 91 : 60. Ist also das Wasser auf eine Höhe von 91+60=151 *m* zu bringen, so muß die eine es 91 *m* hoch heben und die andere 60 *m*. Nun soll das Wasser aber 276$\frac{5}{6}$ *m* hoch gehoben werden; folglich hat die erste Maschine es $\frac{276\frac{5}{6}}{151}\times 91=166\frac{5}{6}$ *m* und die andere $\frac{276\frac{5}{6}}{151}\times 60=110$ *m* hoch zu bringen. Deshalb muß der Wasserbehälter 166$\frac{5}{6}$ *m* über der Sohle angebracht werden.

175. Die erste Maschine bringt in 5 Std. 144 Tonnen auf eine Höhe von 125 *m*, daher in 1 Std. 144×25=3600 Tonnen 1 *m* hoch. Die zweite Maschine hebt in 3 Std. 80 Tonnen 180 *m* hoch, also in 1 Std. 80×60=4800 Tonnen 1 *m* hoch. Die Grube sei nun x *m* tief, so hebt die erste Ma-

schine, welche $1\frac{3}{4}+7=8\frac{3}{4}$ Std. arbeitet, aus dieser Tiefe $\frac{3600\times 8\frac{3}{4}}{x}$ Tonnen und die zweite Maschine, die nur 7 Std. arbeitet, $\frac{4800\times 7}{x}$ Tonnen. Da aber die zweite Maschine $11\frac{1}{4}$ Tonnen mehr lieferte, als die erste, so ist:

$$\frac{3600\times 8\frac{3}{4}}{x}+11\frac{1}{4}=\frac{4800\times 7}{x};\ x=186\frac{2}{3}\ m.$$

176. Die erste Maschine hebt in 1 Minute 1 *hl* auf $(87\times 7):2=304\frac{1}{2}$ *m*; die zweite hebt in 1 Minute 1 *hl* auf $(145\times 12):5=348$ *m*; die dritte Maschine hebt in 1 Minute 1 *hl* auf $(108\times 7\frac{1}{4}):3=261$ *m*. In x Minuten mögen alle 3 Maschinen zusammen 2436 *hl* auf eine Höhe von 270 *m* bringen, so bringt die erste Maschine die fraglichen Hektoliter auf $\frac{304\frac{1}{2}x}{2436}$, die zweite auf $\frac{348x}{2436}$ und die dritte auf $\frac{261x}{2436}$ *m*. Es ist demnach:

$$\frac{304\frac{1}{2}x}{2436}+\frac{348x}{2436}+\frac{261x}{2436}=270;\ x=720\ \text{Min.}=12\ \text{Stunden.}$$

Zweite Auflösung. In x Minuten sollen die 3 Maschinen 2436 *hl* 270 *m* hoch bringen, so bringt die erste Maschine in x Minuten $304\frac{1}{2}x$ *hl* 1 *m* hoch, also $\frac{304\frac{1}{2}x}{270}$ *hl* 270 *m* hoch. Die zweite Maschine in x Minuten 348x *hl* 1 *m* hoch, also $\frac{348x}{270}$ *hl* 270 *m* hoch. Die dritte Maschine endlich bringt in x Minuten $\frac{261x}{270}$ *hl* auf die fragliche Höhe. Demnach bringen alle 3 Maschinen zusammen $\left(\frac{304\frac{1}{2}x}{270}+\frac{348x}{270}+\frac{261x}{270}\right)$ *hl* in x Minuten 270 *m* hoch; daher ist:

$$\frac{304\frac{1}{2}x}{270}+\frac{348x}{270}+\frac{261x}{270}=2436;\ x=720\ \text{Min.}=12\ \text{Std.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die erste Maschine hebt in 1 Minute 1 *hl* auf $304\frac{1}{2}$ *m*, die zweite hebt in 1 Minute 1 *hl* auf 348 *m*, die dritte Maschine hebt in 1 Minute 1 *hl* auf 261 *m*, also bringen alle 3 Maschinen in 1 Minute 1 *hl* auf $304\frac{1}{2}+348+261=913\frac{1}{2}$ *m*. Nun sollen alle 3 Maschinen aber 2436 *hl* 240 *m* hoch heben oder 1 *hl* 657720 *m*; da sie 1 *hl* in 1 Minute $913\frac{1}{2}$ *m* hoch fördern, so bringen sie 1 *hl* 657720 *m* hoch in $657720:913\frac{1}{2}=720$ Minuten.

177. Die gesuchte Zeit sei$=$x, so ist

$$\frac{e_1x}{t_1}+\frac{e_2x}{t_2}+\frac{e_3x}{t_3}+\frac{e_4x}{t_4}=E;$$

folglich $x=\dfrac{Et_1t_2t_3t_4}{e_1t_2t_3t_4+e_2t_3t_4t_1+e_3t_4t_1t_2+e_4t_1t_2t_3}$.

c) Aufgaben (178—206).

§. 385c. 178. Die ganze Summe sei nach x Monaten zu bezahlen. Während dieser Zeit muß der Schuldner, um keinen Schaden an Zinsen zu leiden, von der ganzen Summe, 12142 *M*, so viel an Zinsen ziehen, als er auch bekommen würde, wenn er die einzelnen Summen zu den festgesetzten Terminen bezahlt. Bestimmt man also diese Zinsen, so erhält man in der Gleichsetzung beider die erforderliche Gleichung. Zur Bestimmung dieser Zinsen ist es aber notwendig, den Zinsfuß zu kennen, der in der Aufgabe nicht angegeben ist. Weil es aber unter der Voraussetzung, daß bei jedem dieser Kapitalien derselbe Zinsfuß angenommen wird, einerlei ist, welchen Zinsfuß man bei der Rechnung zu Grunde legt, so bestimmt man ihn der Einfachheit wegen dahin, daß 1 *M* in 1 Monat 1 *M* Zinsen bringt. Unter dieser Voraussetzung bringen

2007 *M* in 5 Monaten 5.2007 *M* Zinsen;
3395 „ „ 7 „ 7.3395 „ „
6740 „ „ 13 „ 13.6740 „ „

dagegen bringt die ganze Summe von

12142 *M* in x Monaten 12142x *M* Zinsen.

Es ist demnach: $12142x = 5.2007 + 7.3395 + 13.6740$; folglich $x=10$ Monate, nach welchen die ganze Schuld auf einmal abgetragen werden kann, ohne daß weder dem Schuldner noch dem Gläubiger Schaden erwächst.

179. Man entrichte nach x Monaten die ganze Summe auf einmal, so ist

$$x(a+b+c+d+e)=ap+bq+cr+ds+et;$$

folglich $x=\dfrac{ap+bq+cr+ds+et}{a+b+c+d+e}$ Monaten.

180. Die letzte Summe betrage x *Fl*, so ist die ganze Summe $=(1013+431+x)=(1444+x)$ *Fl*. Wenn er diese nach $6\frac{1}{4}$ Monaten bezahlt, so genießt er an Zinsen, wenn man annimmt, daß 1 *Fl* in 1 Monat auch 1 *Fl* Zinsen giebt, $6\frac{1}{4}(1444+x)$. Bezahlt der Schuldner dagegen in den einzelnen Terminen, so genießt er bei gleichem Zinsfuße an Zinsen

von 1310 *Fl* in $3\frac{1}{2}$ Monat $3\frac{1}{2}.1013$ *Fl*;
" 431 " " $7\frac{1}{2}$ " $7\frac{1}{2}.431$ "
" x " " $11\frac{1}{2}$ " $11\frac{1}{2}x$ "

Im ganzen betragen also in diesem Falle die Zinsen
$(3\frac{1}{2}.1013+7\frac{1}{2}.431+11\frac{1}{2}x)$ *Fl*
und da diese den ersteren gleich sein müssen, so hat man:
$$6\tfrac{1}{4}(1444+x)=3\tfrac{1}{2}.1013+7\tfrac{1}{2}.431+11\tfrac{1}{2}x;$$
folglich $x=428$ *Fl.*

181. Er mag den Rest von 200 *M* noch x Monate lang behalten. Bezahlt er die ganze Summe von 1980 *M* nach $5\frac{1}{2}$ Monaten, so genießt er, unter der Voraussetzung, daß 1 *M* in 1 Monat 1 *M* Zinsen bringt, $5\frac{1}{2}.1980$ *M* Zinsen. Bei demselben Zinsfuße genießt er bei Bezahlung in den einzelnen Terminen
$(440.3+550.4\frac{1}{2}+770.6\frac{1}{2}+220x)$ *M* an Zinsen.
Es ist daher
$$5\tfrac{1}{2}.1980=440.3+550.4\tfrac{1}{2}+770.6\tfrac{1}{2}+220x;$$
folglich $x=9\frac{1}{2}$ Monate, als dem fraglichen Termine zur Bezahlung des Restes von 220 *M* oder $9\frac{1}{2}-6\frac{1}{2}=3$ Monate später hat er den letzten Termin zu bezahlen.

182. Die erste Zahlung beginne nach x Monaten, so bringen unter dem bisher angenommenen Zinsfuße:
$\frac{1}{4}$ der Summe in x Monaten $\frac{1}{4}.x$ Zinsen;
$\frac{1}{4}$ " " " $x+3$ " $\frac{1}{4}(x+3)$ "
$\frac{1}{4}$ " " " $x+6$ " $\frac{1}{4}(x+6)$ "
$\frac{1}{4}$ " " " $x+9$ " $\frac{1}{4}(x+9)$ "
Die Zinsen betragen demnach im ganzen
$$\tfrac{1}{4}(x+x+3+x+6+x+9)=\tfrac{1}{4}(4x+18).$$
Diese Zinsensumme muß nun derjenigen gleich sein, die in 10 Monaten ein Kapital, das man als 1 annehme, bei gleichem Zinsfuße bringt.
Es ist daher:
$\frac{1}{4}(4x+18)=10.1$; folglich $x=5\frac{1}{2}$ Monate,
nach welchen der erste Zahlungstermin beginnt.

183. Nach der vorhergehenden Auflösung hat man:
$$324.x+384(x+3)+530(x+5)+460(x+6\tfrac{1}{2})= 4\tfrac{1}{2}.1698;$$ folglich $x=\frac{1}{2}$ Monat.

184. Die Termine, in welchen die Zahlungen erfolgen sollen, seien zu x Monaten festgesetzt. Bezahlt er das Haus gemäß der Bedingung, so genießt er noch die Zinsen von 18900 *Frc* auf 15 Monate, welche unter dem bisher angenommenen Zinsfuße 18900.15 *Frc* betragen. Diese müssen nun den Zinsen gleich sein, die er genießt, wenn er die 18900 *Frc* in den angegebenen Raten zu den angegebenen Terminen bezahlt. Er genießt daher an Zinsen

von	2100 *Frc*	in	3	Monaten	3.2100 *Frc*
„	3360 „	„	(x+3)	„	(x+3)3360 „
„	3360 „	„	(2x+3)	„	(2x+3)3360 „
„	3360 „	„	(3x+3)	„	(3x+3)3360 „
„	3360 „	„	(4x+3)	„	(4x+3)3360 „
„	3360 „	„	(5x+3)	„	(5x+3)3360 „

im ganzen also: $3360(15x+15)+3.2100$ *Frc.*

Es ist daher: $3.2100+3360(15x+15)=18900.15$; folglich $x=4\frac{1}{2}$ Monat.

185. Nach den bei Auflösung von 182 und 184 angestellten Betrachtungen hat man, wenn der erste Termin x Monate umfaßt:

$\frac{1}{4}(10x+25)=10.1$; folglich $x=1\frac{1}{2}$ Monat.

186. Der erste Termin werde nach x Monaten angesetzt, so bezahlt er

die erste	Rate	von	200 *Fl*	nach	x Monaten;
„ zweite	„	„	300 „	„	$2x+1\frac{1}{2}$ „
„ dritte	„	„	400 „	„	$3x+4\frac{1}{2}$ „
„ vierte	„	„	500 „	„	$4x+9$ „
„ fünfte	„	„	600 „	„	$5x+15$ „

Hiervon genießt er an Zinsen $[200x+300(2x+1\frac{1}{2})+400(3x+4\frac{1}{2})+500(4x+9)+600(5x+15)]$ *Fl.* Da diese Zinsen denen von 2000 *Fl* in 14 Monaten gleich sein müssen, so ist:

$200x+300(2x+1\frac{1}{2})+400(3x+4\frac{1}{2})+500(4x+9)+600(5x+15)=2000.14$; folglich $x=1\frac{3}{4}$ Monat.

187. Die Summe, die er nach dem ersten Termine bezahlt, sei x *M*, so beträgt die ganze zu bezahlende Summe

$(x+x+100+x+200+x+300)=(4x+600$ *M*.

Hiervon genießt er in der Zeiteinheit $1(4x+600)$ *M* Zinsen. Ebenso viele Zinsen muß er genießen, wenn er die Summe in Raten von

x *M*	in	$\frac{1}{3}$	der	festgesetzten Zeit
(x+100) „	„	$\frac{2}{3}$ „	„	„
(x+200) „	„	1 „	„	„
(x+300) „	„	$1\frac{1}{3}$ „	„	„

bezahlt. Es ist demnach

$\frac{1}{3}.x+\frac{2}{3}(x+100)+1(x+200)+1\frac{1}{3}(x+300)=1(4x+600)$; folglich $x=100$. *M*. Die zu bezahlende Summe beträgt also

$(4.100+600)=1000$ *M*.

188. In Beziehung auf den Anteil, den jeder am Gewinn hat, gilt es gleich, ob man denkt, A habe 600 *M* 4 Monate, B 480 *M* 6 Monate und C 360 *M* 8 Monate zum Geschäfte hergegeben, oder ob man denkt, A habe mit einem 4mal so großen Kapitale, also mit 4.600 *M*, B mit einem 6mal so großen Kapitale, also mit 6.480 *M*, C mit einem

8mal so großen Kapitale, also mit 8.360 M 1 Monat lang sich am Handel beteiligt. Ihre Einlagen verhalten sich daher wie 4.600:6.480:8.360=5:6:6. A erhalte nun vom Gewinn x M, so bekommt B $1\frac{1}{5}$x und C ebenso $1\frac{1}{5}$x M vom Gewinn. Da der Gewinn 408 M beträgt, so ist: $x+2.1\frac{1}{5}x=408$; folglich x=120 M für A; $1\frac{1}{5}.120=144$ für B und ebenso viel für C.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Mit 2400+2.2880=8160 M gewinnen sie 408 M, also gewinnen sie mit 1 M $\frac{1}{20}$ M; folglich erhält A vom Gewinn $2400.\frac{1}{20}=120$ M, B $2880.\frac{1}{20}=144$ M und ebenso viel C.

189. Nach der Bestimmung des Erblassers sollen die Anteile der Tochter und Mutter sich wie 2:3 und die der Mutter und des Sohnes wie 2:3 verhalten, folglich verhalten sich die Anteile der Tochter und des Sohnes wie 2.2:3.3 =4:9. Nun verhalten sich die Anteile der Mutter und des Sohnes wie 2:3 oder wie 6:9 und die der Mutter und Tochter wie 3:2 oder wie 6:4; mithin verhalten sich die Anteile der Tochter, der Mutter und des Sohnes wie 4:6:9. Erhält also die Tochter x M, so erhält die Mutter $\frac{6}{4}$x und der Sohn $\frac{9}{4}$x M. Da sie aber 3800 M zu teilen haben, so ist
$x+\frac{6}{4}x+\frac{9}{4}x=3800$; folglich x=800 M für die Tochter, $\frac{6}{4}.800=6.200=1200$ M für die Mutter und $\frac{9}{4}.800=$ 1800 für den Sohn.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Nach der vorigen Auflösung verhalten sich die Anteile der 3 Personen wie 4:6:9. Von je 19 M also, die zur Verteilung kommen, erhält die Tochter so oft 4, als die Mutter 6 und der Sohn 9 erhält. Es sind 3800=19×200 M zu teilen; folglich erhält die Tochter 4.200=800 M; die Mutter 6.200=1200 und der Sohn 9.200=1800 M.

190. Wenn A 1500 *kg* 75 *km* weit fährt, so gebührt ihm hierfür ebensoviel Fuhrlohn, als wenn er 112500 *kg* 1 *km* weit fährt. Ebenso müssen B für die Fortschaffung von 600 *kg* $112\frac{1}{2}$ *km* weit und C für Fortschaffung von 1250 *kg* 60 *km* weit ebensoviel an Fracht haben, als wenn B 67500 *kg* und C 75000 *kg* 1 *km* weit gefahren hätten. A erhalte nun vom Verdienste x M, so bekommt B $\frac{3}{5}$x und C $\frac{2}{3}$x M vom Verdienste. Man hat also:

$x+\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}x=408$, folglich x=180 M für A, 108 M für B und 120 M für C.

191. Der Arbeiter A verdient in 9.8=72 Stunden soviel, als B in 7.10=70 Stunden. A erhalte vom Verdienste x M, so erhält B $\frac{36}{35}$x M. Man hat also: $x+\frac{36}{35}x=49{,}70$; folglich x=24,50 M für A und $\frac{36}{35}\times24{,}50=25{,}20$ M für B.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der eine A verdient in 72 Stunden soviel, als der andere B in 70 oder A in 36 soviel, als B in 35. Beide müssen also zusammen 36+35=71=2.35+1 Stunde arbeiten, um gleich viel zu verdienen. Arbeiten sie aber gleich viel Stunden täglich, so verliert A in jeden 2.35 Stunden den Lohn einer Stunde, der dem Arbeiter B zukommt. Demnach verhalten sich in diesem Falle die Anteile am Lohn wie 35:36. Während also A 35 *M* vom gemeinschaftlichen Lohn erhält, bekommt B 36 *M* für dieselbe Arbeitszeit. Hiernach erhält A $\frac{49{,}70}{71} \times 35 = 0{,}70 \times 35 = 24{,}50$ *M* und B $\frac{49{,}70}{71} \times 36 = 0{,}70 \times 36 = 25{,}20$ *M*.

192. Die Einlagen der drei Kaufleute verhalten sich zu einander, wie

$$2970 : 6930 : 3080 = 297 : 693 : 308.$$

B habe x *Fl* am Verluste zu tragen, so hat A, da sie kontraktmäßig den Verlust im umgekehrten Verhältnisse ihrer Einlagen zu tragen haben, $693x : 297 = 2\frac{1}{3}x$ *Fl* und C $693x : 308 = 2\frac{1}{4}x$ *Fl* am Verluste zu tragen. Da der Verlust 2345 *Fl* beträgt, so ist also:

$x + 2\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{4}x = 2345$; folglich $x = 420$ *Fl* für B,
980 *Fl* für A und 945 *Fl* für C.

193. A handelt anfangs 6 Monate allein, und nach der Vereinigung mit B und C 10 Monate, also im ganzen 16 Monate lang mit 3000 *Fl*. D kauft dem A 1200 *Fl* ab, also hat er während der 8 Monate vor der Aufnahme von E nur 1800 *Fl* im Handel. E kauft dem A 200 *Fl* ab, also handelt er 4 Monate mit 1600 *Fl*, oder kurz

A	beteiligte	sich	am	Handel	16	Monate	mit	3000 *Fl*
"	"	"	"	"	8	"	"	1800 "
"	"	"	"	"	4	"	"	1600 "
B	"	"	"	"	10	"	"	1800 "
"	"	"	"	"	8	"	"	1400 "
"	"	"	"	"	4	"	"	1200 "
C	"	"	"	"	22	"	"	2000 "
D	"	"	"	"	12	"	"	2200 "
E	"	"	"	"	4	"	"	1400 "

Nach den in der Auflösung zu 188 gemachten Schlüssen handelte

A	einen	Monat	lang	mit 68800 *Fl*
B	"	"	"	" 34000 "
C	"	"	"	" 44000 "
D	"	"	"	" 26400 "
E	"	"	"	" 5600 "

E erhalte nun vom Gewinne x *Fl*, so erhält D $\frac{33x}{7}$,

C $\frac{55x}{7}$, B $\frac{85x}{7}$ und A $\frac{86x}{7}$ *Fl.* Außerdem soll aber A noch $12\frac{1}{2}$ pCt. seines Anteils $=\frac{43x}{28}$ und C 5 pCt. seines Anteils $=\frac{11x}{28}$ *Fl* vom Gewinne mehr bekommen. A erhält daher im ganzen $\left(\frac{86x}{7}+\frac{43x}{28}\right)$ *Fl* und C $\left(\frac{55x}{7}+\frac{11x}{28}\right)$ *Fl.* Es ist also: $x+\frac{33x}{7}+\frac{55x}{7}+\frac{11x}{28}+\frac{85x}{14}+\frac{86x}{7}+\frac{43x}{28}=13272$; $x=392$ *Fl* für E; daher 1848 *Fl* für D, 3234 *Fl* für C, 2380 *Fl* für B und 5418 *Fl* für A.

Zweite (arithmetische) Auflösung. A soll $12\frac{1}{2}$ pCt. $=\frac{1}{8}$ und C 5 pCt. $=\frac{1}{20}$ mehr erhalten, als ihnen sonst nach dem Verhältnisse ihrer Einlagen zukommen würde. Demnach hat A den Gewinn von $68800+\frac{1}{8}\cdot 68800=77400$ und C von $44000+\frac{1}{20}\cdot 44000=46200$ *Fl* zu beanspruchen. Mit $77400+34000+46200+26400+5600=189600$ *Fl* gewinnen sie nun 13272 *Fl*, also mit 1 *Fl* $\frac{7}{100}$ *Fl*; folglich erhält vom Gewinne A $77400\cdot\frac{7}{100}=5418$; B $34000\cdot\frac{7}{100}=2380$; C $46200\cdot\frac{7}{100}=3234$; D $26400\cdot\frac{7}{100}=1848$ und E $5600\cdot\frac{7}{100}=392$ *Fl.*

194. A habe x Stück 12 Wochen oder 12x Stück 1 Woche, so hat B x+11 Stück 10 Wochen oder 10(x+11) Stück 1 Woche lang auf die Weide getrieben. Giebt nun C für 50 Stück, die 13 Wochen lang weiden, $97\frac{1}{2}$ *Fl*, so giebt er für 1 Stück in 1 Woche $\frac{3}{20}$ *Fl.* Ebensoviel müssen A und B für jedes Stück in jeder Woche geben; deshalb hat A $\frac{3}{20}\cdot 12x$ und C $\frac{3}{20}\cdot(10x+110)$ *Fl* oder beide zusammen $\frac{3}{20}(12x+10x+110)$ *Fl* zu bezahlen. Es ist daher:

$$\frac{3}{20}\cdot(22x+110)=180-97\tfrac{1}{2};$$

folglich x=20 Stück Vieh für A, wofür er $\frac{3}{20}\cdot 12\cdot 20=36$ *Fl*, und B 31 Stück Vieh, wofür er $46\frac{1}{2}$ *Fl* bezahlte.

Zweite (arithmetische) Auflösung. C bezahlt $97\frac{1}{2}$ *Fl*; also bezahlen A und B $180-97\frac{1}{2}=82\frac{1}{2}$ *Fl.* C hat 50 Stück 13 Wochen lang auf die Weide getrieben und dafür $97\frac{1}{2}$ *Fl* gegeben; folglich bezahlte er für 1 Stück in 1 Woche $\frac{3}{20}$ *Fl.* Nun hat B 11 Stück mehr als A 10 Wochen lang weiden lassen, B muß also auch hierfür soviel mehr bezahlen als A. Er bezahlte hierfür $11\cdot\frac{3}{20}\cdot 10=16\frac{1}{2}$ *Fl* mehr als A, und es bleiben für A und B noch gemeinschaftlich $82\frac{1}{2}-16\frac{1}{2}=66$ *Fl* zu bezahlen, wovon jeder die Hälfte zu bezahlen hätte, wenn sie bei gleicher Anzahl Vieh auch gleiche Zeit die Wiese benutzt hätten. Nun hat aber A sein Vieh 12 Wochen und B das seinige nur 10 Wochen

weiden lassen; also verteilen sich die 66 *Fl* in dem Verhältnisse von 6 : 5, d. h.: Wenn A 6 *Fl* davon bezahlt, braucht B nur 5 *Fl* zu bezahlen; somit kommen von den 66 *Fl* auf A $\frac{66}{11}\times 6 = 36$ *Fl* und auf B $\frac{66}{11}\times 5 = 30$ *Fl*. Demnach hat B im ganzen $16\frac{1}{2}+30=46\frac{1}{2}$ *Fl* zu bezahlen. A hatte $36:\frac{3\,.\,12}{20}=20$ Stück und B $46\frac{1}{2}:\frac{3\,.\,10}{20}=31$ Stück Vieh.

195. Cajus giebt 7 und Sempronius 8 Schüsseln, also zusammen 15 Schüsseln zu der Mahlzeit. Kommt nun Titus hinzu, so ißt dieser mit von den $15=3\,.\,5$ Schüsseln und erhält vom Sempronius 3 und vom Cajus 2 Schüsseln. Sempronius erhalte nun von der Belohnung x Silberlinge, so erhält Cajus $\frac{2}{3}x$. Es ist demnach: $x+\frac{2}{3}x=30$; folglich $x=18$ Silberlinge für Sempronius und 12 für Cajus.

196. Der erste Knabe giebt 17, der zweite 14 und der dritte 11, also zusammen 42 Pflaumen. Da sich ihnen ein vierter zugesellt, und sie die Pflaumen zu gleichen Teilen verzehren, so kam auf jeden Knaben $10\frac{1}{2}$ Pflaume. Der erste gab also dem vierten $17-10\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}$, der zweite $14-10\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ und der dritte $11-10\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Pflaume. Zum Danke schenkte der vierte Knabe den 3 andern 42 Nüsse und es fragt sich nun, wieviel jedem davon gebührt. Die Pflaumen, welche die 3 Knaben der Reihe nach dem vierten gegeben haben, stehen in dem Verhältnisse von $6\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=13:7:1$. Von je 21 Nüssen also, die zur Verteilung kommen, gebühren dem ersten 13, dem zweiten 7 und dem dritten 1. Nun sollen $42=2\,.\,21$ Nüsse verteilt werden; also erhält der erste $2\,.\,13=26$, der zweite $2\,.\,7=14$ und der dritte $2\,.\,1=2$ Nüsse. Von $(a+b+c)$ erhält jeder den 4. Teil, also $\frac{1}{4}(a+b+c)$; folglich gab der erste $a-\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{1}{4}(3a-b-c)$; der zweite $\frac{1}{4}(3b-a-c)$; der dritte $\frac{1}{4}(3c-a-b)$; demgemäß verhalten sich auch die Anteile der Belohnung also wie $\frac{1}{4}(3a-b-c):\frac{1}{4}(3b-a-c):\frac{1}{4}(3c-a-b)$ oder wie $(3a-b-c):(3b-a-c):(3c-a-b)$. Erhält also der erste x, so erhält der zweite $\frac{3b-a-c}{3a-b-c}x$ und der dritte $\frac{3c-a-b}{3a-b-c}x$; es ist daher $x+\frac{3b-a-c}{3a-b-c}x+\frac{3c-a-b}{3a-b-c}x=a+b+c$; folglich $x=3a-b-c$ u. s. w.

197. Die gesuchte Zahl sei x, so ist $(3+x):(7+x)=3:4$; daher

$$4(3+x)=3(7+x);\ \text{folglich}\ x=9.$$

198. Die Zahl, um welche man die beiden Glieder vermehren oder vermindern muß, sei x, so ist:
$(339\pm x):(355\pm x)=21:22$; $22(339\pm x)=21(335\pm x)$;

$\pm 22x \mp 21x = -3$ oder $x = -3$ und gelten die untern Zeichen, so ist $-x = +3$, also ebenfalls $x = -3$; folglich müssen die Glieder um 3 vermindert werden.

199. Die gesuchte Zahl heiße x, so ist

$$\frac{70-x}{87-x} = \tfrac{3}{4}; \text{ folglich } x = 19.$$

200. Angenommen, ich lege den Weg von B nach C in x Stunden zurück, so gebrauche ich von A nach C $2\frac{1}{2}+x$ und von B nach D $5+x$ Stunden. Da nun die Zeit, die ich von A nach C gebrauche, sich zu der verhält, die ich von B nach D nötig habe, wie 3 : 5, so erhält man folgende Proportion: $(2\frac{1}{2}+x):(5+x) = 3:5$; also $5(2\frac{1}{2}+x) = 3(5+x)$; folglich $x = 1\frac{1}{4}$ Stunde brauche ich zu dem Wege von B nach C.

Zweite Auflösung.

A B C D

Wenn ich bei gleichmäßigem Gehen über AB $2\frac{1}{2}$ Stunde und über CD 5 Stunden gebrauche, so folgt daraus, daß $CD = 2AB$ sein muß. Da ferner die Zeiten, die ich zur Zurücklegung des Weges AC und BD nötig habe, sich wie 3 : 5 verhalten, so ist also $AC : BD = 3 : 5$, oder da $AC = AB + BC$ und $BD = BC + CD = BC + 2AB$, so ist auch $AB + BC : BC + 2AB = 3 : 5$. Hieraus folgt, daß $BC = \frac{1}{2}AB$. Da ich nun zu AB $2\frac{1}{2}$ Stunde gebrauche, habe ich die Strecke BC in $\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$ Std. abgemacht. Oder: Da die Zeiten, die ich zu AB und CD gebrauche, sich wie 1 : 2 verhalten, so fragt es sich, welche Zahl zu den beiden Gliedern dieses Verhältnisses noch addiert werden muß, damit das Verhältnis 3 : 5 entsteht. Nennt man die Zahl x, so ist $(1+x):(2+x) = 3:5$, woraus folgt, daß $x = \frac{1}{2}$; demnach ist AC oder $AB + BC = 1\frac{1}{2}AB$; also $BC = \frac{1}{2}AB$ u. s. w. Oder: Da $BC = \frac{1}{2}AB$ und $CD = 2AB$, so habe ich im ganzen von A nach D ebensoviel an Zeit gebraucht, als hätte ich den Weg AB $3\frac{1}{2}$mal gemacht, was $3\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2} = 8\frac{3}{4}$ Std. giebt. Da ich nun zu $AB + CD$ $7\frac{1}{2}$ Std. gebrauchte, so legte ich den Weg BC in $8\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$ Std. zurück.

201. α) Man mag sie 1) um die Größe x vermehren, so hat man: $(a+x):(b+x) = p:q$; daher; $q(a+x) = p(b+x)$;

$$\text{folglich } x = \frac{aq-bp}{p-q} = \frac{bp-aq}{q-p};$$

2) um dieselbe Größe vermindern, so ist

$(a-x):(b-x) = p:q$; daher: $q(a-x) = p(b-x)$;

$$\text{folglich } x = \frac{bp-aq}{p-q} = \frac{aq-bq}{q-p}.$$

β) Die Zahl sei x, der Unterschied zwischen der ersten Zahl

a und der dritten x ist (a—x), und der Unterschied zwischen der dritten x und der zweiten b ist x—b. Da sich nun diese Unterschiede verhalten sollen, wie die erste Zahl a zur zweiten b, so ist

$(a-x):(x-b)=a:b$; folglich $x=2ab:(a+b)$.

202. Die gesuchte Zahl sei x, so hat man

$x-(a-b):x-(a+b)=a:b$;

daher: $b[x-(a-b)]=a[x-(a+b)]$, oder:

$x(a-b)=a^2+b^2$; $x=(a^2+b^2):(a-b)$.

203. Die Entfernung des Ortes A von B sei x *km*, so hat der Bote, da sich der abgemachte Weg desselben zu dem noch zurückzulegenden wie 2:3 verhält, $\frac{2}{5}x$ *km* abgemacht, dagegen noch $\frac{3}{5}x$ *km* zu machen. Reist er 60 *km* weiter, so hat er $\frac{2}{5}x+60$ *km* zurückgelegt, und es bleiben ihm noch $\frac{3}{5}x-60$ *km* zu machen übrig. Da in diesem Falle obengenanntes Verhältnis in das von 6:5 übergeht, so hat man folgende Proportion: $(\frac{2}{5}x+60):(\frac{3}{5}x-60)=6:5$, woraus $x=412\frac{1}{2}$ *km*.

204. B sei von C x *km* entfernt, so ist, da die Entfernungen BC und CD sich verhalten, wie 2:3, die Entfernung von C nach $D=1\frac{1}{2}x$ *km*, also ist A von C $26\frac{1}{4}+x$ *km* und C von $E=1\frac{7}{8}+1\frac{1}{2}x$ *km*. Diese Entfernungen stehen nun in dem Verhältnisse 3:2, woraus man erhält: $(26\frac{1}{4}+x):(1\frac{7}{8}+1\frac{1}{2}x)=3:2$. Hieraus ergiebt sich für $x=18\frac{3}{4}$ *km* B von C, und es ist C von D $18\frac{3}{4}\times1\frac{1}{2}=28\frac{1}{8}$ *km*.

205. Die gesuchte Zahl sei=x, so heißt das erste Glied m+x und das zweite n—px. Es ist also:

$(m+x):(n-px)=r:s$;

$s(m+x)=r(n-px)$; folglich $x=(nr-ms):(s+pr)$.

206. C habe x *M* verloren, so hatte er nach dem Spiele noch 29—x *M*. Nun verhält sich der Anteil des C zum Gewinne des A wie 3:1, also hatte A $\frac{1}{3}(29-x)$ *M* gewonnen und besaß demnach im ganzen $\frac{1}{3}(59-x)$ *M*. Ferner verhält sich der Anteil des A zu dem des B, wie 1:3, mithin hatte B am Ende des Spieles 59—x *M*. Da während des Spieles kein neues Geld hinzugekommen, so ist:

$29-x+\frac{1}{3}(59-x)+59-x=96$; folglich $x=5$ *M*.

Zweite Auflösung durch die regula falsi. A habe 10 *M* gewonnen, so hatte er am Ende des Spieles 10+10 =20 *M*. Nun verhält sich der Anteil des C zum Gewinne des A, wie 3:1; also hatte C 3×10=30 *M* am Ende des Spieles. Nun verhält sich der Anteil des A zu dem des B wie 1:3, da A 20 *M* hatte, so mußte B 3×20 =60 *M* haben; demnach hatten alle 3 Spieler 20+30+60 =110 *M*. Da während des Spieles kein neues Geld hinzugekommen und sie wirklich nur 10+57+29=96 *M* besaßen, so beträgt der erste aus der falschen Annahme sich er=

gebende Fehler 110—96=14 ℳ. Nimmt man an, A habe 11 ℳ gewonnen, so hatte A 21, C 33 ℳ und B 63 ℳ, also zusammen 21+33+63=117 ℳ; demnach beträgt der zweite Fehler 117—96=21. Es ist also $\alpha_1=10$, $\alpha_2=11$, $\varphi'=14$, $\varphi''=21$; daher ist

$$x=\frac{\varphi'\alpha_2-\varphi''\alpha_1}{\varphi'-\varphi''}=\frac{14.11-21.10}{14-21}=\frac{56}{7}=8 \text{ ℳ}.$$

Also hatte A am Ende des Spieles 10+8=18 ℳ; daher hatte C 3×8=24 ℳ; mithin hatte er 29—24=5 ℳ verloren und B hatte noch 3×18=54 ℳ; er hatte also 57—54=3 ℳ verloren.

d) Mischungs-Aufgaben (207—222).

§ 385 d. 207. Von der besseren Sorte nehme er x *kg*, also von der geringeren 32—x *kg*. Das *kg* der erstern kostet 4 ℳ, also kosten x *kg* auch 4x ℳ; das *kg* der letztern kostet 2,40 ℳ; also 32—x *kg* kosten (32—x)2,40 ℳ. Die 32 *kg* kosten also zusammen 4x+(32—x)2,40 ℳ. Er verkauft 1 *kg* zu 3,40 ℳ, also erhält er für 32 *kg* 32×3,40 ℳ und da er weder gewinnen noch verlieren will, so ist 4x+(32—x).2,40=32×3,40, also x=20 *kg* von der bessern Sorte und 32—20=12 *kg* von der schlechtern Sorte.

208. Man nehme x *kg* von der ersteren Sorte, also a—x *kg* von der zweiten. Die x *kg* der ersten Sorte kosten mx, die a—x *kg* der zweiten kosten (a—x)n und die ganze Mischung ap. Es ist daher

$$mx+(a-x)n=ap;\ \text{daher: } x(m-n)=a(p-n);$$

$$\text{folglich } x=\frac{a(p-n)}{m-n}\ kg \text{ von der ersten und}$$

$$a-x=a-\frac{a(p-n)}{m-n}=\frac{a(m-p)}{m-n}\ kg \text{ von der zweiten Sorte.}$$

209. Er setze x *hl* Wasser hinzu, so hat er im ganzen 24+4 *hl* des Gemisches=(24+x)100 *l*, und weil er das Liter zu 15 ₰=0,15 ℳ verkauft, so löst er aus dem Ganzen (24+x)100×0,15 ℳ=(24+x)15 ℳ. Dasselbe würde er auch lösen, wenn er die 24 *hl* à 18,75 ℳ verkaufte. Es ist daher:

$$(24+x)15=24\times 18{,}75;$$

folglich x=6 *hl* Wasser muß er hinzusetzen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. An jedem Liter Wasser, das zu dem Essig gegossen wird, gewinnt man 15 ₰, also an dem *hl* 15 ℳ. An jedem *hl* Essig im Gemisch verliert er 18,75—15=3,75 ℳ. Dieser Verlust am Essig muß nun durch den Gewinn am Wasser ausgeglichen werden. Diese Ausgleichung wird stattfinden, wenn er zu je

4 *hl* Essig 1 *hl* Wasser hinzugießt. Da nun $24=6\times4$ *hl* Essig vorhanden sind, so muß er $6\times1=6$ *hl* Wasser hinzugießen.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die 24 *hl* Essig werden zu $24\times18{,}75=450$ *M* verkauft. Ebenso viel kostet auch der gemischte Essig. Da das *hl* der Mischung aber $100\times0{,}15=15$ *M* kostet, so hat er $450:15$ *hl* $= 30$ *hl*. Mischung; mithin mußten $30-24=6$ *hl* Wasser hinzugesetzt worden sein.

210. Das *hl* der zweiten Sorte koste x *M*. Da er die Weinsorten in dem Verhältnisse 3:2 mischt, so nimmt er von der ersteren so oft 3 *hl*, als er von der zweiten 2 *hl* nimmt; es kosten also beide Sorten zusammen $3\times144+2x$ *M*. Der Preis des Gemisches von $3+2=5$ *hl* à 126 *M* muß jenem Preise gleich sein; daher ist

$$3.144+2x=5.126;\ x=99\ M.$$

Soll aber das *hl* der ersten Sorte 210 *M* kosten und der Durchschnittspreis von 126 *M* per *hl* derselbe bleiben, so hat man:

$$3.210+2x=5.126;$$

folglich $x=0$, d. h. er muß statt Wein Wasser hinzusetzen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Mischt er Wein von 144 *M* zu 126 *M*, so verliert er $144-126=18$ *M*. Da er nun von der ersten Sorte so oft 3 *hl*, als 2 von der zweiten nimmt, so hat er an je 3 *hl* der ersten Sorte einen Nachteil von $3.18=54$ *M*, der ihm durch je 2 *hl* der schlechteren Sorte wieder eingebracht werden muß. Soll sich daher das Verhältnis gleich gestalten, so muß er von der zweiten Sorte Wein nehmen, der das *hl* um $54:2=27$ *M* billiger ist, als der Mittelpreis von 126 *M*; das macht $126-27=99$ *M*.

211. Nach der vorhergehenden Auflösung ist

$$am+bx=(a+b)p;\ \text{folglich}\ x=[(a+b)p-am]:b.$$

212. Da in dem Gemische von $94\frac{1}{2}$ *kg* so oft 3 *kg* Silber als 4 *kg* Kupfer enthalten sind, so besteht dasselbe aus $(94\frac{1}{2}\times3):7$ $=40\frac{1}{2}$ *kg* Silber und aus $(94\frac{1}{2}\times4):7=54$ *kg* Kupfer. Man setze nun x *kg* Kupfer hinzu, so enthält das Gemisch $54+x$ *kg* Kupfer und in der auf diese Weise legierten Masse ist das Verhältnis des Kupfers zu dem des Silbers, wie 7:2. Es ist daher

$$(54+x):40\tfrac{1}{2}=7:2;\ \text{daher:}\ 2(54+x)=7\times40\tfrac{1}{2};$$

folglich $x=87\frac{3}{4}$ *kg* Kupfer.

Zweite (arithmetische) Auflösung. In $94\frac{1}{2}$ *kg* Gemisch sind $40\frac{1}{2}$ *kg* Silber und 54 *kg* Kupfer. Nun soll das Verhältnis des Kupfers zum Silber in das wie 7:2 oder wie 42:12 umgewandelt werden. Vor der zweiten

Mischung ist dieses Verhältnis wie 4:3 oder wie 16:12. Auf je 12 Teile Silber kamen also im ersten Falle 16 Teile Kupfer; es sollen aber jetzt auf je 12 Teile Silber 42 Teile Kupfer kommen. Da nun auch in dem neuen Gemisch nur $40\frac{1}{2}$ *kg* Silber vorhanden sind, so muß in der neuen Legierung $\frac{40\frac{1}{2}}{12} \times 42 = 141\frac{3}{4}$ *kg* Kupfer enthalten sein. Demnach beträgt der Zusatz an Kupfer

$$141\frac{3}{4} - 54 = 87\frac{3}{4} \; kg.$$

Oder: Da in dem neuen Verhältnis auf je 12 Teile Silber 42 Teile Kupfer kommen sollen, so müssen zu je 12 Teilen Silber in dem bereits vorhandenen Gemische $42 - 16 = 26$ Teile Kupfer hinzukommen; das macht:

$$\frac{40\frac{1}{2}}{12} \times 26 = 87\frac{3}{4} \; kg.$$

213. In den 255 *kg* Weingeist sind $\frac{255}{2+3} \times 2 = 102$ *kg* Wasser und $\frac{255}{2+3} \times 3 = 153$ *kg* Alkohol. Man nehme x *kg* Wasser weg, so sind also noch $102 - x$ *kg* Wasser in der Mischung. Da auf diese Weise das Gewichtsverhältnis des Wassers und Alkohols 3:17 wird, so ist also:

$(102 - x) : 153 = 3 : 17$; daher: $17(102 - x) = 3 \times 153$;
folglich $x = 75$ *kg* Wasser.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Auf 255 *kg* Weingeist kommen 102 Teile Wasser und 153 Teile Alkohol, wenn das Verhältnis des Wassers zum Alkohol $= 2:3$ oder $= 34:51$ ist. Nun soll das Verhältnis aber wie 3:17 oder wie 9:51 werden. Im ersten Falle kommen auf je 51 Teile Alkohol 34 Teile Wasser, und im zweiten Falle sollen auf je 51 Teile Alkohol nur 9 Teile Wasser, also $34 - 9 = 25$ Teile Wasser weniger kommen; folglich muß dem Gemisch $\frac{153}{51} \times 25 = 75$ *kg* Wasser entzogen werden.

214. In 100 *Lt* Gemisch sind 94 *Lt* Wasser und 6 *Lt* Salz, und in 18lötiger Salzsoole sind 82 *Lt* Wasser und 18 *Lt* Salz. Angenommen, man müsse den 94 *Lt* Wasser x *Lt* entziehen, so hat man:

$(94 - x) : 6 = 82 : 18$; daher: $18(94 - x) = 6 \times 82$;
folglich $x = 66\frac{2}{3}$ *Lt*. Muß man von 94 *Lt* $66\frac{2}{3}$ *Lt* wegnehmen, so giebt dies

$$\frac{100 \times 66\frac{2}{3}}{94} = 70\frac{130}{141} \text{ pCt.}$$

215. Man nehme x *Lt* 24lötige Salzsoole, so sind darin $\frac{24x}{100}$ *Lt*

Salz enthalten. In 3715 *kg* sind $\frac{3715\times100\times6}{100}$ *Lt* Salz, im ganzen also $\frac{24x+3715\times100\times6}{100}$ *Lt* Salz. Setzt man nun zu 3715×100 *Lt* x *Lt* hinzu, so hat man $3715\times100+x$ *Lt*, welches Gemisch, da es 16lötig werden soll, $\frac{(3715\times100+x)16}{100}$ *Lt* Salz enthalten muß. Es ist daher

$$\frac{6(4x+3715\times100)}{100}=\frac{16(3715\times100+x)}{100},$$

woraus $x=464375$ *Lt*$=4643\frac{3}{4}$ *kg*.

216. Man nehme x Mark 14lötiges, also $15-x$ Mark 10lötiges Silber, so enthalten x Mark $14x$ und $15-x$ Mark $10(15-x)$ *Lt* Silber. Zusammen kommen also auf die Mischung $14x+10(15-x)$ *Lt* Silber.

Durch die Zusammenschmelzung sollen 15 Mark 13lötiges Silber entstehen; dieselben enthalten demnach 15×13 *Lt* Silber. Es ist also: $14x+10(15-x)=15\times13$; folglich $x=11\frac{1}{4}$ Mark 14lötiges und $15-11\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}$ Mark 10lötiges Silber.

Zweite (arithmetische) Auflösung. 14lötiges Silber mit 13lötigem zusammengeschmolzen giebt einen Ueberschuß von 1 *Lt*, 10lötiges mit 13lötigem einen Mangel von 3 *Lt*. Damit nun der Ueberschuß den Mangel ausgleicht, muß man 1 Mark 10lötiges zu 3 Mark 14lötiges setzen. Man will aber 15 Mark 13lötiges haben: also muß man $\frac{15}{4}\times1=3\frac{3}{4}$ Mark 10lötiges und $\frac{15}{4}\times3=11\frac{1}{4}$ Mark 14lötiges Silber nehmen.

217. Zu den 5 Mark $10\frac{1}{2}$lötigem Silber werden x Mark $14\frac{1}{4}$lötiges Silber hinzugesetzt, so hat man $5+x$ Mark Mischung, welche 12lötig sein soll, also $12(5+x)$ *Lt* Silber enthält. Vor dem Zusammenschmelzen enthalten 5 Mark $10\frac{1}{2}$lötiges Silber $5\times10\frac{1}{2}$ *Lt* Silber und die x Mark $14\frac{1}{4}x$ *Lt* Silber; im ganzen also $14\frac{1}{4}x+5\times10\frac{1}{2}$ *Lt* Silber. Es ist demnach:

$$14\tfrac{1}{4}x+5\times10\tfrac{1}{2}=12(5+x);$$

folglich $x=3\frac{1}{3}$ Mark $14\frac{1}{4}$lötiges Silber.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Mischt man $14\frac{1}{4}$lötiges Silber zu 12lötigem, so hat man $2\frac{1}{4}$ *Lt* Ueberschuß und $10\frac{1}{2}$lötiges zu 12lötigem, so hat man $1\frac{1}{2}$ *Lt* Mangel. Folglich muß man zu je $2\frac{1}{4}$ oder 3 Mark $10\frac{1}{2}$lötigem Silber $1\frac{1}{2}$ oder 2 Mark 14lötiges setzen. Nun will man 5 Mark oder $1\frac{2}{3}\times3$ Mark $10\frac{1}{2}$lötiges nehmen, folglich muß man dazu $1\frac{2}{3}\times2=3\frac{1}{3}$ Mark 14lötiges Silber setzen.

218. Man setze x Mark Kupfer hinzu. Die 47 Mark $14\frac{1}{2}$lötiges Silber enthalten $47\times14\frac{1}{2}$ *Lt* Silber. Ebensoviel Silber

befindet sich auch in der Mischung, nämlich in 47+x Mark. Da dasselbe $11\frac{3}{4}$lötig werden soll, so müssen sich darin $11\frac{3}{4}(47+x)$ *Lt* Silber befinden. Es ist also:

$$11\tfrac{3}{4}(47+x)=47\times 14\tfrac{1}{2};$$

folglich x=11 Mark Kupfer müssen hinzugesetzt werden.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die 47 Mark $14\frac{1}{2}$lötiges Silber enthalten $47\times 14\frac{1}{2}=681\frac{1}{2}$ *Lt* Silber. Da nun aus je $11\frac{3}{4}$ *Lt* Silber 1 Mark entstehen soll, so werden sich aus $681\frac{1}{2}$ *Lt* Silber auch $681\frac{1}{2}:11\frac{3}{4}=58$ Mark machen lassen; folglich müssen 58—47=11 Mark Kupfer hinzugesetzt werden.

Oder: Bei $14\frac{1}{2}$lötigem Silber kommen auf $14\frac{1}{2}$ *Lt* Silber $1\frac{1}{2}$ *Lt* Kupfer oder auf 1363 *Lt* S. 141 *Lt* K. Soll das S. aber $11\frac{3}{4}$lötig werden, so kommen auf $11\frac{3}{4}$ *Lt* S. $4\frac{1}{4}$ *Lt* K. oder auf 1363 *Lt* S. 493 *Lt* K. In diesem Falle kommen also auf je 1363 *Lt* S. 493—141=352 *Lt* K. mehr; folglich müssen $\frac{681\frac{1}{2}}{1363}\times 352=176$ *Lt*=11 Mark Kupfer hinzugesetzt werden.

219. Die 24 Mark $13\frac{1}{2}$lötiges Silber enthalten $24\times 13\frac{1}{2}$ *Lt* Silber. Hierzu setze man 12 Mark xlötiges, so enthalten diese 12 Mark 12x *Lt* Silber. Setzt man die 24 Mark und 12 Mark zusammen, so hat man 36 Mark, die $13\frac{3}{4}$lötig sein sollen, also $36\times 13\frac{3}{4}$ *Lt* Silber enthalten müssen. Es ist daher:

$$24\times 13\tfrac{1}{2}+12x=36\times 13\tfrac{3}{4};$$

folglich $x=14\frac{1}{4}$ *Lt*, daher muß das Silber $14\frac{1}{4}$lötig sein.

Soll aber die Mischung 9lötig werden, so hat man: $24\times 13\frac{1}{2}+12x=36\times 9$; folglich x=0, d. i. das hinzugesetzte Metall enthält gar kein Silber.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die 24 Mark enthalten $24\times 13\frac{1}{2}=324$ *Lt* Silber. Nach der Hinzusetzung von 12 Mark sind in 36 Mark $36\times 13\frac{3}{4}=495$ *Lt* Silber; folglich ist durch den Zusatz der 12 Mark 495—324=171 *Lt* S. mehr entstanden; mithin enthielt 1 Mark $171:12=14\frac{1}{4}$ *Lt* Silber. Oder: 24 Mark enthalten $24\times 2\frac{1}{2}=60$ *Lt* Kupfer und 36 Mark $36\times 2\frac{1}{4}=81$ *Lt* K.; also befinden sich in den hinzugesetzten 12 Mark 81—60=21 *Lt* Kupfer; folglich in 1 Mark $21:12=1\frac{3}{4}$ *Lt* Kupfer. Das Metall war also $16-1\frac{3}{4}=14\frac{1}{4}$lötig. Soll das Silber aber 9lötig werden, so sind in jeder Mark 7 *Lt* Kupfer enthalten, also in 36 Mark 36×7 =252 *Lt* K.; jetzt also 252—60=192 *Lt* mehr; mithin enthielt jetzt jede hinzugesetzte Mark 192:12=16 *Lt* Kupfer, also kein Silber; folglich wurden 12 Mark Kupfer hinzugesetzt.

220. *α*) Man nehme x *kg* vom ersten, so nimmt man (78—x) *kg* vom zweiten. In den x *kg* sind 700 x und in (78—x) *kg*

sind $(78-x)\times 900$ Teile Silber enthalten. Da durch die Mischung Silber vom Feingehalte 750 entstehen soll, so ist $700x+(78-x)900=78\times 750$; folglich $x=58\frac{1}{2}$ *kg* vom ersten und $78-58\frac{1}{2}=19\frac{1}{2}$ *kg* vom zweiten. Im andern Falle ist: $520x+(100-x)950=821.100$; folglich $x=30$ *kg* von der ersten, und daher $100-30=70$ *kg* von der zweiten Sorte.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wird aus Silber vom Feingehalte 700 solches vom Feingehalte 750 gemacht, so hat man $750-700=50$ Teile Mangel und an dem Silber vom Feingehalte 900 hat man $900-750=150$ Teile Ueberschuß; folglich muß man bei je 4 *kg* so oft mal 3 *kg* vom ersten, als 1 *kg* vom zweiten nehmen. Man will nun 78 *kg* haben, folglich muß man $\frac{78}{4}\times 1=19\frac{1}{2}$ *kg* vom zweiten und $19\frac{1}{2}\times 3=58\frac{1}{2}$ *kg* vom ersten nehmen.

β) Man setze x *kg* reines Silber hinzu, so enthält dasselbe 1000x Teile Silber. In den $(500+x)$ *kg* sind $(500+x)900$ Teile Silber, und in den 500 *kg* 500.750 Teile Silber enthalten. Es ist daher $(500+x)900=1000x+500.750$, woraus $x=750$ *kg*.

221. Man setze x *kg* Kupfer zu 500 *kg* von dem Feingehalte 750, so sind in den $(500+x)$ *kg* $(500+x)\,520$ Teile Silber enthalten. Da nun in den 500 *kg* ebensoviel Silber enthalten, so ist

$$(500+x)520=500\times 750, \text{ folglich } x=221\tfrac{2}{13}\ kg.$$

222. Friedrichsd'or, die aus $21\frac{2}{3}$karatigem Gold geprägt sind, enthalten $\frac{21\frac{2}{3}}{24}\times 1000=902\frac{7}{9}$ Teile Gold. In 500 *kg* Friedrichsd'or sind also $500\times 902\frac{7}{9}$ Teile Gold enthalten. Man setze nun zu 500 *kg* x *kg* Kupfer, so ist

$$(500+x)900=500\times 902\tfrac{7}{9}, \text{ woraus}$$
$$x=1\tfrac{44}{81}=1{,}5432\ kg.$$

e) Aufgaben (223—235).

§. 385 e. 223. Die Zahl heiße x, so hat man: $(52-x)(45-x)=(66-x)(37-x)$; folglich $x=17$.

224. Das Gleiche, das er von den vier Gliedern der Proportion abgezogen, sei x, so ist: $(41+x):(93+x)=(7+x):(51+x)$, also $(41+x)(51+x)=(7+x)(93+x)$; folglich $x=180$.

Die ursprünglich richtige Proportion heißt also:

$$41+180:93+180=7+180:51+180$$
$$\text{oder } 221:273=187:231.$$

225. Die Zahl, um welche man die Proportion vermehren mag, sei $=x$, so ist:

$$(a+x):(b+x)=(c+x):(d+x); \text{ woraus:}$$
$$(a+x)(d+x)=(c+x)(b+x);$$
$$\text{folglich } x=[ad-bc]:[b+c-a-d].$$

Vermindert man die Zahl um x, so ist:

$(a-x):(b-x)=(c-x):(d-x)$;

folglich $x=[bc-ad]:[b+c-a-d]$.

226. Die eine Zahl heiße x, so ist die andere $70-x$ und das Verhältnis derselben $x:(70-x)$. Dieses Verhältnis kehrt sich um, wenn die eine Zahl um 14 vermehrt, dagegen die andere um 14 vermindert wird. Es ist daher:

$(70-x):x=(x+14):[70-(x+14)]$, woraus

$(70-x)(56-x)=x(x+14)$;

folglich $x=28$ die eine Zahl und die andere 42.

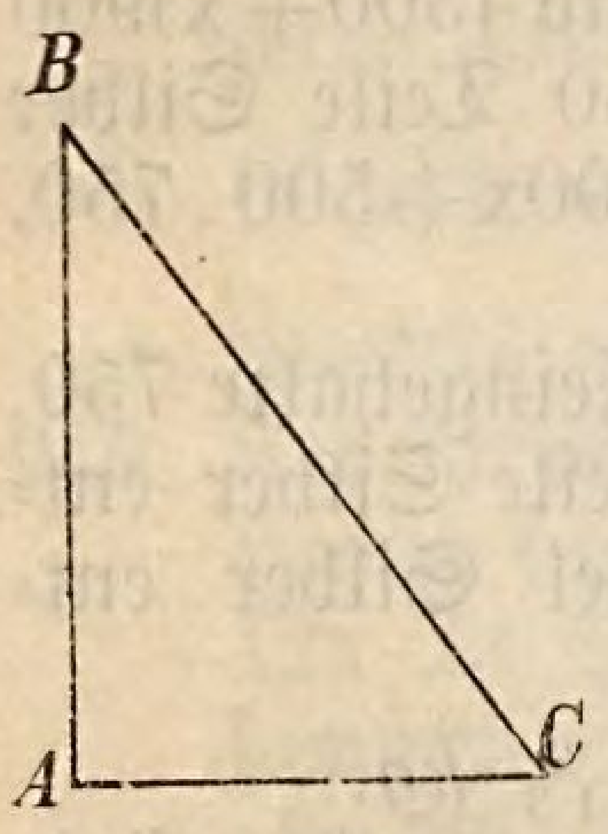
227. *α*) Die gedachte Zahl heiße x, so ist:

$x^2-1188=(x-6)^2$; oder: $x^2-1188=x^2-12x+36$;

$12x=1224$; folglich $x=102$.

β) Die gesuchte Zahl sei x, so hat man:

$(13x)^2-(12x+3)^2=(5x-9)^2$; folglich $x=5$.



288. *α*) In C sei der Mittelpunkt des Teiches, wo das Schilf steht. Zieht man es nach dem Rande des Teiches, so hat es die Richtung von CB, sonst die von AB. Da nun der Teich ein Quadrat ist, dessen Seite 10 Fuß beträgt, so ist AC die Hälfte einer Seite des Quadrates, also 5 Fuß. Auf diese Weise entsteht das rechtwinkelige Dreieck ABC, worin die Kathete AB die Tiefe des Teiches anzeigt, die wir mit x bezeichnen wollen; da nun das Schilf einen Fuß über dem Wasser wächst, so ist BC um 1 Fuß größer als AB, also $=(x+1)$ Fuß. Da nun

$BC^2=AB^2+AC^2$ ist, so hat man:

$(x+1)^2=x^2+5^2$.

Hieraus folgt, daß $x=12$ Fuß, die der Teich tief ist.

β) Vor dem Bruche des Bambus bezeichne die Höhe desselben in obiger Figur $AB+BC=10$ Fuß. Sei nun $AB=x$, so ist $BC=10-x$. Nun bildet der zerbrochene Bambus das rechtw. Dreieck ABC, worin nach der Aufgabe $AC=3$ Fuß beträgt. Es ist also:

$(10-x)^2=x^2+3^2$;

folglich $x=4\frac{11}{20}$ Fuß vom Boden findet der Bruch des Bambus statt.

229. Die Zahl heiße x; vermehre ich dieselbe um 2, also $x+2$ und ziehe hieraus die Quadratwurzel, so giebt dies $\sqrt{x+2}$. Da diese Wurzel 2 beträgt, so ist:

$\sqrt{x+2}=2$; daher $x+2=2^2$; hieraus folgt $x=2$.

230. *α*) Man nehme an, die Anzahl der Markstücke, die ich zuerst in eine Reihe lege, sei x, so faßt das Quadrat $x.x=x^2$ und weil mir nun 25 ℳ fehlen, so habe ich x^2-25 ℳ.

Mache ich ferner x—2 ℳ zur Seite eines Quadrates, so ist die Anzahl der Markstücke, die zu diesem Quadrate nötig sind, $(x-2)^2$. Da mir aber jetzt 31 ℳ übrig bleiben, so ist die Anzahl meiner ℳ $(x-2)^2+31$. Demnach ist:

$$x^2-25=(x-2)^2+31;$$

folglich $x=15$, als die Anzahl ℳ, welche ich zuerst in eine Reihe legte. Ich hatte also $(15)^2-25=200$ ℳ.

β)

```
                *
               * *
              * * *
             * * * *
            * * * * *
           * * * * * *
          * * * * * * *
         * * * * * * * *
        * * * * * * * * *
       * * * * * * * * * *
      * * * * * * * * * * *
     * * * * * * * * * * * *
    * * * * * * * * * * * * *
   * * * * * * * * * * * * * *
  * * * * * * * * * * * * * * *
 o o o o o o o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o o o o o o o o
† † † † † † † † † o o o o o o o o o
```

Es mögen auf jeder Seite des gleichseitigen Dreiecks x Nüsse liegen. Füge ich von den gewonnenen Nüssen noch zwei Reihen hinzu, so kommen, weil jede folgende Reihe immer eine Nuß mehr enthalten muß, als die zunächst vorhergehende, auf die erste dieser beiden Reihen $x+1$ und auf die zweite $x+2$; also auf beide Reihen $2x+3$ Nüsse zu liegen. Da mir in diesem Falle 9 Nüsse übrig bleiben, so habe ich $2x+3+9=2x+12$ Nüsse gewonnen. Wollte ich den zwei Reihen noch eine dritte hinzufügen, so müßten darin $x+3$ zu liegen kommen; in diesem Falle lägen auf den 3 Reihen $3x+6$ Nüsse. Da mir aber an der vollständigen Reihe 9 fehlen, so habe ich jetzt $3x+6-9=3x-3$ Nüsse gewonnen. Es ist daher: $2x+12=3x-3$; folglich $x=15$ Nüsse; ich hatte also $2\times15+12=3\times15-3=42$ Nüsse gewonnen. Die Anzahl Nüsse vor dem Gewinn, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks lagen, ist also gleich der Summe aller Zahlen von 1 bis 15, welches 120 ausmacht, wie aus vorstehender Figur erhellt.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn mir bei 2 Reihen, die ich dem Dreiecke hinzufüge, 9 Nüsse übrig bleiben und ich für 3 Reihen 9 zu wenig habe, so folgt daraus, daß ich zur Bildung der dritten Reihe $9+9=18$ Nüsse nötig hatte, mithin enthält die zweite 17 und die erste 16; also hatte ich $16+17+9=42$ Nüsse gewonnen. Da die erste hinzugefügte Reihe 16 Nüsse enthielt, so lagen

auf der Seite des Dreiecks 15 Nüsse; dasselbe enthielt also $1+2+3+4+\,..\,+15=120$ Nüsse.

231. Der Weinbauer pflanze auf die lange Seite des rechtwinkeligen Weingartens x Stöcke, so kommen, da sich die Länge zur Breite wie 7 : 5 verhält, auf die Breite in einer Reihe $\frac{5}{7}x$ Stöcke. Die Anzahl Stöcke, die er also pflanzen kann, ist $= x.\frac{5}{7}x=\frac{5}{7}x^2$. Da ihm aber in diesem Fall 2832 übrig bleiben, so ist die Anzahl der Stöcke, die er hat, $\frac{5}{7}x^2+2832$. Setzt er aber auf die längere Seite $x+14$ und auf die kürzere $\frac{5}{7}x+10$, so bedarf er zur Bepflanzung seines Weinberges $(x+14)\times(\frac{5}{7}x+10)$. Da ihm aber in diesem Falle 172 übrig bleiben, so ist die gesuchte Anzahl seiner Stöcke

$$(x+14)(\tfrac{5}{7}x+10)+172.$$

Es ist demnach:

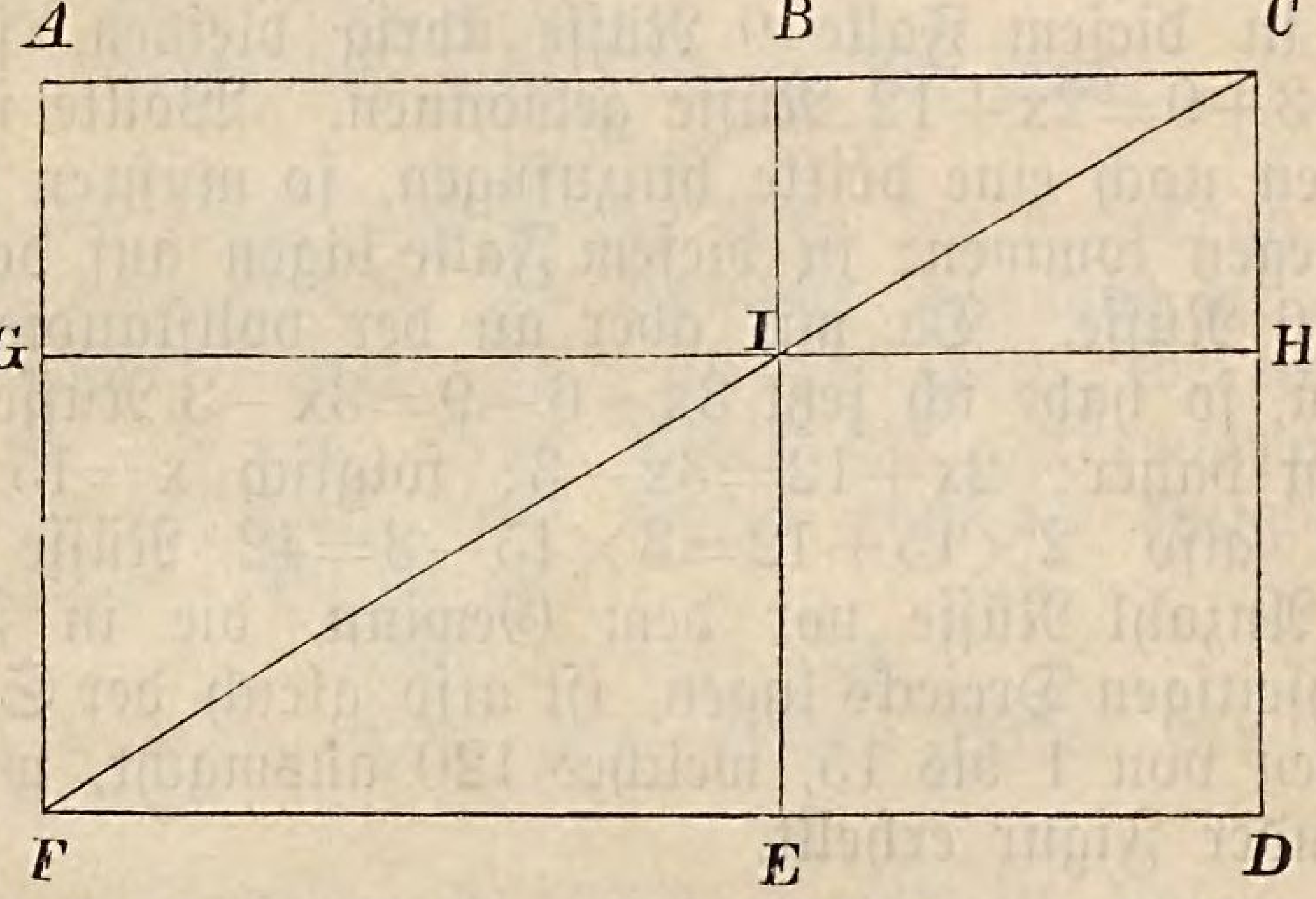
$$\tfrac{5}{7}x^2+2832=(x+14)(\tfrac{5}{7}x+10)+172;$$
$$\tfrac{5}{7}x^2+2832=\tfrac{5}{7}x^2+20x+312;$$

folglich $x=126$ Stück, die er auf die Länge und hieraus 90 Stück, die er auf die Breite des Gartens pflanzte. Die gesuchte Anzahl seiner Stöcke ist demnach

$$90\times126+2832=14172.$$

Zweite Auflösung.

In dem Rechtecke AFCD verhalte sich $AC : CD=7 : 5$. Setzt man die Stöcke näher zusammen, so daß auf die lange Seite AC 14 und auf die kurze CD 10 Stöcke mehr zu stehen kommen, so können so viel Stöcke mehr gepflanzt werden, als auf die Rechtecke ABIG, BCHI und HDEI gehen; dieser



Mehrbedarf beträgt nach der Aufgabe $2832-172=2660$ Stöcke. Nun kommen auf das Rechteck BCHI$10\times14=140$ Stöcke, also kommen auf die beiden andern ABIG und IHDE $2660-140=2550$. Nun ist nach einem Satze aus der Geometrie das Rechteck ABGI=dem Rechtecke IHDE; folglich kommen auf jedes dieser Rechtecke $2520 : 2=1260$ Stöcke. Von dem Rechtecke IHDE ist sonach der Inhalt=1260 und

eine Seite, nämlich ED=14 gegeben; folglich ist IE=HD =GF=1260:14=90; demnach pflanzte er anfänglich 90 Stöcke auf die kurze Seite. Ferner ist vom Rechteck ABGI der Inhalt=1260 und die Seite AG=10 bekannt; folglich ist AB=GI=FE=1260:10=126; demnach kamen zuerst 126 Stöcke auf die lange Seite; er hatte also $126 \times 90 + 2832 = (126+14)(90+10)+172 = 14172$ Stöcke.

232. Der dritte Würfel sei x *cm* hoch, so ist der zweite x+5 und der erste x+10 *cm* hoch. Der körperliche Inhalt des ersten beträgt demnach $(x+10)^3$, der des zweiten $(x+5)^3$ und der des dritten x^3 *ccm*. Füllt man den zweiten leeren aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten noch

$$(x+10)^3-(x+5)^3 \text{ ccm},$$

und füllt man hierauf den dritten leeren aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten noch

$$(x+5)^3-x^3 \text{ ccm}.$$

Da aber in diesem Falle sich im ersten 1350 *ccm* Wasser mehr befinden, als im zweiten, so ist:

$$(x+10)^3-(x+5)^3=(x+5)^3-x^3+1350;$$

folglich x=4 *cm*. Mithin beträgt

der körperliche Inhalt des 3. Würfels $(4)^3= 64$ *ccm*
" " " " 2. " $(9)^3= 729$ "
" " " " 1. " $(14)^3=2744$ "

233. Die vier Zahlen mögen nach der Reihe x, x+1, x+2, x+3 heißen, so sind die vierten Potenzen derselben x^4, $(x+1)^4$, $(x+2)^4$, $(x+3)^4$. Subtrahiert man je zwei aufeinander folgende, so erhält man

$$(x+1)^4-x^4;\ (x+2)^4-(x+1)^4;\ (x+3)^4-(x+2)^4.$$

Zieht man nun je zwei dieser aufeinander folgenden Differenzen ab, so hat man:

$$(x+2)^4-(x+1)^4-(x+1)^4+x^4$$
$$(x+3)^4-(x+2)^4-(x+2)^4+(x+1)^4.$$

Subtrahiert man endlich diese beiden Differenzen, so ist nach der Aufgabe

$$(x+3)^4-(x+2)^4-(x+2)^4+(x+1)^4-(x+2)^4+$$
$$(x+1)^4+(x+1)^4-x^4=204;$$

folglich x=7; demnach sind die Zahlen 7, 8, 9, 10.

234. Entwickelt man das gegebene Produkt und stellt es dem einfachen Resultate gleich, so hat man:

$$a^4+2a^2b^2x-a^2b^2+b^4x^2=a^4+b^4x^2 \text{ oder}$$
$$2a^2b^2x=a^2b^2; \text{ daher } 2x=1; \text{ also } x=\tfrac{1}{2}.$$

235. Verfährt man hier ebenso, so erhält man:

$$a^4+2a^2b^2x-a^2b^2x^2+b^4x^2=a^4+b^4x^2; \text{ hieraus folgt:}$$
$$a^2b^2x^2=2a^2b^2x; \text{ daher } x=2.$$

I. Gleichungen vom ersten Grade.

B. Mit mehreren unbekannten Größen.

1. Methoden, lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen.

§. 386a. Um Gleichungen mit zwei oder mehreren Unbekannten auflösen zu können, müssen auch zwei oder ebenso viele von einander unabhängige Gleichungen (d. h. solche, wobei sich nicht die eine aus der andern herleiten läßt) gegeben sein. Wären die beiden Gleichungen (1) $x+y=17$ und (2) $3x+3y=51$ gegeben, so ist leicht ersichtlich, daß diese beiden Gl. so abhängig von einander sind, daß die eine aus der andern ohne weiteres hergeleitet werden kann, und zwar der Art, daß die erste mit 3 multipliziert die zweite, oder die zweite durch 3 dividiert die erste giebt. Die erste Gleichung drückt also aus, was auch die zweite ausdrückt; mithin sind beide zur Bestimmung der Unbekannten ebenso unzureichend, als wenn auch nur eine derselben gegeben wäre.

Bei der Auflösung der Gl. vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten suche man aus den gegebenen Gl. eine Gleichung zu erhalten, in welcher nur noch eine Unbekannte vorkommt, bestimme diese und setze den gefundenen Wert derselben entweder in die gegebenen Gl., wodurch dieselben dann eine Unbekannte weniger enthalten, oder in diejenigen Gl., welche man durch die verschiedenen Rechnungsoperationen, die mit den gegebenen Gl. zur Erlangung der Endgleichung vorgenommen wurden, erhalten hat, bestimme daraus die zweite Unbekannte und so fort, bis alle bestimmt sind.

Es giebt verschiedene Methoden, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen. Worin das Wesen derselben besteht, soll weiter gezeigt werden.

A. Additions- oder Subtraktions-Methode.

Dieselbe besteht darin, daß man die gegebenen Gl. addiert oder subtrahiert, um eine Gleichung mit einer Unbekannten zu erhalten. Diese Methode ist jedesmal dann mit Vorteil anzuwenden und allen andern Methoden vorzuziehen, wenn die Summe oder Differenz der Unbekannten gegeben ist oder aus der Entwickelung der gegebenen Gl. sich ergiebt.

1. Beispiel: (1) $x+y=a$ und (2) $x-y=b$.

Addiert man die beiden Gl., so verschwindet y und man erhält eine Gl. mit der Unbekannten x, nämlich

$$2x=a+b; \text{ daher } x=\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Subtrahiert man die zweite Gl. von der ersten, so verschwindet x und man erhält eine Gl. mit der Unbekannten y, nämlich

$$2y=a-b; \text{ daher } y=\tfrac{1}{2}(a-b).$$

2. Beispiel: (1) $x+y=26$ und (2) $x-y=10$;
Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gl. erhält man

$$2x=26+10;\ \text{also}\ x=\tfrac{1}{2}(26+10)=18\ \text{und}$$

$$2y=26-10;\ \text{also}\ y=\tfrac{1}{2}(26-10)=8.$$

Man kann den Wert für y auch finden, wenn man den für x gefundenen Wert in die erste Gl. einsetzt; wir erhalten alsdann:

$$18+y=26;\ \text{also}\ y=26-18=8.$$

3. Beispiel: (1) $ax+y=m$ und (2) $bx-cy=n$.
Würde man diese beiden Gl. addieren oder subtrahieren, so würden wir immer noch eine Gleichung mit den beiden Unbekannten x und y erhalten. Wenn wir es aber zu bewerkstelligen suchen, daß der Koeffizient einer der Unbekannten in beiden Gl. derselbe wird, so werden wir vermittels dieser Methode zum Ziele gelangen. Soll nun y aus den beiden Gl. eliminiert werden, so multipliziere man (1) mit c und wir erhalten: (3) $acx+cy=cm$.
Addieren wir jetzt (3) zu (2), so wird:

$$(ac+b)x=cm+n;\ \text{also}\ x=\frac{cm+n}{ac+b}.$$

Zur Bestimmung von y multiplizieren wir (1) mit b und (2) mit a, so erhalten wir

$$(4)\ abx+by=bm\ \text{und}\ (5)\ abx-acy=an.$$

Subtrahieren wir jetzt (5) von (4), so wird:

$$(ac+b)y=bm-an;\ \text{also}\ y=\frac{bm-an}{ac+b}.$$

4. Beispiel: (1) $5x+4y=59$; (2) $2x+3y=32$.
Um diese Gl. nach dieser Methode auflösen zu können, multiplizieren wir zur Elimination von y die Gl. (1) mit 3 und (2) mit 4, so erhalten wir statt der gegebenen folgende zwei:

$$(3)\ 3.5x+3.4y=3.59;\ (4)\ 4.2x+4.3y=4.32.$$

Subtrahiere (4) von (3), so wird:

$$(3.5-4.2)x=3.59-4.32;\ \text{daher}$$

$$x=\frac{3.59-4.32}{3.5-4.2}=\tfrac{49}{7}=7.$$

Setze den für x gefundenen Wert in (2), so wird:

$$2.7+3y=32;\ \text{also}\ 3y=32-2.7;\ \text{daher}$$

$$y=\frac{32-2.7}{3}=\tfrac{18}{3}=6.$$

Will man aber y unabhängig von x bestimmen, so multipliziere (1) mit 2 und (2) mit 5 und es wird:

$$(5)\ 2.5x+2.4y=2.59;\ (6)\ 5.2x+5.3y=5.32.$$

Subtrahiere (5) von (6), so erhält man:

$$(5.3-2.4)y=5.32-2.59;\ \text{daher}$$

$$y=\frac{5.32-2.59}{5.3-2.4}=\tfrac{42}{7}=6.$$

B. Substitutions-Methode.

Diese Auflösungsart besteht darin, daß, da jede Unbekannte in jeder Gleichung denselben Wert hat, man aus der einen der gegebenen Gleichungen den Wert von einer Unbekannten bestimmt und diesen Wert der Unbekannten in die andere der gegebenen Gl. einsetzt, wodurch man wieder eine Gl. mit nur einer Unbekannten erhält.

1. Beispiel: (1) $a_1x+b_1y=m_1$
(2) $a_2x+b_2y=m_2$

Will man y eliminieren, so bestimme man etwa in (2) y und setze den hierfür erhaltenen Wert in (1), so entsteht eine Gleichung, die nur noch die Unbekannte x enthält. Nun ist nach Gl. (2)

$$y=\frac{m_2-a_2x}{b_2}.$$

Setzen wir diesen Wert für y in Gl. (1), so wird:

$$a_1x+b_1\frac{m_2-a_2x}{b_2}=m_1; \text{ hieraus erhalten wir:}$$

$$a_1b_2x+b_1m_2-a_2b_1x=m_1b_2 \text{ oder}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=m_1b_2-m_2b_1; \text{ daher}$$

$$x=\frac{m_1b_2-m_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Setze diesen Wert für x in (1), so wird:

$$a_1\frac{m_1b_2-m_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1y=m_1; \text{ daraus erhalten wir:}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1m_2-a_2m_1; \text{ also } y=\frac{a_1m_2-a_2m_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

2. Beispiel: (1) $5x+4y=59$; (2) $2x+3y=32$.

Aus (2) folgt, daß $x=\frac{32-3y}{2}$. Setze diesen Wert für x in (1), so wird:

$$\frac{5(32-3y)}{2}+4y=59; \text{ hieraus } 5(32-3y)+2.4y=2.59; \text{ oder}$$

$$5.32-2.59=(5.3-2.4)y; \text{ daher } y=\frac{5.32-2.59}{15-8}=6.$$

Setze diesen Wert für y in (2), so wird:

$$2x+3.6=32; \; 2x=32-3.6; \text{ also } x=\frac{33-3.6}{2}=7.$$

C. Kombinations-Methode.

Dieselbe besteht darin, daß man aus den beiden gegebenen Gleichungen den Wert derselben Unbekannten bestimmt und diese beiden Werte einander gleichstellt, wodurch ebenfalls eine Gleichung mit nur einer Unbekannten entsteht.

1. Beispiel: (1) $a_1x+b_1y=m_1$ und (2) $a_2x+b_2y=m_2$.

Will man zuerst x bestimmen, so suche man aus beiden Gl. den Wert für y und stelle diese Werte einander gleich. Nach (1) ist

$$y=\frac{m_1-a_1x}{b_1} \text{ und nach (2) ist: } y=\frac{m_2-a_2x}{b_2}.$$

Daher ist:

$$\frac{m_1-a_1x}{b_1}=\frac{m_2-a_2x}{b_2}; \text{ hieraus erhalten wir:}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=m_1b_2-m_2b_1; \text{ also } x=\frac{m_1b_2-m_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Zur Bestimmung von y stelle man aus beiden Gl. die Werte für x einander gleich, und wir erhalten:

$$\frac{m_1-b_1y}{a_1}=\frac{m_2-b_2y}{a_2}; \text{ hieraus folgt:}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1m_2-a_2m_1; \text{ also } y=\frac{a_1m_2-a_2m_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

2. Beispiel: (1) $5x+4y=59$; (2) $2x+3y=32$.

Stellen wir aus beiden Gl. den Wert für y einander gleich, so wird:

$$\frac{59-5x}{4}=\frac{32-2x}{3}; \text{ hieraus } 3.59-3.5x=4.32-4.2x \text{ oder}$$

$$(3.5-4.2)x=3.59-4.32; \text{ daher } x=\frac{3.59-4.32}{3.5-4.2}=7.$$

Stellt man die beiden Werte für x aus beiden Gl. einander gleich, so wird:

$$\frac{59-4y}{5}=\frac{32-3y}{2}; \text{ daher } (5.3-2.4)y=5.32-2.59; \text{ also}$$

$$y=\frac{5.32-2.59}{5.3-2.4}=6.$$

D. **Methode vermittels der regula falsi.** (Vgl. §. 421.)

Gegeben seien die beiden Gleichungen:

$$(1)\ 5x-7y=20;\ (2)\ 9x-11y=44.$$

Man setze in (1) zwei beliebige Werte für x, nämlich $x_1=\alpha_1=1$ und $x_2=\alpha_2=2$ und suche die diesen entsprechenden Werte für y. Für $x_1=1$ wird $y_1=-2\frac{1}{7}$; für $x_2=2$ wird $y_2=-1\frac{3}{7}$. Um nun die Fehler zur Bestimmung des wahren Wertes für x und y zu erhalten, setze man die zusammengehörigen Werte für x_1 und y_1, sowie für x_2 und y_2 in (2), so wird:

$$\varphi'=44-9.1-11.2\tfrac{1}{7}=11\tfrac{3}{7}$$

$$\varphi''=44-9.2-11.1\tfrac{3}{7}=10\tfrac{2}{7}; \text{ daher ist}$$

$$x=\frac{2.11\frac{3}{7}-1.10\frac{2}{7}}{11\frac{3}{7}-10\frac{2}{7}}=11.$$

$$y=\frac{-1\frac{3}{7}.11\frac{3}{7}+2\frac{1}{7}.10\frac{2}{7}}{11\frac{3}{7}-10\frac{2}{7}}=5.$$

E. Methode von Bézout oder die französische Methode.

Will man alle Unbekannten auf einmal eliminieren, mit Ausnahme der Unbekannten, deren Wert man bestimmen will, so bedient man sich der Methode der unbestimmten Faktoren. Diese Methode besteht darin, daß man (n—1) Gleichungen mit einem unbestimmten Faktor multipliziert und sämtliche n Gleichungen addiert. Die genannten Faktoren bestimmt man nun nachträglich so, daß sämtliche Faktoren der Unbekannten in der Summe der Gleichungen verschwinden, mit Ausnahme des Faktors, welcher mit derjenigen Unbekannten multipliziert ist, deren Wert man bestimmen will.

1. Beispiel: Gegeben: (1) $a_1x+b_1y=c_1$; (2) $a_2x+b_2y=c_2$.

Multiplizieren wir die Gl. (1) mit dem unbestimmten Faktor β und addieren das Resultat zu (2), so wird:

$$(3)\quad (a_1\beta+a_2)x+(b_1\beta+b_2)y=c_1\beta+c_2.$$

Diese Gl. ist eine Kombination der beiden gegebenen Gleichungen und wir können sie daher statt einer der beiden Gl. (1) und (2) benutzen. Wollen wir nun x bestimmen, so müssen wir β so wählen, daß der binomische Faktor von y Null wird, also $b_1\beta+b_2=0$; daher $\beta=-\frac{b_2}{b_1}$; wir erhalten also, wenn wir den Wert für β einsetzen in die Gl. $(a_1\beta+a_2)x=c_1\beta+c_2$

$$\left(-a_1\frac{b_2}{b_1}+a_2\right)x=-c_1\frac{b_2}{b_1}+c_2 \text{ oder entwickelt;}$$

$$a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1\text{; daher}$$

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Soll y bestimmt werden, so wähle man β so, daß der binomische Faktor von x Null wird, also $a_1\beta+a_2=0$; daher $\beta=-\frac{a_2}{a_1}$. Setzen wir diesen Wert ein in die Gl. $(b_1\beta+b_2)y=c_1\beta+c_2$, so erhalten wir:

$$\left(-b_1\frac{a_2}{a_1}+b_2\right)y=-c_1\frac{a_2}{a_1}+c_2 \text{ oder}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1\text{; oder}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

2. Beispiel: (1) $5x+4y=59$; (2) $2x+3y=32$.

Multiplizieren wir (1) mit β und subtrahieren (2) von dem Resultate, so wird (3) $(5\beta-2)x+(4\beta-3)y=59\beta-32$.

Nun sei $4\beta-3=0$; also $\beta=\frac{3}{4}$; daher erhalten wir aus (3):

$$(5\,.\,\tfrac{3}{4}-2)x=59\,.\,\tfrac{3}{4}-32 \text{ oder}$$

$$(5\,.\,3-2\,.\,4)x=59\,.\,3-32\,.\,4\text{; daher}$$

$$x=\frac{59\,.\,3-32\,.\,4}{5\,.\,3-2\,.\,4}=7.$$

Setzen wir zur Bestimmung von y in (3) den binomischen Faktor von x gleich Null, also $5\beta-2=0$; so ist $\beta=\frac{2}{5}$ und es wird:

$$(4\,.\,\tfrac{2}{5}-3)y=59\,.\,\tfrac{2}{5}-32 \text{ oder}$$
$$(4\,.\,2-3\,.\,5)y=59\,.\,2-32\,.\,5; \text{ daher}$$
$$y=\frac{59\,.\,2-32\,.\,5}{4\,.\,2-3\,.\,5}=\frac{32\,.\,5-59\,.\,2}{3\,.\,5-4\,.\,2}=6.$$

2. Auflösungen der Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung § 65a.

a) Aufgaben (4—113).

§. 386b. 4. Nach A ist $2x=6912+4444$; $x=\frac{1}{2}(6912+4444)$ $=5678$; $2y=6912-4444$; $y=\frac{1}{2}(6912-4444)=1234$.

5. Nach A ist $2x=s+d$; $x=\frac{1}{2}(s+d)$; $2y=s-d$; $y=\frac{1}{2}(s-d)$.

6. Die beiden Gl. subtrahiert, giebt: $6y=176-98$; $y=\frac{1}{6}(176-98)=13$. Setze den Wert für y in (2), so ist $x=98-7\,.\,13=7$.

7. Addiere die beiden Gl., so wird: $(1\frac{2}{3}+4\frac{5}{6})y=26\frac{1}{12}+44\frac{7}{8}$, also $y=(26\frac{1}{12}+44\frac{7}{8}):(1\frac{2}{3}+4\frac{5}{6})=10\frac{11}{12}$. Setze den Wert für y in (1), so ist $x=7\frac{8}{9}$.

8. Subtrahiere die erste Gleichung von der mit a multiplizierten zweiten, so ist $(ac-1)x=ad-b$; $x=(ad-b):(ac-1)$. Setze diesen Wert für y in (2), so ist

$$y=d-c\frac{ad-b}{ac-1}=(bc-d):(ac-1).$$

9. Die Differenz zwischen beiden Gl. giebt: $(m-n)x=0$, also $x=0$; $y=p$.

10. Nach B. Setze aus (2) den Wert für y in (1), so wird: $x+17(11x-104)=300$ oder $(1+17\,.\,11)x=300+17\,.\,104$; daher $x=(300+17\,.\,104):(1+17\,.\,11)=11$.

$$y=11\,.\,11-104=17.$$

11. Nach B erhalten wir $2\frac{3}{7}x-\frac{3}{4}(1\frac{3}{5}x-40)=116$ oder

$$(2\tfrac{3}{7}-\tfrac{3}{4}\,.\,1\tfrac{3}{5})x=116-\tfrac{3}{4}\,.\,40 \text{ oder } \tfrac{43}{35}x=86;$$
$$x=70; \text{ daher } y=1\tfrac{3}{5}\,.\,70-40=72.$$

12. Setze $1{,}543689=a$ und $0{,}8392867=b$, so wird: (1) $ax-y=a$; (2) $x-by=b$, daher $x-b(ax-a)=b$; oder $(ab-1)x=(a-1)b$; also $x=\{(a-1)b\}:(ab-1)$. Ferner haben wir: $ab(y+1)-y=a$; also $(ab-1)y=(1-b)a$; $y=\{(1-b)a\}:(ab-1)$. Setze hierin die Werte für a und b ein, so wird $x=1{,}543689$; $y=0{,}839287$.

13. Multipliziere (1) mit $3y+11$ und (2) mit $2y-11$, so wird: (3) $x+5143=37(3y+11)$; (4) $3262-x=43(2y-11)$.

Nach A erhalten wir aus (3) und (4)

$$5143+3262=37(3y+11)+43(2y-11)$$
$$=37\,.\,3y+37\,.\,11+43\,.\,2y-43\,.\,11;$$

daher $5143+3262+43.11-37.11=(37.3+43.2)y$; also

$$y=\frac{5143+3262+6.11}{37.3+43.2}=\frac{8471}{197}=43; \text{ daher}$$

$$x=37(3.43+11)-5143=37(140-139)=37.$$

14. Multipliziere (1) mit $10y-17$ und (2) mit $15y-17$ und ordne, so ist: (3) $4x-60y=-183$; (4) $12x-60y=-165$. Die Differenz zwischen (3) und (4) giebt: $8x=18$; $x=2\frac{1}{4}$ und daraus $y=3\frac{1}{5}$.

15. α) Multipliziere (1) mit 11 und löse sie nach A auf, so wird:

$$11x+\tfrac{1}{13}x=11.71-61; \text{ also}$$

$$(13.11+1)x=13(11.71-61); \text{ also}$$

$$x=\frac{13.(11.71-61)}{13.11+1}=65.$$

Setze den Wert für x in (2), so ist $y=61+\frac{1}{13}.65=66$.

β) Multipliziere (1) mit 5, so ist (3) $35x-y=240$, also $x=\frac{240+y}{35}$; diesen Wert für x in (2) eingesetzt, giebt: $5y+\frac{240+y}{245}=26$, woraus $y=5$. Den Wert für y in (1) eingesetzt, giebt $7x-1=48$, also $x=7$.

16. Setze zur Abkürzung $3{,}14159=a$, so ist (1) $\frac{x}{a}+ay=a^2+1$; (2) $ax-\frac{y}{a}=a^2-1$. Dividiere (1) durch a und multipliziere (2) mit a, so ist (3) $\frac{x}{a^2}+y=a+\frac{1}{a}$; (4) $a^2x-y=a(a^2-1)$; die Summe von (3) und (4) giebt $x\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=a\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$; also $x=a$. Setze diesen Wert für x in (1), so ist $\frac{a}{a}+ay=a^2+1$; also $ay=a^2$; daher $y=a$. Mithin ist

$$x=y=a=3{,}14159.$$

17. α) Nach A ist: $(13+13)x=194+40$; $x=\frac{194+40}{13+13}=9$.

$$(11+11)y=194-40; \quad y=\frac{194-40}{11+11}=7.$$

β) Nach A ist: $2ax=2a^2+2ab$; $x=\frac{2a(a+b)}{2a}=a+b$.

$$2by=2ab-2b^2; \quad y=\frac{2b(a-b)}{2b}=a-b.$$

18. Durch Addition der beiden Gl. wird:

$$\frac{2x}{a+b}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}; \text{ also}$$

$$2x=\frac{2a(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2a}{a-b};\ x=\frac{a}{a-b}.$$

Subtrahiere die beiden gegebenen Gl., so wird:

$$\frac{2y}{a-b}=\frac{2b}{a^2-b^2};\ \text{daher}\ y=\frac{b}{a+b}.$$

19. Ordne die beiden Gl., so ist:

$$(1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=m;\ (2)\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-n.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gl. findet man:

$$\frac{2}{y}=m-n;\ y=\frac{2}{m-n};\ \frac{2}{x}=m+n;\ x=\frac{2}{m+n}.$$

20. α) Dividiere (1) durch a, so wird: (3) $\frac{x+a}{na}+\frac{y-b}{a}=2.$

Subtrahiere (3) von (2), so ist: $x+a-\frac{x+a}{na}=na-1$ oder $\frac{(x+a)(na-1)}{na}=na-1$; daher $\frac{x+a}{na}=1$ oder $x+a=na$; also $x=a(n-1)$.

Setze den Wert für $\frac{x+a}{n}=a$ in (1), so wird:

$$a+y=2a+b;\ \text{also}\ y=a+b.$$

β) Um aus (1) die Wurzelgrößen fortzuschaffen, erhebe man diese Gl. ins Quadrat und man erhält:

$$(3)\ x+y=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Setze aus (1) den Wert für $\sqrt{x+y}$ in (2), so wird

$$(4)\ x-y=(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Aus (3) und (4) folgt nach A: $x=a(a+b)$ und $y=b(a+b)$.

21. Nach C. Stellt man aus beiden Gl. die Werte bezüglich für y und x einander gleich, so ist:

a) $x-d=\frac{m}{n}x$ oder $(n-m)x=dn$; $x=dn:(n-m)$

b) $\frac{n}{m}y=y+d$ oder $(n-m)y=dm$; $y=dm:(n-m)$.

22. Nach E. Wir multiplizieren die erste der gegebenen Gl. mit dem unbestimmten Faktor β und subtrahieren vom Resultate die zweite, so ist:

$$(3)\ (\beta m-r)x+(\beta n-s)y=\beta p-t,$$

welche Gleichung eine Kombination der beiden gegebenen Gl. ist und daher statt einer der beiden ursprünglichen Gl. benutzt werden kann. Wir können sogar aus dieser Gl. (3), in welcher die Koeffizienten von x und y verschiedene Funktionen derselben noch unbestimmt gelassenen Größe β sind, unmittelbar jede der beiden Unbekannten x und y

finden. Wollen wir nämlich y bestimmen, so dürfen wir nur β so wählen, daß der Koeffizient von x zu Null wird, also $\beta m - r = 0$ oder $\beta = \frac{r}{m}$ setzen, wodurch wir erhalten: $\left(\frac{r}{m}n - s\right)y = \frac{r}{m}p - t$ oder $(nr - ms)y = pr - mt$, woraus

$$y = \frac{pr - mt}{nr - ms} = \frac{mt - pr}{ms - nr}.$$

Wollen wir aber x bestimmen, so wählen wir β so, daß der Koeffizient von y zu Null wird; wir setzen also $\beta n - s = 0$, woraus $\beta = \frac{s}{n}$; dann kommt $\left(\frac{s}{n}m - r\right)x = \frac{s}{n}p - t$ oder

$$(ms - nr)x = ps - nt \text{ oder endlich } x = \frac{ps - nt}{ms - nr}.$$

23. Nach C erhalten wir:

$$\frac{abx - e}{\pm cd} = \frac{afx - h}{cg}; \text{ hieraus wird:}$$

$a(bg \mp df)x = eg \mp dh$; also $x = (eg \mp dh) : \{a(bg \mp df)\}$.

Ferner: $\frac{e \pm cdy}{ab} = \frac{h + cgy}{af}$; daher: $y = (ef - bh) : \{c(bg \pm df)\}$.

24. Nach C ist: $\frac{17x - 144}{13} = \frac{890 - 23x}{19}$; daher

$19 . 17x - 19 . 144 = 13 . 890 - 13 . 23x$ oder
$(13 . 23 + 19 . 17)x = 13 . 890 + 19 . 144$; also

$$x = \frac{13 . 890 + 19 . 144}{13 . 23 + 19 . 17} = 23.$$

Ferner ist: $\frac{144 + 13y}{17} = \frac{890 - 19y}{23}$; daher

$$y = \frac{17 . 890 - 23 . 144}{17 . 19 + 23 . 13} = 19.$$

25. Nach E. Multipliziere (1) mit dem unbestimmten Faktor β und addiere das Resultat zu (2), so wird:

(3) $(5\beta + 9)x - (7\beta + 11)y = 20\beta + 44$.

Soll x zuerst bestimmt werden, so setze den Faktor von y gleich Null; also

$7\beta + 11 = 0$; daher $\beta = -\frac{11}{7}$; daher wird
$(-5 . \frac{11}{7} + 9)x = -20 . \frac{11}{7} + 44$ oder
$(7 . 9 - 5 . 11)x = 7 . 44 - 20\ 11$; daher

$$x = \frac{7 . 44 - 20 . 11}{7 . 9 - 5 . 11} = 11.$$

Zur Bestimmung von y setze $5\beta + 9 = 0$; also $\beta = -\frac{9}{5}$:
$-(-7 . \frac{9}{5} + 11)y = 44 - 20 . \frac{9}{5}$ oder

$$(7.9-5.11)y=5.44-20.9;\text{ daher}$$
$$y=\frac{5.44-20.9}{7.9-5.11}=5.$$

26. Nach §. 8 γ) des I. Teiles ergiebt sich aus den beiden gegebenen Gl., daß
$$nx+\frac{1}{n}y=\frac{1}{n}x+ny.$$
Diese Gl. giebt entwickelt:
$$x\left(n-\frac{1}{n}\right)=y\left(n-\frac{1}{n}\right)\text{ oder }(x-y)\left(n-\frac{1}{n}\right)=0;$$
daher $x-y=0$; also $x=y$, weshalb man auch $\frac{1}{n}x$ für $\frac{1}{n}y$ in die erste Gl. setzen kann, wodurch wir erhalten:
$$nx+\frac{1}{n}x=n\text{ oder }(n^2+1)x=n^2;\text{ daher ist;}$$
$$x=y=n^2:(n^2+1).$$

27. Multipliziere (2) mit $2\frac{1}{2}$ und subtrahiere das Resultat von (1), so wird:
$$(77+2\tfrac{1}{2}.35)y=1209\tfrac{1}{3}+2\tfrac{1}{2}.152\tfrac{1}{3};\text{ daher}$$
$$y=\frac{1209\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}.152\frac{1}{3}}{77+2\frac{1}{2}.35}=9\tfrac{2}{3}.$$
Setze den Wert für y in (1), so ist:
$$24x=35.9\tfrac{2}{3}-152\tfrac{1}{3};\text{ also }x=\frac{35.9\frac{2}{3}-152\frac{1}{3}}{24}=7\tfrac{3}{4}.$$

28. Die beiden gegebenen Gl. lassen sich umformen in
(1) $(a+b)x+by=a(a+b)$;
(2) $(a-b)x-ax=b(a-b)$.
Setzt man aus (2) den Wert für x in (1) und entwickelt die sich ergebende Gl., so ist:
$$[(a+b)(a-b)+ab]y=[(a+b)(a-b)+ab](a+b).$$
Dividiert man diese Gl. durch $[(a+b)(a-b)+ab]$, so erhält man $y=a+b$. Diesen Wert für y in (1) eingesetzt, liefert: $(a+b)x+b(a+b)=a(a+b)$. Dividiert man diese Gl. durch $(a+b)$, so erhält man $x+b=a$, folglich $x=a-b$.

29. Multipliziere (1) mit 3 und subtrahiere das Resultat von (2), so ist:
$$(\tfrac{5}{5}\tfrac{3}{6}-\tfrac{3}{7})y=39{,}2-3.6{,}3;\ y=\frac{39{,}2-3.6{,}3}{\frac{5}{5}\frac{3}{6}-\frac{3}{7}}=39{,}2.$$
Setze diesen Wert für y in (1), so ist: $\frac{x}{9}+\frac{39{,}2}{7}=6{,}3$;
$$\text{also }x=\frac{9(7.6{,}3-39{,}2)}{7}=6{,}3.$$

30. Multipliziere (1) mit b und (2) mit n und addiere diese beiden Gl., so wird:

$$\frac{an+bm}{am}x=\frac{bp+cn}{cp};\text{ also}$$

$$x=\frac{am(bp+cn)}{cp(an+bm)}\text{ und daher}$$

$$y=\frac{bn(ap-cm)}{cp(an+bm)}.$$

31. Subtrahiere (2) vom Dreifachen der ersten Gl., so ist: $-22y=209$; also $y=-9\frac{1}{2}$; daher $x=-5\frac{1}{2}$.

32. Durch Umformung der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$(1)\ (a-b)x+(a+b)y=2a$$

$$(2)\ (a-b)x-(a+b)y=2b.$$

Aus der Addition und Subtraktion von (1) und (2) folgt:

$$2(a-b)x=2(a+b);\text{ also } x=\frac{a+b}{a-b};$$

$$2(a+b)y=2(a-b);\text{ also } y=\frac{a-b}{a+b}.$$

33. Durch Addition und Subtraktion der beiden Gl. wird:

$$(3)\ ax+by=a^2+2ab-b^2$$

$$(4)\ bx-ay=-a^2+2ab+b^2.$$

Multipliziere (3) mit a und (4) mit b, so hat man:

$$(5)\ a^2x+aby=a(a^2+2ab-b^2);$$

$$(6)\ b^2x-aby=b(-a^2+2ab+b^2).$$

Durch Addition von (5) und (6) ergiebt sich:

$$(a^2+b^2)x=(a^2+b^2)(a+b);$$

folglich $x=a+b$ und daher $y=a-b$.

34. Addiere und subtrahiere die beiden hier gegebenen Gl., so ist, wenn man die Summe durch a und die Differenz durch $b-c$ dividiert:

$$(3)\ x+y=2a;\ (4)\ x-y=2(b-c).$$

Aus (3) und (4) erhält man durch Addition und Subtraktion: $x=a+b-c$ und $y=a-b+c$.

35. Multipliziere (1) mit $(b-c)$ und (2) mit $(b+c)$, so ist:

$$(3)\ (a+b)(b-c)x-(b+c)(b-c)y=(b-c)[a(a-4b) -c(c-4b)];$$

$$(4)\ (a-c)(b+c)x+(b-c)(b+c)y=(b+c)[a(a+b-c) +5bc-4c^2-2b^2].$$

(3) und (4) addiert, giebt:

$$x[(a+b)(b-c)+(a-c)(b+c)]=(b-c)[a(a-4c)-c(c-4b)] +(b+c)[a(a+b-c)+5bc-4c^2-2b^2];\text{ oder:}$$

$$x(b^2+2ab-2bc-c^2)=(a-2b+3c)(b^2+2ab-2bc-c^2);$$

folglich $x=a-2b+3c$.

Diesen Wert für x in (2) substituiert, giebt:

$$(b-c)y=a(a+b-c)+5bc-4c^2-2b^2- (a-c)(a-2b+3c)=(b-c)(3a-2b+c);$$

folglich $y=3a-2b+c$.

36. α) Multipliziere die Gl. (1) mit 21 und Gl. (2) mit 18 und ordne sie, so hat man:

(3) $3x-77y=-151$ und (4) $34y-19x=49$.

Multipliziere (3) mit $6\frac{1}{3}$ und addiere diese Gl. zu (4), so ist: $453\frac{2}{3}y=907\frac{1}{3}$; folglich $y=2$ und daher $x=1$.

β) Entwickelt man die beiden hier gegebenen Gl., so erhält man:

(3) $528x+955y=8370$; (2) $79x+71y=821$.

Multipliziere (3) mit 71 und (4) mit 955 und nimm die Differenz zwischen diesen Gl., so ist: $37957x=189785$; folglich $x=5$ und daher $y=6$.

37. Multipliziert man (1) mit m und (2) mit a, so ist:

(3) $\frac{am}{x}-\frac{bm}{y}=cm$; (4) $\frac{am}{x}-\frac{an}{y}=ap$.

Subtrahiere (4) von (3) und bestimme y, so ist $y=(an-bm):(cm-ap)$. Setzt man den für y gefundenen Wert in (1) und bestimmt x, so findet man $x=(an-bm):(cn-bp)$.

38. Dividiere die erste Gleichung durch $a(a+b)$, so ist:

(3) $\frac{x}{a+b}+\frac{by}{a(a+b)}=\frac{2(a-b)}{a}$. Hierzu (2) addiert, giebt:

$\frac{by}{a(a+b)}+\frac{y}{a-b}=\frac{a^2+b^2+2b(a-b)}{ab}$ oder:

$\frac{a^2-b^2+2ab}{a^2-b^2}y=\frac{a^2-b^2+2ab}{b}$; durch a^2-b^2+2ab dividiert,

giebt: $\frac{1}{a^2-b^2}y=\frac{1}{b}$; folglich $y=(a^2-b^2):b$.

Setze diesen Wert für y in die erste Gl., so ist: $ax+(a^2-b^2)=2(a^2-b^2)$ oder $ax=a^2-b^2$; folglich $x=(a^2-b^2):a$.

39. Durch Entwickelung und Ordnen der beiden gegebenen Gl. ergiebt sich: (3) $y-x=2$; (4) $y+x=12$; $x=5$, $y=7$.

40. Verfährt man hier wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man:

(3) $45y-31x=25$; (4) $y+6x=34$.

Setze aus (4) den Wert für y in (3), so wird: $45(34-6x)-31x=25$; woraus $x=5$ und $y=4$.

41. Entwickelt man die beiden gegebenen Gl., so wird:

(1) $55x-59y=-87$; (2) $101y-105x=73$.

Nach Methode D. Setze $x_1=\alpha_1=1$, $x_2=\alpha_2=2$ in (1) und suche die diesen Werten für x_1 und x_2 entsprechenden Werte für y_1 und y_2. Für $x_1=1$ wird $y_1=2\frac{24}{59}$, für $x_2=2$ wird $y_2=3\frac{20}{59}$, daher wird, wenn wir für x_1 und y_1 die zugehörigen Werte in (2) setzen,

$\varphi'=73+1.105-101.2\frac{24}{59}=-65\frac{5}{59}$

$\varphi''=73+2.105-101.3\frac{20}{59}=-54\frac{14}{59}$; folglich

$$x=\frac{-2\,.\,65\tfrac{5}{59}+1\,.\,54\tfrac{14}{59}}{-65\tfrac{5}{59}+54\tfrac{14}{59}}=7$$

$$y=\frac{-3\tfrac{20}{59}\,.\,65\tfrac{5}{59}+2\tfrac{24}{59}\,.\,54\tfrac{14}{59}}{-65\tfrac{5}{59}+54\tfrac{14}{59}}=\frac{-302080}{-37760}=8.$$

42. Ordnet man die Gleichungen und entwickelt sie, so erhält man:

$(3)\ 10y-x=99;\ (4)\ 80x-231y=-1463.$

Dividiere (4) durch 80 und addiere diese Gl. zu (3), so ist nach gehöriger Ordnung:

$587y=6457$, folglich $y=11$ und daher $x=11$.

43. Entwickelt man die beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man:

$(3)\ 90y-710x=5046$ und $(4)\ 20y-55x=121.$

Multipliziert man (4) mit $4\tfrac{1}{2}$ und subtrahiert diese Gleichung von (3) und bestimmt y, so erhält man:

$y=-20\tfrac{662}{925}$ und hieraus $x=-9\tfrac{678}{925}$.

44. Aus der ersten Gleichung erhält man $(3)\ 23x=7y$ und aus der zweiten Gleichung ergiebt sich: $(4)\ y=21x-248$. Setze diesen Wert für y in (3) so ist:
$23x=7(21x-248)$; folglich $x=14$ und daher $y=46$.

45. Löst man die Proportionen auf und ordnet die Gleichungen, so hat man:

$(1) -12x+147y=429;\ (2)\ 12x+95y=297.$

Die Gleichungen (1) und (2) addiert, so ist:

$242y=726$; folglich $y=3$ und hieraus $x=1$.

46. Nach (1) ist $x=\frac{md-nby}{an-cm}$ und nach (2) ist

$x=\frac{eq-(hp-fq)y}{gp}$. Es ist daher:

$$\frac{md-bny}{an-cm}=\frac{eq-(hp-fq)y}{gp},\ \text{oder}$$

$$y[(an-cm)(hp-fq)-bgnp]=eq(an-cm)-mdgp;$$

folglich $y=\frac{eq(an-cm)-mdgp}{(an-cm)(hp-fq)-bgnp}$.

Setzt man aus beiden Gl. die Werte für y einander gleich, so findet man $x=\frac{md(hp-fq)-benq}{(an-cm)(hp-fq)-bgnp}$.

48. α) Nach (2) ist $y=\frac{(a-b)x}{a+b}$. Diesen Wert für y in (1) gesetzt, giebt: $ax-b\cdot\frac{(a-b)x}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{2}$; daher: $2x(a^2+b^2)=(a+b)(a^2+b^2)$; durch $2(a^2+b^2)$ dividiert, giebt $x=\tfrac{1}{2}(a+b)$; daher $y=\frac{(a-b)(a+b)}{2(a+b)}=\tfrac{1}{2}(a-b)$.

β) Multipliziere (1) mit (m—b) und (2) mit (n—b) und nimm die Differenz zwischen diesen beiden Gl., so ist:
$\left\{\frac{m-b}{m-a}-\frac{n-b}{n-a}\right\}x=m-n$. Entwickelt man den Koeffizienten von x, so erhält man:
$\frac{(b-a)(m-n)}{(m-a)(n-a)}x=m-n$; diese Gleichung durch (m—n) dividiert, giebt:
$\frac{b-a}{(m-a)(n-a)}x=1$; daher $x=\frac{(m-a)(n-a)}{b-a}=$
$-\frac{(a-m)(a-n)}{a-b}$. Multipliziere die erste Gleichung mit (m—a) und setze in die dadurch erhaltene Gleichung den Wert für x, so erhält man:
$\frac{(m-a)(n-a)}{b-a}+\frac{(m-a)}{m-b}y=m-a$, durch m—a dividiert giebt:
$\frac{n-a}{b-a}+\frac{1}{m-b}y=1$ oder $\frac{1}{m-b}y=\frac{b-n}{b-a}$; folglich

$$y=\frac{(b-m)(b-n)}{a-b}.$$

49. Multipliziert man, nachdem man die Gleichungen entwickelt und geordnet hat, die Gleichung (1) mit q und Gleichung (2) mit m und subtrahiert diese beiden Gl., so ist

$$(nq-mp)y=q(m^2-n^2)-m(q^2-p^2);$$

folglich $y=\frac{q(m^2-n^2)-(q^2-p^2)m}{nq-mp}$.

Diesen Wert für y in (1) substituiert, giebt:

$$x=\frac{n(q^2-p^2)-(m^2-n^2)p}{nq-mp}.$$

50. Setzt man in die zweite Gleichung den Wert für a aus der ersten, so ist:

$$\frac{y-x+1}{x-y+1}=b\frac{x+y-1}{x-y+1} \text{ oder (3) } \frac{y-x+1}{x+y-1}=b.$$

Aus der gegebenen Gleichung folgt: (4) $\frac{x-y+1}{x+y-1}=\frac{1}{a}$.

Addiere (3) und (4), so ist: (5) $x+y=\frac{2a+ab+1}{ab+1}$.

Aus der 1. Gl. folgt: (6) $x-y=\frac{x+y-(a+1)}{a}$.

Setze in (6) den Wert für x+y aus (5), so erhält man:
(7) $x-y=\frac{1-ab}{ab+1}$. Addiere und subtrahiere (5) und (7), so wird: $x=\frac{a+1}{ab+1}$ und $y=\frac{a(b+1)}{ab+1}$.

51. Ordne die erste Gleichung und multipliziere sie mit $a+c$ und die zweite mit ac, so erhält man statt der gegebenen Gleichungen folgende:

$$(3)\ ax-cy=\frac{a^2-c^2}{b};\ (4)\ ax+cy=b.$$

Durch Addition und Subtraktion von (3) und (4) erhält man:

$$x=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ \text{und}\ y=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

52. Multipliziere (1) mit a^2-1 und (2) mit n^2+1, so ist:

$$\left.\begin{aligned}(3)\ &\frac{a^2-1}{n^2-1}x-y=(a^2-n^2)(a^2-1)\\(4)\ &\frac{n^2+1}{a^2+1}x+y+2(n^2+1)=(a^2+n^2)(n^2+1)\end{aligned}\right\}\ \text{addiert:}$$

$$\left(\frac{a^2-1}{n^2-1}+\frac{n^2+1}{a^2+1}\right)x=(a^2-n^2)(a^2-1)+(a^2+n^2)(n^2+1)-2(n^2+1);\ \text{oder}$$

$$\frac{(a^2-1)(a^2+1)+(n^2+1)(n^2-1)}{(n^2-1)(a^2+1)}x=(a^2-1)(a^2+1)+(n^2+1)(n^2-1).$$

Dividiere diese Gl. durch $(a^2-1)(a^2+1)+(n^2+1)(n^2-1)$, so ist:

$$\frac{x}{(n^2-1)(a^2+1)}=1;\ \text{also}\ x=(n^2-1)(a^2+1)=(a^2+1)(n^2-1).$$

Setze diesen Wert in die erste gegebene Gleichung, so wird:

$$\frac{(n^2-1)(a^2+1)}{n^2-1}-\frac{y}{a^2-1}=a^2-n^2;\ \text{hieraus folgt}$$

$$\frac{y}{a^2-1}=(a^2+1)-(a^2-n^2)=n^2+1;\ \text{folglich}\ y=(a^2-1)(n^2+1).$$

53. Dividiere Gl. (1) durch $a-2b$ und Gl. (2) durch $a+3c$ und addiere die hierdurch entstandenen Gl., so ist:

$$\frac{a+2b}{a-2b}x-\frac{a-3c}{a+3c}x=\frac{6ac}{a-2b}+\frac{4ab}{a+3c}\ \text{oder}$$

$$\frac{2b+3c}{(a-2b)(a+3c)}x=\frac{3c}{a-2b}+\frac{2b}{a+3c};\ \text{hieraus ergiebt sich:}$$

$(2b+3c)x=(2b+3c)(a-2b+3c)$; folglich $x=a-2b+3c$.

Diesen Wert für x setze in (2), so ist:

$$(a+3c)y=(a-3c)(a-2b+3c)+4ab;\ \text{oder}$$
$$(a+3c)y=(a+3c)(a+2b-3c);\ y=a+2b-3c.$$

54. Aus den beiden hier gegebenen Gleichungen erhält man, wenn man die erste mit x und die zweite mit xy multipliziert:

$$(3)\ ax+by=2(a^2-b^2);$$

(4) $\frac{y}{a-b}-\frac{x}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ mit $a(a+b)$ multipliziert, liefert:

(5) $\frac{a(a+b)}{a-b}y-ax=\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{b}$; diese Gleichung zu (3) addiert, giebt:

$$\left(\frac{a(a+b)}{a-b}+b\right)y=2(a^2-b^2)+\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{b};\text{ oder:}$$

$$\frac{a(a+b)+b(a-b)}{a-b}y=\frac{[a(a+b)+b(a-b)](a+b)}{b};$$

diese Gleichung durch $a(a+b)+b(a-b)$ dividiert, giebt:

$\frac{y}{a-b}=\frac{a+b}{b}$; $y=\frac{a^2-b^2}{b}$. Diesen Wert für y in (3) gesetzt, giebt: $ax+(a^2-b^2)=2(a^2-b^2)$ oder $ax=a^2-b^2$; $x=\frac{a^2-b^2}{a}$.

55. Aus der 1. gegebenen Gleichung erhält man durch Ordnen: $x-y=\frac{2(a-b)^2-4b^2}{a^2-b^2}-2$; hieraus ergiebt sich:

(3) $x-y=-\frac{4ab}{a^2-b^2}$ und aus der 2. Gleichung folgt:

$$(4)\ by-ax=\frac{ab(3a+b)-(a+b)^2(a-b)+ab(a-b)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{ab(3a+b)-(a^2+ab+b^2)(a-b)}{a^2-b^2}.$$

Multipliziere (3) mit b, so ist:

(5) $bx-by=-\frac{4ab^2}{a^2-b^2}$. Addiere (4) und (5), so ist:

$$(b-a)x=\frac{ab(3a+b)-(a^2+ab+b^2)(a-b)-4ab^2}{(a-b)(a+b)}=$$

$$-\frac{(a-b)^2(a-b)}{(a-b)(a+b)}=-\frac{(a-b)^2}{a+b};\text{ daher ist auch:}$$

$$(a-b)x=\frac{(a-b)^2}{a+b};\ x=\frac{a-b}{a+b}.\text{ Aus (3) folgt:}$$

$$y=x+\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2+4ab}{(a+b)(a-b)}=$$

$$\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

56. Ordne die beiden Gleichungen und multipliziere die erste mit $(7a+6b)xy$ und die zweite mit $\frac{1}{7a^2-6b^2}xy$, so erhält man:

$$(3)\quad \frac{7a+6b}{3a+2b}x-y=\frac{306a^3+324a^2b-1015ab^2-810b^3}{120ab(3a+2b)}$$

$$(4)\quad \frac{3a^2-2b^2}{7a^2-6b^2}x+y=\frac{1026a^4-393a^2b^2-430b^4}{120ab(7a^2-6b^2)}.$$

Durch Addition von (3) und (4) erhält man:

$$\left(\frac{7a+6b}{3a+2b}+\frac{3a^2-2b^2}{7a^2-6b^2}\right)x=\frac{306a^3+324a^2b-1015ab^2-810b^3}{120ab(3a+2b)}$$

$$+\frac{1026a^4-393a^2b^2-430b^4}{120ab(7a^2-6b^2)}; \text{ daher:}$$

$$(58a^3+48a^2b-48ab^2-40b^3)x=$$

$$\frac{(58a^3+48a^2b-48ab^2-40b^3)(9a^2-10b^2)}{12ab}; \text{ also}$$

$x=\frac{9a^2-10b^2}{12ab}=\frac{3a}{4b}-\frac{5b}{6a}$. Durch Einsetzung des Wertes für x in (4) wird: $y=\frac{(36a^2+35b^2)(7a^2-6b^2)}{40ab(7a^2-6b^2)}=\frac{36a^2+35b^2}{40ab}=\frac{9a}{10b}+\frac{7b}{8a}$.

57. Durch Umformung der ersten Gleichung erhält man:

$$(3)\quad (x+y)(x-y)=a.$$

Setze in (3) den Wert für x—y aus Gl. (2), so ist:

$$(4)x+y=\frac{a}{b}.$$

In (2) und (4) ist die Summe und Differenz der Unbekannten gegeben; daher ist

$$x=(a+b^2):2b, \text{ und } y=(a-b^2):2b.$$

58. Entwickelt und ordnet man die gegebene erste Gleichung, so erhält man: (3) $4y+2x=13$.

Schafft man in (2) die Brüche fort, indem man dieselbe mit $2(4y-5)(7-6y)$ multipliziert, so ist:

$$(4)\quad 4y-2x=7.$$

Durch Addition und Subtraktion von (3) und (4) wird:

$$x=1\tfrac{1}{2} \text{ und } y=2\tfrac{1}{2}.$$

59. Aus den beiden gegebenen Gleichungen erhält man (1) $28x=29y$ und (2) $23y-22x=6$. Multipliziere (1) mit 22 und (2) mit 28, und addiere dieselben, so wird:

$6y=168$; folglich $y=28$ und hieraus $x=29$.

60. Um in (1) die Brüche wegzuschaffen, multipliziere man dieselbe mit $10(2x-8)$, so ist:

$$(7+8x)(2x-8)-10(3x-6y)=40(2x-8)-2(2x-8)(9-4x),$$

$$\text{oder } (3) -x+y=-2$$

Multipliziert man die Gleichung (2) mit $4(4y-6)$, so ist:

$$(6y+9)(4y-6)=$$

$$3\tfrac{1}{4}\times 4(4y-6)+(3y+4)(4y-6)2-4(3y+5x), \text{ oder}$$

$$(4)\quad 5x-9y=-18.$$

(3) mit 5 multipliziert und zu (4) addiert, giebt: $-4y=-28$ oder $4y=28$; $y=7$ und hieraus $x=9$.

61. Schafft man in (1) die Brüche fort und ordnet sie, so ist:

$$(3)\ 236x-301y=-1991.$$

Nach (2) ist $x=\frac{4y+22}{5}$. Substituiert man diesen Wert für x in (3), so hat man:

$$236\times\frac{4y+22}{5}-301y=-1991;\ y=27;\ \text{daher } x=26.$$

62. Multipliziert man die Gleichung (1) mit $(4x+2)(4x-2)$ und Gl. (2) mit $4x+6y+3$, so wird:

$$(3)\ 20x+11y=38;\ (4)\ 22x+15y=96.$$

Nimmt man aus den beiden Gleichungen (3) und (4) die Werte für x und stellt sie einander gleich, so ist:

$$\frac{11y+38}{20}=\frac{96-15y}{22};\ y=2 \text{ und daher } x=3.$$

63. α) Schafft man aus beiden Gleichungen die Brüche fort, und ordnet sie, so ist:

$$(3)\ x+4y=38;\ (4) 14x+11y=127.$$

Multipliziert man (3) mit 14 und subtrahiert von dieser Gleichung die Gleichung (4), so erhält man:

$$45y=405;\ \text{folglich } y=9 \text{ und hieraus } x=2.$$

β) Die linke Seite der ersten Gleichung läßt sich auf folgende Weise darstellen: $\frac{4x-8y+5}{2}=2x-4y+\frac{5}{2}$ und die rechte Seite $\frac{10x^2-12y^2-14xy+2x}{5x+3y+3}+2=2x-4y+\frac{6(x+3y+1)}{5x+3y+3}$.

Daher ist: $2x-4y+\frac{5}{2}=2x-4y-\frac{6(x+3y+1)}{5x+2y+3}$, oder

$$(1)\ 13x-21y=-3.$$

Aus Gleichung (2) folgt: $2\sqrt{6+x}=3\sqrt{6-y}$. Erhebe diese Gleichung in's Quadrat, so ist:

$$4(6+x)=9(6-y) \text{ und daraus ergiebt sich}$$

$$(3)\ 4x+9y=30.$$

Multipliziere (3) mit $2\frac{1}{3}$ und addiere sie zu (1), so ist:

$$22\tfrac{1}{3}x=67;\ \text{folglich } x=3 \text{ und daher } y=2.$$

γ) Aus (2) folgt: (3) $2\sqrt{y-x}=3\sqrt{20-x}$.

Aus dieser Gleichung setze den Wert für $\sqrt{20-x}=\frac{2}{3}\sqrt{y-x}$ in Gleichung (1), so ist: $\sqrt{y}-\sqrt{y-x}=\frac{2}{3}\sqrt{y-x}$, oder

$$(4)\ \sqrt{y}=\tfrac{5}{3}\sqrt{y-x}.$$

Erhebe (3) und (4) in's Quadrat und ordne sie, so hat man:

$$(5)\ 5x+4y=180;\ (6)\ 25x-16y=0.$$

Addiere die mit 4 multiplizierte Gleichung (5) zu (6), so ist: $45x=720$; also $x=16$ und daher $y=25$.

64. Durch Entwickelung der gegebenen Gleichungen erhält man: (3) $15x+4y=42$; (4) $19y-51x=-45$.

Multipliziere (3) mit 19 und (4) mit 4, und nimm alsdann die Differenz zwischen diesen Gleichungen, so erhält man: $489x=978$; folglich $x=2$; daher $4y=12$; folglich $y=3$.

65. Entwickelt man die beiden Gleichungen, so erhält man: (3) $12y-7x=17$; (4) $5x+14y=33$.

Addiere (3) und (4), so ist $26y-2x=50$, oder (5) $13y-25=x$. Setze diesen Wert für x in (4), so ist:

$$5(13y-25)+14y=33;$$

daher $79y=158$; also $y=2$ und deshalb $x=1$.

66. Setzt man statt $\frac{1}{2x+3y-29}=z$, und statt $\frac{1}{7x-8y+24}=u$, so verwandeln sich die gegebenen Gl. in folgende: (3) $10z+9u=8$; (4) $2z-3u=0$.

Hieraus erhält man $z=\frac{1}{2}$ und $u=\frac{1}{3}$.

Substituiert man diese für z und u gefundenen Werte, so ist, da $z=\frac{1}{2}$, also $10z=5$, und $u=\frac{1}{3}$, also $9z=3$,

$$\frac{10}{2x+3y-29}=5 \text{ oder (5) } 2x+3y=31; \quad \frac{9}{7x+8y+24}=3$$

oder (6) $7x-8x=-21$.

Aus (5) ergiebt sich $x=\frac{1}{2}(31-3y)$. Diesen Wert für x in Gleichung (6) gesetzt, giebt: $\frac{7(31-3y)}{2}-8y=-21$; folglich $y=7$ und hieraus $x=5$.

Man kann diese Gl. auch direkt auflösen, denn aus der 2. Gl. folgt, daß

$$2x+3y-29=\tfrac{2}{3}(7x-8y+24).$$

Setze diesen Wert für $2x+3y-29$ in die 1. Gl. und entwickele dieselbe, so wird:

$$\alpha)\ 7x-8y=-21.$$

Aus dieser Gl. folgt, daß $\frac{7x-8y}{3}=-7$; daher ergiebt sich aus der 2. Gl., daß $\frac{2x+3y-29}{2}=-7+8=1$; also

$$\beta)\ 2x+3y=31.$$

Löst man die beiden Gl. α und β vermittels der regula falsi auf und setzt man in die erste Gl. α) für $x_1=1$ und $x_2=2$, so findet man $y_1=3\frac{1}{2}$ und $y_2=4\frac{3}{8}$. Man setze jetzt die zusammengehörigen Werte für x_1 und y_1, so wie für x_2 und y_2 in die Gl. β), so wird $\varphi'=18\frac{1}{2}$ und $\varphi''=13\frac{7}{8}$. Daher ist nach §. 421:

$$x=\frac{18\tfrac{1}{2}\,.\,2-13\tfrac{7}{8}\,.\,1}{18\tfrac{1}{2}-13\tfrac{7}{8}}=\tfrac{185}{37}=5,$$

$$y=\frac{18\tfrac{1}{2}\,.\,4\tfrac{3}{8}-13\tfrac{7}{8}\,.\,3\tfrac{1}{2}}{18\tfrac{1}{2}-13\tfrac{7}{8}}=\tfrac{259}{37}=7.$$

67. Ordnet man die beiden Gleichungen und multipliziert überdies noch die Gleichung (2) mit (-1), so ist

$$(3)\quad \frac{8}{2x-3y+17}+5x-8y=-39;$$

$$(4)\quad 2(5x-8y)-\frac{5}{2x-3y+17}=-88\tfrac{1}{2}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2x-3y+17}=z$ und $5x-8y=u$, so hat man statt der Gleichungen (3) und (4):

$$(5)\ 8z+u=-36:\ (6)\ 2u-5z=-88\tfrac{1}{2}.$$

(5) mit 2 multipliziert und hiervon (6) abgezogen, giebt: $21z=10\tfrac{1}{2}$; folglich $z=\tfrac{1}{2}$ und hieraus $u=-43$.

Substituiert man jetzt die für u und z gefundenen Werte, so ist: $\frac{1}{2x-3y+17}=\tfrac{1}{2}$ oder (7) $3y-2x=15$

und (8) $5x-8y=-43$.

Stellt man die sich aus (7) und (8) ergebenden Werte für y einander gleich, so erhält man:

$\frac{2x+15}{3}=\frac{5x+43}{8}$; folglich $x=9$ und hieraus $y=11$.

68. Setzt man $\frac{1}{1-x+y}=z$ und $\frac{1}{x+y-1}=u$, so erhält man statt der gegebenen Gleichungen folgende:

(3) $z-u=\tfrac{2}{3}$ und (4) $z+u=\tfrac{4}{3}$.

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (3) und (4) erhält man $z=1$ und $u=\tfrac{1}{3}$.

Substituiert man die für z und u gefundenen Werte, so ist:

$$\frac{1}{1-x+y}=1,\ \text{oder (5)}\ x-y=0;$$

$$\frac{1}{x+y-1}=\tfrac{1}{3},\ \text{oder (6)}\ x+y=4.$$

Aus (5) und (6) folgt $x=y=2$.

69. Entwickele nach §. 209 die beiden gegebenen Gleichungen, so wird:

$$(1)\quad \frac{xy-a}{x(xy-a+1)}=\frac{xy-b}{x(xy-b-1)},$$

$$(2)\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{xy}=1.$$

Aus (1) folgt: $xy=\frac{1}{2}(a+b)$. Setze diesen Wert für xy in (2) und entwickele dieselbe, so wird:

$$\frac{1}{y}=\frac{a+b+2}{a+b}; \text{ also } y=\frac{a+b}{a+b+2}; \text{ daher}$$

$$x\frac{a+b}{a+b+2}=\frac{a+b}{2}; \text{ also } x=\frac{1}{2}(a+b+2).$$

70. Man quadriere oder erhebe beide Teile der Gleichung (1) auf die zweite Potenz, um die Wurzelgrößen wegzuschaffen, so hat man:

$72+x^2+4y^2+4xy=(x+2y+2)^2$, oder (3) $x+2y=17$.

Da in der Gleichung (2) mehrere Wurzelgrößen vorkommen, so beseitige man zuerst eine, dann die zweite und zuletzt die dritte. Quadriert man demnach beide Teile dieser Gl., so ist:

$$x+y+3+2\sqrt{(x+1)(y+2)}=x+y+3+\sqrt{60+4xy}; \text{ oder}$$

$$2\sqrt{(x+1)(y+2)}=\sqrt{60+4xy}; \text{ quadriert, giebt:}$$

$$4(x+1)(y+2)=60+4xy, \text{ also (4) } 4x+2y=26.$$

Subtrahiert man (3) von (4) und bestimmt x, so erhält man:

$$x=3 \text{ und hieraus } y=7.$$

71. Bringt man vorerst die rationalen Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens und erhebt beide Teile auf die zweite Potenz, so erhält man aus (1) folgende Gleichung:

$$y^2-2xy+x^2=x^2-y\sqrt{y^2+8x}, \text{ oder:}$$

$$(3)\ y^2-2xy=-y\sqrt{y^2+8x}, \text{ oder:}$$

$$(4)\ y(y-2x+\sqrt{y^2+8x})=0; \text{ daher } y_1=0.$$

Dividieren wir (4) durch y und quadrieren diese Gleichung, so ist: $y^2-4xy+4x^2=y^2+8x$ oder

(5) $x(x-y-2)=0$, daher $x_1=0$; und es ist (6) $x-y=2$.

Erhebt man Gleichung (2) ins Quadrat, so hat man:

$$(x-y)^2=x\sqrt{x^2-4xy+y\sqrt{16y^2-x-y+4}}+y^2.$$

Quadriert man diese Gleichung, so ist:

$$(x^2-2xy)^2=x^2(x^2-4xy)+x^2y\sqrt{16y^2-x-y+4} \text{ oder}$$

$$4y=\sqrt{16y^2-x-y+4}; \text{ quadriert, giebt:}$$

$$16y^2=16y^2-x-y+4; \text{ daher: (7) } x+y=4.$$

Aus (6) und (7) folgt: $x_2=3$ und $y_2=1$.

72. Multipliziere (1) mit 3 und (2) mit 5, so ist:

$$(3)\ 15\sqrt{x}+9\sqrt{y}=24. \quad (4)\ 15\sqrt{x}+20\sqrt{y}=35.$$

$$(4)-(3) \text{ giebt } 11\sqrt{y}=11; \text{ also } \sqrt{y}=1;$$

folglich $y=(+1)^2=1$. Diesen Wert für y in (1) gesetzt, giebt:

$$5\sqrt{x}=5; \text{ also } \sqrt{x}=1; \text{ folglich } x=(+1)^2=1.$$

73. (1) $3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{y}=16$; (2) $-9\sqrt[3]{x}+7\sqrt[3]{y}=-8$.

Multipliziere (1) mit 3, und addiere sie zu (2), so hat man:

$-8\sqrt[3]{y}=40$; oder: $\sqrt[3]{y}=-5$; $y=(-5)^3=-125$.

Setze den Wert für $\sqrt[3]{y}$ in (1), so ist: $3\sqrt[3]{x}=16-25$; daher $3\sqrt[3]{x}=-9$; also $\sqrt[3]{x}=-3$; $x=(-3)^3=-27$.

74. Entwickelt man die zweite hier gegebene Gleichung, so hat man:

$$\sqrt{\frac{(2-y)(3+x)}{(3+x)(3-x)}}=\tfrac{3}{2} \text{ oder } \sqrt{\frac{2-y}{3-x}}=\tfrac{3}{2}.$$

Nun ist nach §. 77: $\frac{2-y}{3-y}=\frac{(-1).(2-y)}{(-1).(3-x)}=\frac{y-2}{x-3}$; daher ist die zweite Gleichung:

$$\frac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x-3}}=\tfrac{3}{2}; \text{ also } \sqrt{y-2}=\tfrac{3}{2}\sqrt{x-3}.$$

Setze den Werth für $\sqrt{y-2}$ in die erste Gl. und entwickele dieselbe, so ist:

$\sqrt{x-3}=2$; folglich $x-3=2^2$; also $x=2^2+3=7$.
$\sqrt{y-2}=3$; „ $y-2=3^2$; „ $y=3^2+2=11$.

75. α) Setzt man hier $\sqrt{x+y}=z$ und $\sqrt{x-y}=u$, so erhalten wir statt der gegebenen Gleichungen folgende zwei:

$$\frac{1}{2u}-\frac{1}{2z}=\tfrac{1}{15} \text{ oder: (3) } \frac{1}{u}-\frac{1}{z}=\tfrac{2}{15};$$

und (4) $15z+15u=8zu$.

(4) durch $15zu$ dividiert, giebt (5) $\frac{1}{u}+\frac{1}{z}=\frac{8}{15}$.

Aus (3) und (5) folgt: $z=5$ und $u=3$.

Substituiert man die für z und u gefundenen Werte, so hat man: $\sqrt{x+y}=5$; daher: (6) $x+y=25$;
$\sqrt{x-y}=3$; „ (7) $x-y=9$.

Aus den Gleichungen (6) und (7) erhält man durch Addition und Subtraktion: $x=17$ und $y=8$.

Man kann diese Gl. auch direkt auflösen: Aus der ersten Gl. folgt:

(1) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\frac{2}{15}\sqrt{(x+y)(x-y)}$ und aus der zweiten Gl.

(2) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\frac{8}{15}\sqrt{(x+y)(x-y)}$

(1)+(2)=(3) $\sqrt{x+y}=\frac{1}{3}\sqrt{(x+y)(x-y)}$

(2)−(1)=(4) $\sqrt{x-y}=\frac{1}{5}\sqrt{(x+y)(x-y)}$

Dividiere (3) durch $\sqrt{x+y}$ und (4) durch $\sqrt{x-y}$, so ist

(5) $3=\sqrt{x-y}$ und (6) $5=\sqrt{x+y}$.

Erheben wir (5) und (6) ins Quadrat, so ist:
(7) $x-y=9$ und (8) $x+y=25$; daher $x=17$ und $y=8$.

β) Aus der zweiten hier gegebenen Gleichung folgt, daß:

$$(3)\ \sqrt{x-y}=\tfrac{3}{2}\sqrt{m-y}.$$

Setzt man diesen Wert für $\sqrt{x-y}$ in die erste gegebene Gleichung, so ist:

$$\sqrt{x}-\sqrt{m-y}=\tfrac{3}{2}\sqrt{m-y},\ \text{oder:}\ \sqrt{x}=\tfrac{5}{2}\sqrt{m-y}.$$

Daher: $(4)\ x=\tfrac{25}{4}(m-y)$.

Erhebe (3) ins Quadrat, so erhält man:

$$x-y=\tfrac{9}{4}(m-y)\ \text{oder:}\ (5)\ x+\tfrac{5}{4}y=\tfrac{9}{4}m.$$

Setze aus (4) den Wert für x in (5), so hat man:

$$\tfrac{25}{4}(m-y)+\tfrac{5}{4}y=\tfrac{9}{4}m;\ y=\tfrac{4}{5}m,\ x=\tfrac{5}{4}m.$$

γ) Aus den beiden gegebenen Gleichungen erhält man durch Umformung folgende zwei Gleichungen:

$$(1)\ \sqrt{a-x}=\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$$
$$(2)\ \sqrt{b-x}=\sqrt{y}-\sqrt{y-x}.$$

Erhebt man diese beiden Gleichungen ins Quadrat, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ a-2y=2\sqrt{y(y-x)}\\(4)\ b-2y=-2\sqrt{y(y-x)}\end{array}\right\}\ \text{addiert, giebt:}$$

$$4y=a+b;\ \text{daher}\ y=\frac{a+b}{4}.$$

Jetzt erhebe man (3) ins Quadrat und man erhält:
(5) $4y(a-x)=a^2$. Setze hierin den Wert für y, so ist:

$$(a+b)(a-x)=a^2;\ \text{hieraus folgt}\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

76. Addiere die drei gegebenen Gleichungen, so wird:

$$2(x+y+z)=66\ \text{oder:}\ (4) x+y+z=33.$$

Subtrahiert man nach einander jede der drei gegebenen Gleichungen von (4), so erhält man $z=17, y=11$ und $x=5$.

77. Multipliziere (1) mit 3, so ist: (4) $3x+6y=69$;
Hiervon (2) subtrahiert, giebt: (5) $3y-2z=6$;
(5) mit (3) multipliziert, liefert: (6) $9y-6z=18$;
Hierzu (3) addiert, so wird: $14y=112$; also $y=8$.
Setze diesen Wert für y in (1), so ist:

$$x+16=23;\ \text{also}\ x=7.$$

Setze den Wert für y in (5), so ist:

$$24-2z=6;\ \text{also}\ z=9.$$

78. Setze aus der ersten Gleichung den Wert für x in die zweite Gleichung, so ist: $z=9-\tfrac{2}{3}(21-4y)$.

Setze hierin aus der dritten Gleichung den Wert für y, so hat man: $z=9-\tfrac{2}{3}[21-4(64-7\tfrac{1}{2}z)]$.

Hieraus folgt $z=7\tfrac{8}{9}$. Setze diesen Wert für z in die 2. Gleichung, so ist: $\tfrac{2}{3}x=9-7\tfrac{8}{9}$; also $x=1\tfrac{2}{3}$.

Demnach ergiebt sich aus der ersten Gleichung, daß

$$4y=21-1\tfrac{2}{3};\ \text{folglich}\ y=4\tfrac{5}{6}.$$

79. Nach der ersten gegebenen Gleichung ist: $x=\frac{1,2y-8,16}{3,4}$. Setze diesen Wert für x in die zweite Gleichung, so hat man:

$$(4)\ 5,6\times\frac{1,2y-8,16}{3,4}+1,2z=-13,44.$$

Substituiert man den sich aus (3) ergebenden Wert für z in (4), so ist:

$$\frac{5,6(1,2y-8,16)}{3,4}+\frac{1,2(5,6y-38,08)}{3,4}=-13,44.$$

Aus dieser Gleichung folgt $y=3,4$ und daher $x=-1,2$ und $z=-5,6$.

80. Nach Methode E. Man multiplíziere die beiden ersten Gl. bezüglich mit den unbestimmten Faktoren β und γ und addiere die Resultate zur dritten Gl., so wird:
(4) $(a_1\beta+b_3)x+(a_2\gamma+b_1\beta)y+(b_2\gamma+a_3)z=\beta m_1+\gamma m_2+m_3$.
Soll x zuerst bestimmt werden, so setze man die Koeffizienten von y und z gleich Null: also (5) $a_2\gamma+b_1\beta=0$; (6) $a_3+b_2\gamma=0$; alsdann erhalten wir aus (4):

$$(7)\ (a_1\beta+b_3)x=\beta m_1+\gamma m_2+m_3.$$

Aus (5) und (6) folgt: $\beta=\frac{a_2a_3}{b_1b_2}$ und $\gamma=-\frac{a_3}{b_2}$. Setze diese Werte für β und γ in Gl. (7), so wird:

$$\left(a_1\frac{a_2a_3}{b_1b_2}+b_3\right)x=\frac{a_2a_3}{b_1b_2}m_1-\frac{a_3}{b_2}m_2+m_3 \text{ oder}$$

$$(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3)x=a_2a_3m_1-a_3b_1m_2+b_1b_2m_3;\text{ daher:}$$

$$x=\frac{a_2a_3m_1-a_3b_1m_2+b_1b_2m_3}{a_1a_2a_3+b_1b_2b_3}.$$

Zur Bestimmung von y setze man die Koeffizienten von x und z gleich Null und es ist:

$$(8)\ (a_2\gamma+b_1\beta)y=\beta m_1+\gamma m_2+m_3$$

Aus (9) $a_1\beta+b_3=0$ und (10) $a_3+b_2\gamma=0$, folgt, daß

$$\beta=-\frac{b_3}{a_1} \text{ und } \gamma=-\frac{a_3}{b_2}.$$

Setze diese Werte für β und γ in (8), so wird:

$$\left(-a_2\frac{a_3}{b_2}-b_1\frac{b_3}{a_1}\right)y=-\frac{b_3}{a_1}m_1-\frac{a_3}{b_2}m_2+m_3 \text{ oder}$$

$$(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3)y=a_1a_3m_2-a_1b_2m_3+b_2b_3m_1;\text{ daher:}$$

$$y=\frac{a_1a_3m_2-a_1b_2m_3+b_2b_3m_1}{a_1a_2a_3+b_1b_2b_3}.$$

Um endlich z zu bestimmen, setze man die Koeffizienten von x und y gleich Null und es ist:

$$(11)\ (b_2\gamma+a_3)z=\beta m_1+\gamma m_2+m_3.$$

Nun folgt aus $a_1\beta+b_3=0$ und $a_2\gamma+b_1\beta=0$, daß

$$\beta = -\frac{b_3}{a_1} \text{ und } \gamma = \frac{b_1 b_3}{a_1 a^2}; \text{ daher ist:}$$

$$\left(b_2 \frac{b_1 b_3}{a_1 a_2} + a_3\right) z = -\frac{a_3}{a_1} m_1 + \frac{b_1 b_3}{a_1 a_2} m_2 + m_3 \text{ oder:}$$

$$(a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3) z = a_1 a_2 m_3 - a_2 b_3 m_1 + b_1 b_3 m_2; \text{ also}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 m_3 - a_2 b_3 m_1 + b_1 b_3 m_2}{a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3}.$$

81. Addiere die drei hier gegebenen Gleichungen, so ist:

(4) $x + y + z = 196,2.$

Subtrahiere jetzt nach einander die drei gegebenen Gleichungen von (4), so hat man: $2z = 64,2$; $z = 32,1$. $2y = 130,8$; $y = 65,4$; $2x = 197,4$; $x = 98,7$.

82. Nach Methode E. Multipliziere die beiden letzten Gl. bezüglich mit β und γ und addiere sie dann zu der ersten, so wird:

(4) $(a_1\beta + 1)x + (b_1\beta + a_2\gamma + 1)y + (b_2\gamma + 1)z = m + \beta n_1 + \gamma n_2.$

Verfahren wir nun hier, wie in Beispiel 80, so erhalten wir, wenn x, y und z in dieser Reihenfolge bestimmt werden soll

(5) $(a_1\beta + 1)x = m + \beta n_1 + \gamma n_2$

$$\left(a_1 \frac{a_2 - b_2}{b_1 b_2} + 1\right) x = m + \frac{a_2 - b_2}{b_1 b_2} n_1 - \frac{1}{b_2} n_2 \text{ oder}$$

$$\big(a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2\big) x = (b_2 m - n_2) b_1 + (a_2 - b_2) n_1;$$

daher

$$x = \frac{(b_2 m - n_2) b_1 + (a_2 - b_2) n_1}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}.$$

(6) $(b_1\beta + a_2\gamma + 1)y = m + \beta n_1 + \gamma n_2$ oder

$$\left(-b_1 \frac{1}{a_1} - a_2 \frac{1}{b_2} + 1\right) y = m - \frac{1}{a_1} n_1 - \frac{1}{b_2} n_2 \text{ oder}$$

$$\big(a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2\big) y = b_2 n_1 - (b_2 m - n_2) a_1; \text{ daher}$$

$$y = \frac{b_2 n_1 - (b_2 m - n_2) a_1}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}.$$

(7) $(b_2\gamma + 1)z = m + \beta n_1 + \gamma n_2$ oder

$$\left\{b_2 \frac{-a_1 + b_1}{a_1 a_2} + 1\right\} z = m - \frac{1}{a_1} n_1 + \frac{-a_1 + b_1}{a_1 a_2} n_2 \text{ oder}$$

$$\{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2\} z = (a_1 m - n_1) a_2 - (a_1 - b_1) n_2;$$

daher

$$z = \frac{(a_1 m - n_1) a_2 - (a_1 - b_1) n_2}{a_1(a_2 - b_2) + b_1 b_2}.$$

83. Multipliziere die erste Gleichung mit 5 und addiere dazu die zweite Gleichung, so ist: (4) $2x + 3z = 25$.

Setzt man die aus der dritten gegebenen Gleichung und aus (4) sich ergebenden Werte für z einander gleich, so findet man

$$\frac{9x+10}{11}=\frac{25-2x}{3}\text{; folglich } x=5.$$

Daher $z=\frac{25-10}{3}=5$ und aus der ersten Gleichung folgt, daß $y+5+5=5$; folglich $y=-5$.

84. Durch Umformung der hier gegebenen Gleichungen erhalten wir:

$$(1)\ x+y+z=a+b+c$$

$$(2)\ (c-b)x+(a-c)y-(a-b)z=0.$$

$$(3)\ (a+b)x+(b+c)y+(a+c)z=2(ab+bc+ac).$$

Multipliziere (1) mit $(a-b)$, so ist:

$$(4)\ (a-b)x+(a-b)y+(a-b)z=(a+b+c)(a-b).$$

Addiere (2) und (4), so wird:

$$(5)\ [(a-b)+(c-b)]x+[(a-b)+(a-c)]y=(a+b+c)(a-b).$$

Multipliziere (1) mit $(a+c)$, so ist:

$$(6)\ (a+c)x+(a+c)y+(a+c)z=(a+b+c)(a+c).$$

Subtrahiere (3) von (6), so hat man:

$$(7)\ (c-b)x+(a-b)y=(a+b+c)(a+c)-2(ab+bc+ac).$$

Dividiere (5) durch $[(a-b)+(a-c)]$ und (7) durch $(a-b)$, so ist:

$$(8)\ \frac{(a-b)+(c-b)}{(a-b)+(a-c)}x+y=\frac{(a+b+c)(a-b)}{(a-b)+(a-c)} \text{ und}$$

$$(9)\ \frac{c-b}{a-b}x+y=\frac{(a+b+c)(a+c)-2(ab+bc+ac)}{a-b}.$$

Subtrahiere (9) von (8), so wird:

$$\frac{(a-b)+(c-b)}{(a-b)+(a-c)}x-\frac{c-b}{a-b}x=\frac{(a+b+c)(a-b)}{(a-b)+(a-c)}-\frac{(a+b+c)(a+c)-2(ab+bc+ac)}{a-b}.$$

Entwickele diese Gl. und es ist:

$$\{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)\}x=\{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)\}(b+c-a).$$

Dividiere diese Gl. durch den Koeffizienten von x, so wird: $x=b+c-a$; daher nach (9): $y=a-b+c$. Durch Substituierung der Werte von x und y in (1) erhält man:

$$z=a+b+c-(a-b+c)-(b+c-a)=a+b-c.$$

85. Multipliziere (2) mit 2, so ist: (4) $7x-9\frac{1}{2}y+11z=64$.

Subtrahiere (4) von (3), so ist: $3\frac{1}{2}x=7$; also $x=2$.

Multipliziere (1) mit $4\frac{3}{4}$ und nimm zwischen dem Resultate und (2) die Differenz, so ist: $-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}z=3\frac{1}{2}$, oder da $x=2$ ist: $\frac{3}{4}z=6$; also $z=8$ und hieraus $y=4$.

86. Addiert man (2) und (3), so erhält man (4): $11x+5y-4z=0{,}9$. (1) und (4) addiert, giebt $14x=1{,}4$, folglich $x=0{,}1$. Substituiert man diesen Wert für x in (1)

und (3), so ist (5) $4z-5y=0{,}2$ und (6) $3y-z=0{,}3$. Multipliziert man (6) mit 4 und addiert dazu (5), so erhält man $7y=1{,}4$, folglich $y=0{,}2$ und hieraus $z=0{,}3$.

87. α) Nach Methode E. Man multipliziere die erste der drei gegebenen Gl. mit dem unbestimmten Faktor β, die zweite mit γ und verbinde die Resultate durch Addition, so erhält man:

$$(4)\quad (a_1\beta+a_2\gamma+a_3)x+(b_1\beta+b_2\gamma+b_3)y+(c_1\beta+c_2\gamma+c_3)z= m_1\beta+m_2\gamma+m_3.$$

In dieser Gl. sind die Koeffizienten aller drei Unbekannten Funktionen der zwei unbestimmt gelassenen Größen β und γ. Wir können daher stets β und γ so wählen, daß zwei dieser Koeffizienten zu Null werden, so daß wir eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten erhalten. Zur Bestimmung von x setzen wir

$$\left.\begin{aligned} b_1\beta+b_2\gamma+b_3&=0 \\ c_1\beta+c_2\gamma+c_3&=0 \end{aligned}\right\}\ (5),$$

wodurch die Gl. (4) übergeht in

$$(a_1\beta+a_2\gamma+a_3)x=m_1\beta+m_2\gamma+m_3, \text{ woraus}$$

$$x=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3}{a_1\beta+a_2\gamma+a_3}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (5) ergiebt sich:

$$\beta=\frac{b_2c_3-b_3c_2}{b_1c_2-b_2c_1} \text{ und}$$

$$\gamma=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_1c_2-b_2c_1}, \text{ daher}$$

$$x=\frac{m_1\left(\frac{b_2c_3-b_3c_2}{b_1c_2-b_2c_1}\right)+m_2\left(\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_1c_2-b_2c_1}\right)+m_3}{a_1\left(\frac{b_2c_3-b_3c_2}{b_1c_2-b_2c_1}\right)+a_2\left(\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_1c_2-b_2c_1}\right)+a_3} \text{ oder}$$

$$x=\frac{m_1(b_2c_3-b_3c_2)+m_2(b_3c_1-b_1c_3)+m_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

Zur Bestimmung von y müssen wir β und γ so wählen, daß die Koeffizienten von x und z zu Null werden, also

$$\left.\begin{aligned} a_1\beta+a_2\gamma+a_3&=0 \\ c_1\beta+c_2\gamma+c_3&=0 \end{aligned}\right\}\ (6).$$

Dadurch geht die Gleichung (4) über in:

$$(b_1\beta+b_2\gamma+b_3)y=m_1\beta+m_2\gamma+m_3 \text{ oder}$$

$$y=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3}{b_1\beta+b_2\gamma+b_3}.$$

Zur Bestimmung von z endlich müssen wir β und γ so wählen, daß

$$\left.\begin{aligned} a_1\beta+a_2\gamma+a_3&=0 \\ b_1\beta+b_2\gamma+b_3&=0 \end{aligned}\right\}\ (7),$$

wodurch die Gl. (4) übergeht in:

$$c_1\beta+c_2\gamma+c_3)z=m_1\beta+m_2\gamma+m_3 \text{ oder}$$

$$z=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3}{c_1\beta+c_2\gamma+c_3}.$$

Aus den Gleichungen (6) folgt

$$\beta=\frac{c_2a_3-c_3a_2}{c_1a_2-c_2a_1} \text{ und}$$

$$\gamma=\frac{c_3a_1-c_1a_3}{c_1a_2-c_2a_1}.$$

Somit

$$y=\frac{m_1\left(\frac{c_2a_3-c_3a_2}{c_1a_2-c_2a_1}\right)+m_2\left(\frac{c_3a_1-c_1a_3}{c_1a_2-c_2a_1}\right)+m_3}{b_1\left(\frac{c_2a_3-c_3a_2}{c_1a_2-c_2a_1}\right)+b_2\left(\frac{c_3a_1-c_1a_3}{c_1a_2-c_2a_1}\right)+b_3} \text{ oder}$$

$$y=\frac{m_1(c_2a_3-c_3a_2)+m_2(c_3a_1-c_1a_3)+m_3(c_1a_2-c_2a_1)}{b_1(c_2a_3-c_3a_2)+b_2(c_3a_1-c_1a_3)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)}.$$

Aus den Gleichungen (7) ergiebt sich:

$$\beta=\frac{a_2b_3-a_3b_2}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ und } \gamma=\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Setzen wir diese Werte ein in den Wert für z, so ist

$$z=\frac{m_1(a_2b_3-a_3b_2)+m_2(a_3b_1-a_1b_3)+m_3(a_1b_2-a_2b_1)}{c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)}.$$

β) Vergleicht man diese Aufgabe mit derjenigen unter α) so findet man, daß hier die reciproken Werte der Unbekannten vorkommen, weil $\frac{a}{x}=a\cdot\frac{1}{x}$ u. s. w. ist. Es werden sich daher auch die Werte für x, y und z in dieser Aufgabe sofort ergeben, wenn man die reciproken Werte der unter α) für die Unbekannten gefundenen Werte nimmt. Sonach ist

$$x=\frac{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}{m_1(b_2c_3-b_3c_2)+m_2(b_3c_1-b_1c_3)+m_3(b_1c_2-b_2c_1)} \text{ u. s. w.}$$

88. Durch Entwickelung erhält man:

(4) $63x+45y+35z=81270$;
(5) $45x+35y+63z=95760$;
(6) $35x+63y+45z=93240$.

Multipliziert man (4) mit 63 und (5) mit 35, so ist:

(7) $3969x+2835y+2205z=5120010$;
(8) $1575x+1225y+2205z=3351600$.

Subtrahiert man (8) von (7), so ist

(9) $2394x+1610y=1768410$.

Multipliziert man (5) mit 45 und (6) mit 63, so hat man;

(10) $2025x+1575y+2835z=4309200$;
(11) $2205x+3969y+2835z=5874120$.

Subtrahiert man (10) von (11) und dividiert die sich ergebende Gl. durch 18, so ist (12) $10x+133y=86940$, woraus

$$x=\frac{86940-133y}{10}.$$

Substituiert man diesen Wert für x in (9), so wird

$$\frac{2394(86940-133y)}{10}+1610y=1768410, \text{ woraus } y=630.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in (12) erhält man

$$x=315 \text{ und hieraus } z=945.$$

89. Addiere (1) und (3) so erhält man:

$$(3)\ \frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=2a \text{ oder } \frac{x}{a^2-b^2}=1; \text{ also } x=a^2-b^2.$$

Setze den Wert für x in (1) und (2), so ist:

$$(4)\ \frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c+a}=2c,$$

$$(5)\ \frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c-a}=2a.$$

Ordne diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}(6)\ \frac{y}{b-c}+\frac{z}{c+a}&=2c-a+b.\\(7)\ -\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c-a}&=a-b.\end{aligned}\right\}\text{ addiert, giebt:}$$

$$\frac{z}{c+a}+\frac{z}{c-a}=2c; \text{ also } \frac{z}{c^2-a^2}=1; \text{ folglich } z=c^2-a^2.$$

Setze den Wert für z in (6) so ist:

$$\frac{y}{b-c}+\frac{c^2-a^2}{c+a}=2c-a+b; \text{ also}$$

$$\frac{y}{b-c}=b+c; \text{ folglich } y=b^2-c^2.$$

90. Entwickelt man die hier gegebene Proportion, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(1)\ 12x-5y=0;\ (2)\ 13y-12z=0;$$

(3) $5x+12y-12z=13$. Subtrahiere (2) von (3), so wird:

$$(4)\ 5x-y=13.$$

Setze in (4) den Wert für y aus (1), so hat man:

$5x-\frac{12}{5}x=13$; also $13x=13\times5$; $x=5$; $y=12$, $z=13$.

Man vergleiche auch §. 241 Beisp. 36 bis 41.

91. Aus der fortlaufenden Proportion erhält man die Gleichungen:

(1) $8x-5y-28z=0$; (2) $-40x+27y-12z=0$;

(3) $x+y-z=126$. Multipliziere (1) mit 5, so ist:

(4) $40x-25y-140z=0$; hierzu (2) addiert giebt:

$$(5)\ 2y-152z=0, \text{ oder } y-76z=0.$$

Multipliziert man (3) mit 40, so ist:

(6) $40x+40y-40z=5040$. Hierzu (2) addiert, giebt:

$$(7)\ 67y-52z=5040.$$

Substituiert man den aus (5) sich ergebenden Wert für y, nämlich 76z, in Gleichung (7), so hat man:

$$67 \cdot 76z-52z=5040;$$

folglich $z=1$; also $y=76$ und hieraus $x=51$.

92. Entwickelt man aus den gegebenen Proportionen die Gleichungen, so erhält man:

$$(4)\ 105y+98x=105;\ (5)\ 9z-4x=105;$$

$$(6)\ 2z-7y=-3.$$

Setze aus (6) den Wert für z in (5), so ist:

$$(7)\ \frac{9(7y-3)}{2}-4x=18.$$

Setze in (7) den Wert für x aus (4), so ist:

$$\frac{9(7y-3)}{2}-\frac{4(105-105y)}{98}=18;\ \text{daher}\ y=1;$$

also $z=\frac{1}{2}(7-3)=2$, und hieraus $x=0$.

93. Schafft man aus den gegebenen Gleichungen die Brüche fort und ordnet die Gleichungen, so ist:

$$(1)\ 723x-1107y+482z=-45;$$

$$(2)\ 2093x+3800y+1320z=13653;$$

$$(3)\ 1990x-3263y\ +992z=-1560.$$

Multipliziere (1) mit 3800 und (2) mit 1107 und addiere diese Gl., so ist:

$$(4)\ 5064351x+3292840z=14942871.$$

Multipliziere jetzt (2) mit 3263 und (3) mit 3800, und addiere sie alsdann, so ist:

$$(5)\ 14391459x+8076760z=38621739.$$

Stellt man die aus den beiden Gleichungen (4) und (5) sich ergebenden Werte für z einander gleich, so hat man:

$$\frac{14942871-5064351x}{3292840}=\frac{38621739-14391459x}{8076760}.$$

Daher $x=1$, also $z=3$ und hieraus $y=2$.

94. α) Aus (1) ergiebt sich $x=\frac{(c-a)y+2bc}{c+a}$.

Setzt man diesen Wert für (x) in (2), so ist:

$$(4)\ (b+c)z-(b-c)\frac{(c-a)y+2bc}{c+a}=2ab.$$

Substituiert man aus (3) den Wert für $z=\frac{(a+b)y-2ac}{a-b}$ in (4), so hat man:

$$(b+c)\frac{(a+b)y-2ac}{a-b}-(b-c)\frac{(c-a)y+2bc}{c+a}=2ab,$$

oder: $(b+c)(a+b)(c+a)y-(b+c)(c+a)2ac-$

$$(a-b)(b-c)(c-a)y-2bc(b-c)(a-b)=$$
$$2ab(a-b)(c+a);\ \text{oder:}$$
$$[(b+c)(a+b)(c+a)-(a-b)(b-c)(c-a)]y=$$
$$2[ac(b+c)(c+a)+bc(b-c)(a-b)+ab(a-b)(c+a)];$$
$$\text{oder:}\ (a^2b+abc+b^2c+ac^2)y=$$
$$a^3b+2a^2bc+a^2c^2+b^2c^2+ac^3-a^2b^2-b^3c=$$
$$(a+c-b)(a^2b+abc+b^2c+ac^2);\ \text{folglich}\ y=a+c-b.$$

Den Wert für y in (1) substituiert, giebt:

$$(c+a)x=2bc+(c-a)(a+c-b);\ \text{oder:}$$
$$(c+a)x=((c+a)(b+c-a);\ \text{folglich}\ x=b+c-a.$$

Diesen Wert für x in (2) substituiert, giebt:

$$(b+c)z=(b-c)(b+c-a)+2ab;\ \text{oder:}$$
$$(b+c)z=(b+c)(a+b-c);\ \text{folglich}\ z=a+b-c.$$

β) Multipliziere (2) mit $a+c$ und (3) mit $a+b$ und addiere diese Gl., so wird:

$$(4)\quad \frac{a-b}{b-c}x+\frac{c+a}{c-a}y=(a+c)^2+(a-b)(b-c).$$

Jetzt multipliziere (1) mit $\frac{c+a}{c-a}$ und dividiere (4) durch $(b+c)$ und subtrahiere diese beiden Gl., so ist:

$$\left(\frac{a-b}{(b-c)(b+c)}-\frac{c+a}{(c-a)(a+b)}\right)x=$$
$$\frac{(a+c)^2+(b-c)(a-b)}{b+c}-\frac{(b-a)(c+a)}{c-a}\ \text{oder:}$$
$$\frac{(a-b)(a+b)(c-a)-(c+a)(b-c))b+c)}{(b-c)(b+c)(a+b)(c-a)}x=$$
$$\frac{[(a+c)^2+(b-c)(a-b)](c-a)-(b-a)(c+a)(b+c)}{(b+c)(c-a)}$$
$$\text{oder:}\ [(a-b)(a+b)(c-a)-(c+a)(b-c)(b+c)]x=$$
$$([(a+c)^2+(a-b)(b-c)](c-a)-(b-a)(c+a)(b+c))$$
$$\times(b-c)(a+b)$$
$$\text{oder:}\ (2ac^2+c^3-a^3-2b^2c)x=(2ac^2+c^3-a^3-2b^2c)$$
$$\times(a+b)(b-c);\ \text{folglich}$$

$x=(a+b)(b-c)$. Diesen Wert für x setze in (1), so ist:

$$\frac{y}{b+c}=c-a;\ \text{also}\ y=(b+c)(c-a)\ \text{und daher}$$
$$z=(a-b)(c+a).$$

95. α) Multipliziere die erste Gleichung mit $(c-a)$ und die zweite mit $(c+a)$ und nimm die Differenz zwischen diesen beiden Gl., so ist:

$$(4)\quad \frac{c-a}{b+c}x-\frac{c+a}{a-b}z=(a+b)(c-a)-(b+c)(c+a);$$

Multipliziere (4) mit $\frac{a-b}{c+a}$ und die dritte gegebene Gleichung mit $(a+b)$, addiere diese beiden Gl., so wird:

$$\frac{(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)}x+\frac{a+b}{b-c}x=$$
$$\frac{((a+b)(c-a)-(b+c)(c+a))(a-b)+(c+a)^2(a+b)}{c+a};$$
$$((c-a)(a-b)(b-c)+(a+b)(b+c)(c+a))x=$$
$$[((a+b)(c-a)-(b+c)(c+a))(a-b)+(c+a)^2(a+b)]$$
$$\times(b+c)(b-c);\text{ oder: } 2x(ab^2+a^2c+abc+bc^2)=$$
$$2(ab^2+a^2c+abc+bc^2)(b+c)(b-c);$$
folglich $x=(b+c)(b-c)=b^2-c^2$.

Durch Substituierung dieses für x gefundenen Wertes in die erste gegebene Gleichung erhält man:

$$\frac{(b+c)(b-c)}{b+c}+\frac{y}{c-a}=a+b \text{ oder:}$$
$$\frac{y}{c-a}=c+a;\text{ daher } y=(c+a)(c-a)=c^2-a^2.$$

Setzt man diesen Wert für y in die zweite gegebene Gleichung, so hat man:

$$\frac{(c+a)(c-a)}{c+a}+\frac{z}{a-b}=b+c \text{ oder}$$
$$\frac{z}{a-b}=a+b;\text{ folglich } z=(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

β) Aus den drei hier gegebenen Gleichungen erhält man durch Entwickelung folgende zwei:

$$(a-x)(b-y)=(a'-x)(b'-y) \text{ oder:}$$
$$(4)\ (b'-b)x+(a'-a)y=a'b'-ab;$$
$$(a'-x)(b'-y)=(a''-x)(b''-y) \text{ oder:}$$
$$(5)\ (b''-b')x+(a''-a')y=a''b''-a'b';$$

(4) mit $a''-a'$ und (5) mit $a'-a$ multipliziert und von einander subtrahiert, giebt:

$$[(a''-a')(b'-b)-(a'-a)(b''-b')]x=$$
$$(a'b'-ab)(a''-a')-(a''b''-a'b')(a'-a) \text{ oder}$$
$$[b(a'-a'')+b'(a''-a)+b''(a-a')]x=ab(a'-a'')$$
$$+a'b'(a''-a)+a''b''(b-a');\text{ folglich}$$
$$x=\frac{ab(a'-a'')+a'b'(a''-a)+a''b''(a-a')}{b(a'-a'')+b'(a''-a)+b''(a-a')}.$$

Ebenso findet man y und daraus auch z.

γ) Durch Entwickelung erhält man aus den 3 gegebenen Gl. folgende zwei:

$$(1)\ 40x-y=36;\ (2)\ 10x-y=6.$$

Hieraus folgt $x=1$, $y=4$. Diese Werte für x und y in die erste der gegebenen Gl. eingesetzt, giebt $z=3\,.\,240=720$.

96. Multipliziert man die Gleichung (1) mit c, die Gleichung (2) mit b und die Gleichung (3) mit a, so ist

$$(4)\quad bx+ay=\frac{c(a-b)}{(b-c)(a-c)};$$

$$(5)\quad cx+az=\frac{b(a-c)}{(b-c)(a-b)};$$

$$(6)\quad cy+bz=\frac{a(b-c)}{(a-c)(a-b)}.$$

Multiplizierc (5) mit b und (6) mit a, und nimm die Differenz zwischen diesen Gl., so wird:

$$(7)\ bcx-acy=$$

$$\frac{b^2(a-c)}{(b-c)(a-b)}-\frac{a^2(b-c)}{(a-c)(a-b)}=\frac{c(b^2c-2ab^2+2a^2b-a^2c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Multipliziert man die vierte Gleichung mit c, und addiert dieselbe zu (7) so hat man:

$$2bcx=\frac{c^2(a-b)}{(b-c)(a-c)}+\frac{c(b^2c-2ab^2+2a^2b-a^2c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{c^2(a-b)^2+c(b^2c-2ab^2+2a^2b-a^2c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2bc(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)};$$

folglich $x=\frac{2bc(a-b)(a-c)}{2bc(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{1}{b-c}$.

Den Wert für x in (4) substituiert, giebt:

$$ay=\frac{c(a-b)}{(b-c)(a-c)}-\frac{b}{b-c}=\frac{a(c-b)}{(b-c)(a-c)};$$

folglich $y=\frac{a(c-b)}{a(b-c)(a-c)}=\frac{1}{c-a}$.

und hieraus $z=\frac{1}{a-b}$.

97. Subtrahiert man (2) von (1), so bleibt:

(4) $\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=m-n$. Hierzu (3) addiert, giebt:

$\frac{2}{x}=m+p-n$; folglich $x=\frac{2}{m+p-n}$.

Subtrahiert man (4) von (3), so ist:

$\frac{2}{z}=n+p-m$; folglich $z=\frac{2}{n+p-m}$.

Subtrahiert man (3) von (1), so bleibt:

(5) $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=m-p$. Hierzu (2) addiert, liefert:

$\frac{2}{y}=m+n-p$; folglich $y=\frac{2}{m+n-p}$.

98. Die drei gegebenen Gleichungen können, als aus eben so vielen geometrischen Proportionen entstanden, betrachtet werden. Dividiert man z. B. in der Gleichung (1) den ersten Teil, nämlich m, durch 1 (wodurch an dem Werte der gege-

benen Größen nichts geändert wird), so erhält man statt der gegebenen Gleichung folgende:

$$\frac{m}{1}=\frac{xy}{ay+bx},$$

in welcher zwei gleiche Quotienten in der Form einer angezeigten Division erscheinen, die auch immer zwei gleiche Verhältnisse bilden, woraus sich nach §. 225 folgende Proportion entwickeln läßt, nämlich: $m:1=xy:(ay+bx)$ und durch Versetzung der Glieder:

$1:m=(ay+bx):xy$, woraus man erhält:

$$\frac{1}{m}=\frac{ay+bx}{xy}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}.$$

Verfährt man bei der zweiten und dritten Gl. auf dieselbe Weise, so erhält man also statt der gegebenen Gl.:

$$(4)\ \frac{1}{m}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y};\ (5)\ \frac{1}{n}=\frac{c}{y}+\frac{d}{z};\ (6)\ \frac{1}{p}=\frac{e}{x}+\frac{f}{z}.$$

Multipliziere (4) mit e und (6) mit a, und nimm die Differenz zwischen diesen beiden Gl. so ist:

$$(7)\ \frac{af}{z}-\frac{be}{y}=\frac{am-ep}{mp}.$$

Multipliziere (7) mit d und (5) mit af, und nimm die Differenz zwischen diesen beiden Gl., so wird:

$$\frac{acf+bde}{y}=\frac{afmp-admn+denp}{mnp};$$

oder $\frac{1}{y}=\frac{afmp-admn+denp}{mnp(acf+bde)}$; folglich $y=\frac{mnp(acf+bde)}{afmp-admn+denp}$.

Diesen Wert für y in (4) gesetzt, giebt:

$\frac{1}{x}=\frac{cfnp-bfmp+bdmn}{mnp(acf+bde)}$; folglich $x=\frac{mnp(acf+bde)}{cfnp+bdmn-bfmp}$.

Auf ähnliche Weise findet man durch Substitution der für x und y gefundenen Werte in (5) oder (6), daß

$$z=\frac{mnp(acf+bde)}{bemp+acmn-cenp}.$$

99. Addiert man die erste und zweite, dann die erste und dritte, sowie die zweite und die dritte der hier gegebenen Gleichungen, so erhält man unmittelbar:

$\frac{2}{x}=a+b$; folglich $x=\frac{2}{a+b}$;

$\frac{2}{y}=a+c$; " $y=\frac{2}{a+c}$;

$\frac{2}{z}=b+c$; " $z=\frac{2}{b+c}$.

100. α) Addiere (2) und (3), so ist (4): $\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=2b$.

Multipliziere (3) mit (c—a), und addiere diese Gl. zu (1), so ist:

(5) $\frac{c(c-b)}{z}+\frac{a(b-a)}{x}=3b(c-a)-(c^2-a^2)$.

(4) mit (c—b) multipliziert, giebt:

(6) $\frac{c(c-b)}{z}+\frac{a(c-b)}{x}=2b(c-b)$.

Subtrahiert man (5) von (6), so erhält man:

$\frac{a(a-2b+c)}{x}=2b(c-b)-3b(c-a)+c^2-a^2$;

oder $\frac{a(a-2b+c)}{x}=(a-2b+c)(b+c-a)$; diese Gleichung durch $a(a-2b+c)$ dividiert giebt: $\frac{1}{x}=\frac{b+c-a}{a}$; $x=\frac{a}{b+c-a}$.

Diesen Wert für x in (4) gesetzt giebt:

$\frac{c}{z}=2b-(b+c-a)$; folglich $z=\frac{c}{a+b-c}$.

Substituiert man die beiden Werte für x und z in (2), so ist: $\frac{b}{y}=a-b+c$; folglich $y=\frac{b}{a-b+c}$.

β) Multipliziere Gl. (1) mit c, und subtrahiere sie von (2), so ist:

(4) $(a-c)x+(b-c)y=a^3+b^3+c^3+6abc-c(a+b+c)^2$.

(1) mit b multipliziert, und von (3) subtrahiert, giebt:

(5) $(c-b)x+(a-b)y=3(a^2c+ab^2+bc^2)-b(a+b+c)^2$.

(4) mit (a—b) und (5) mit (b—c) multipliziert und subtrahiert, giebt:

$[(a-c)(a-b)-(c-b)(b-c)]x=(a-b)[a^3+b^3+c^3+6abc$
$-c(a+b+c)^2)-(b-c)[3(a^2c+ab^2+bc^2)-b(a+b+c)^2]$,

oder: $[a(a-b)+b(b-c)-c(a-c)]x=[a(a-b)$
$+b(b-c)-c(a-c)](a^2+2bc)$,

also $x=a^2+2bc$; daher $y=b^2+2ac$ und $z=c^2+2ab$.

101. α) Addiere die 3 Gl., so ist: (4) $\frac{1}{x}+\frac{7}{z}=7{,}4$.

Multipliziere (1) mit 2, und subtrahiere hiervon (2), so bleibt: (5) $\frac{1}{x}+\frac{15}{z}=16{,}2$.

Zieht man (4) von (5) ab, so hat man:

$\frac{8}{z}=8{,}8$; folglich $z=\frac{8}{8{,}8}=\frac{80}{88}=\frac{10}{11}$.

Diesen Wert für z in (4) gesetzt, giebt:

$\frac{1}{x}=0{,}3$; $x=\frac{1}{0{,}3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$; also $y=1\frac{3}{7}$.

β) Addiere (2) und (3), so ist: (4) $\frac{17}{15x}+\frac{6}{z}=26\frac{4}{15}$.

(1) mit $\frac{1}{2}$ und (2) mit $\frac{4}{5}$ multipliziert und addiert, giebt: (5) $\frac{53}{30x}+\frac{21}{10z}=11\frac{14}{15}$. Multipliziere (4) mit $\frac{21}{10}$ und (5) mit 6, und subtrahiere diese beiden Gl., so wird:

$\frac{1233}{150x}=16\frac{22}{50}$ oder $\frac{411}{x}=822$; daher $x=\frac{1}{2}$; folglich $z=\frac{1}{4}$ und $y=\frac{1}{3}$.

102. Addiert man (2) und (3), so hat man:

$4yz-2xy=0$, oder (4) $2z-x=0$;

(1) mit (2) multipliziert, giebt:

(5) $2yz+2xz+2xy=18xyz$.

Subtrahiert man (2) von (5), so bleibt:

$yz+5xy=22xyz$ oder (6) $z+5x=22xz$.

Aus (4) substituiere man den Wert für x in (6), so ist: $z+10z=44z^2$; folglich $z=\frac{1}{4}$; also $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$.

103. Statt aus den bekannten Größen a, b und c die unbekannten x, y, z zu entwickeln, suche man umgekehrt die Größen a, b, c durch x, y, z auszudrücken und benutze die sich ergebenden Gleichungen zur Bestimmung von x, y, z. Vergleichen wir nun dieses Beispiel mit dem Beispiel 94α, so ergiebt sich sowohl dasselbe Beispiel, sowie wir auch die dort gefundenen Antworten erhalten, wenn wir die Buchstaben x, y, z mit a, b, c und umgekehrt vertauschen; demnach ist:

(1) $-x+y+z=a$; (2) $x-y+z=b$; (3) $x+y-z=c$.

Durch Addition von (1) und (2), dann von (2) und (3), endlich von (1) und (3) ergiebt sich: $z=\frac{1}{2}(a+b)$; $x=\frac{1}{2}(b+c)$; $y=\frac{1}{2}(a+c)$.

104. α) Verfährt man bei der Auflösung dieser Gleichungen, wie bei der vorigen Aufgabe, so ist, wenn man (1) und (3) addiert:

$2ax=2x(z+y)$; daher $x_1=0$ und $a=z+y$;

wenn man (1) und (2) addiert:

$2by=2y(x+z)$; daher $y_1=0$ und $b=x+z$;

und wenn man endlich (2) und (3) addiert:

$2cz=2z(x+y)$; daher $z_1=0$ und $c=x+y$.

Es ist daher:

(1) $y+z=a$; (2) $x+z=b$; (3) $x+y=c$.

Addiert man diese 3 Gleichungen, so hat man:

(4) $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Subtrahiert man von (4) der Reihe nach die Gleichungen (1), (2) und (3), so erhält: $x_2=\frac{1}{2}(b+c-a)$;

$$y_2=\frac{1}{2}(a+c-b) \text{ und } z_2=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

β) Durch Addition von (1) und (2), von (1) und (3) und von (2) und (3) erhält man:

$$2\sqrt{xy}=2ab \text{ oder } (4)\ \sqrt{xy}=ab$$
$$2\sqrt{yz}=2bc \text{ oder } (5)\ \sqrt{yz}=bc$$
$$2\sqrt{xz}=2ac \text{ oder } (6)\ \sqrt{xz}=ac.$$

Multipliziere (4), (5) und (6) miteinander, so wird

$$\sqrt{x^2y^2z^2}=a^2b^2c^2 \text{ oder } (7)\ xyz=a^2b^2c^2.$$

Erhebe (4), (5) und (6) ins Quadrat und dividiere (7) durch jede dieser quadrierten Gleichungen, so ist

$$x=a^2,\ y=b^2,\ z=c^2.$$

105. Multipliziere (3) mit $(c-a)$ und subtrahiere sie von (1), so ist:

(4) $2a-b-c)x+(a+b-2c)y=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

Jetzt multipliziere (3) mit $(b-c)$ und subtrahiere diese Gleichung von (2), so ist:

(5) $(2c-a-b)x+(a-2b+c)y=ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2$.

Multipliziere (4) mit $a-2b+c$ und (5) mit $a+b-2c$ und nimm die Differenz zwischen diesen Gleichungen, so ist:

$$[(2a-b-c)(a-2b+c)-(2c-a-b)(a+b-2c)]x=$$
$$2(a-2b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)-$$
$$(a+b-2c)(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2) \text{ oder}$$
$$3(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)x=3(a^2+b^2+c^2-ab-$$
$$ac-bc)(a-b),$$

folglich $x=a-b$. Setze diesen Wert für x in (4), so ist:

$$(a+b-2c)y=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)-(2a-b-c)\times$$
$$(a-b)=(a+b-2c)(b-c); \text{ folglich } y=b-c.$$

Setze die Werte für x und y in (3), so wird $z=c-a$.

106. α) Setzt man $113-x=x'$, $y-219=y'$ und $337-z=z'$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(4)\ 115x'+719y'-590z'=27;$$

$$\frac{5x'+2}{2y'}=2 \text{ oder } (5)\ 5x'-4y'=-2; \text{ also } x'=\frac{4y'-2}{5};$$

$$\frac{z'}{y'+2}=4 \text{ oder } (6)\ z'-4y'=8; \text{ also } z'=4y'+8;$$

Substituiert man die beiden Werte für x' und z' in (4), so ist: $\frac{115(4y'-2)}{5}+719y'-590(4y'+8)=27$;

hieraus folgt $y'=3$; also $x'=2$ und $z'=4$.

Es ist also: $113-x=2$; folglich $x=111$;

$$y-219=3; \quad " \quad y=222;$$
$$337-z=4; \quad " \quad z=333.$$

β) Multipliziere die dritte gegebene Gl. mit $1\frac{1}{2}$ und addiere sie dann zu der ersten gegebenen Gl., so erhalten wir:

$$(4)\ \frac{333}{5y+9z}-\frac{7{,}5}{3x+4z}=8{,}5.$$

Addiere (4) zu der durch 4 dividierten zweiten Gl., so ist:

$$(5)\ \frac{342{,}25}{5y+9z}=9{,}25;\ \text{oder: } (6)\ 5y+9z=37.$$

Setzen wir den in (6) gefundenen Wert für $5y+9z$ in die zweite gegebene Gleichung, so erhalten wir:

$$\frac{30}{3x+4z}=3-1=2;\ \text{oder: } (7)\ 3x+4z=15.$$

Setzen wir den Wert für $3x+4z$ in die erste gegebene Gl., so wird: $\frac{12}{2x+3y}-\frac{7{,}5}{15}=1$; oder: (8) $2x+3y=8$.

Multipliziere (8) mit 5 und (6) mit 3 und nimm dann die Differenz zwischen diesen beiden Gl., so wird:

$$(9)\ 27z-10x=71.$$

Setzen wir in (9) den Wert für z aus (7), so haben wir:

$27\cdot\frac{15-3x}{4}-10x=71$; hieraus folgt $x=1$; daher:

$$y=\frac{8-2}{3}=2 \text{ und } z=\frac{71+10}{27}=3.$$

γ) Setze $x-y=u$; $y-z=v$; $z-x=w$, so entstehen aus den gegebenen Gl. folgende

$$(1)\ \frac{7}{u}+\frac{v}{9}=-7\tfrac{1}{9}.$$

$$(2)\ \frac{v}{11}+\frac{13}{w}=6\tfrac{9}{22}$$

$$(3)\ \frac{15}{w}+\frac{17}{u}=-9\tfrac{1}{2}$$

Multipliziere (1) mit 17 und (3) mit 7, so wird:

$$(4)\ \frac{119}{u}+\frac{17v}{9}=-120\tfrac{8}{9}$$

$$(5)\ \frac{105}{w}+\frac{119}{u}=-66\tfrac{1}{2}$$

(4) von (5) subtrahiert, giebt:

$$(6)\ \frac{105}{w}-\frac{17v}{9}=54\tfrac{7}{18}$$

(2) mit 105 und (6) mit 13 multipliziert, giebt:

$$(7)\ \frac{105v}{11}+\frac{105\,.\,13}{w}=672\tfrac{21}{22}$$

$$(8)\ \frac{13\,.\,105}{w}-\frac{221v}{9}=707\tfrac{1}{18}.$$

Wird (8) von (7) subtrahiert, so hat man:

$$\frac{105v}{11}+\frac{221v}{9}=-34\tfrac{10}{99} \text{ oder}$$

$3376v=-3376$: also $v=-1$; daher $u=-1$ und $w=2$. Es ist also:

α) $x-y=-1$; β) $y-z=-1$; γ) $z-x=2$.

Aus den Gl. α), β) und γ) ergiebt sich, daß die erste Zahl x um 1 kleiner ist, als y, die zweite Zahl y um 1 kleiner als die dritte Zahl z und die erste Zahl x um 2 kleiner ist, als z; folglich bezeichnen x, y, z jede drei unmittelbar aufeinander folgende Zahlen, welche den gegebenen Gleichungen genügen: also 1, 2, 3 oder 2, 3, 4 oder 3, 4, 5 u. s. w.

107. Man multipliziere die erste Gl. mit β, die zweite mit γ und die dritte mit δ; alsdann addiere man die Summe dieser drei Gleichungen zu der vierten, so hat man:

(5) $(a_1\beta+a_2\gamma+a_3\delta+a_4)x+(b_1\beta+b_2\gamma+b_3\delta+b_4)y+$
$(c_1\beta+c_2\gamma+c_3\delta+c_4)z+(d_1\beta+d_2\gamma+d_3\delta+d_4)u=$
$m_1\beta+m_2\gamma+m_3\delta+m_4$.

Setzt man die Koeffizienten von y, z, u gleich Null, also:

(6) $b_1\beta+b_2\gamma+b_3\delta+b_4=0$;

(7) $c_1\beta+c_2\gamma+c_3\delta+c_4=0$;

(8) $d_1\beta+d_2\gamma+d_3\delta+d_4=0$, so folgt aus (5), daß

$$(9)\quad x=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3\delta+m_4}{a_1\beta+a_2\gamma+a_3\delta+a_4}.$$

Zur Bestimmung von β, γ, δ hat man die Gl. (6), (7) und (8). Aus denselben folgt:

$$\beta=\frac{b_2(c_3d_4-c_4d_3)+b_3(c_4d_2-c_2d_4)+b_4(c_2d_3-c_3d_2)}{b_1(c_3d_2-c_2d_3)+b_2(c_1d_3-c_3d_1)+b_3(c_2d_1-c_1d_2)};$$

$$\gamma=\frac{b_1(c_4d_3-c_3d_4)+b_2(c_1d_4-c_4d_1)+b_4(c_3d_1-c_1d_3)}{b_1(c_3d_2-c_2d_3)+b_2(c_1d_3-c_3d_1)+b_3(c_2d_1-c_1d_2)};$$

$$\delta=\frac{b_1(c_2d_4-c_4d_2)+b_2(c_4d_1-c_1d_4)+b_4(c_1d_2-c_2d_1)}{b_1(c_3d_2-c_2d_3)+b_2(c_1d_3-c_3d_1)+b_3(c_2d_1-c_1d_2)}.$$

Setzt man die für β, γ, δ gefundenen Werte in (9), so erhält man den Wert für x. Zur Bestimmung von y setzen wir die Koeffizienten von x, z, u gleich Null, also

(10) $a_1\beta+a_2\gamma+a_3\delta+a_4=0$;

(11) $c_1\beta+c_2\gamma+c_3\delta+c_4=0$;

(12) $d_1\beta+d_2\gamma+d_3\delta+d_4=0$; wodurch aus Gl. (5) folgt

$$(13)\quad y=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3\delta+m_4}{b_1\beta+b_2\gamma+b_3\delta+b_4}.$$

Aus den Gl. (10), (11) und (12) bestimmen wir β, γ und δ. Es ist:

$$\beta=\frac{a_2(c_3d_4-c_4d_3)+a_3(c_4d_2-c_2d_4)+a_4(c_2d_3-c_3d_2)}{a_1(c_3d_2-c_2d_3)+a_2(c_1d_3-c_3d_1)+a_3(c_2d_1-c_1d_2)};$$
$$\gamma=\frac{a_1(c_4d_3-c_3d_4)+a_3(c_1d_4-c_4d_1)+a_4(c_3d_1+c_1d_3)}{a_1(c_3d_2-c_2d_3)+a_2(c_1d_3-c_3d_1)+a_3(c_2d_1-c_1d_2)};$$
$$\delta=\frac{a_1(c_2d_4-c_4d_2)+a_2(c_4d_1-c_1d_4)+a_4(c_1d_2-c_2d_1)}{a_1(c_3d_2-c_2d_3)+a_2(c_1d_3-c_3d_1)+a_3(c_2d_1-c_1d_2)}.$$

Setzt man diese Werte für β, γ, δ in (13) so erhält man den Wert für y.

Um z zu bestimmen, werden die Koeffizienten von x, y, u gleich Null gesetzt, also

(14) $a_1\beta+a_2\gamma+a_3\delta+a_4=0$;
(15) $b_1\beta+b_2\gamma+b_3\delta+b_4=0$;
(16) $d_1\beta+d_2\gamma+d_3\delta+d_4=0$. Dadurch folgt aus (5), daß

$$(17)\ z=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3\delta+m_4}{c_1\beta+c_2\gamma+c_3\delta+c_4}.$$

Zur Bestimmung von β, γ, δ dienen die Gl. (14), (15) und (16), aus welchen folgt:

$$\beta=\frac{a_2(b_3d_4-b_4d_3)+a_3(b_4d_2-b_2d_4)+a_4(b_2d_3-b_3d_2)}{a_1(b_3d_2-b_2d_3)+a_2(b_1d_3-b_3d_1)+a_3(b_2d_1-b_1d_2)};$$
$$\gamma=\frac{a_1(b_4d_3-b_3d_4)+a_3(b_1d_4-b_4d_1)+a_4(b_3d_1-b_1d_3)}{a_1(b_3d_2-b_2d_3)+a_2(b_1d_3-b_3d_1)+a_3(b_2d_1-b_1d_2)};$$
$$\delta=\frac{a_1(b_2d_4-b_4d_2)+a_2(b_4d_1-b_1d_4)+a_4(b_1d_2-b_2d_1)}{a_1(b_3d_2-b_2d_3)+a_2(b_1d_3-b_3d_1)+a_3(b_2d_1-b_1d_2)}.$$

Setzt man diese Werte für β, γ, δ in (17) so erhält man z.

Um endlich u zu bestimmen, setze man die Koeffizienten von x, y, z gleich Null, also

(18) $a_1\beta+a_2\gamma+a_3\delta+a_4=0$;
(19) $b_1\beta+b_2\gamma+b_3\delta+b_4=0$;
(20) $c_1\beta+c_2\gamma+c_3\delta+c_4=0$, so folgt aus (5), daß

$$(21)\ u=\frac{m_1\beta+m_2\gamma+m_3\delta+m_4}{d_1\beta+d_2\gamma+d_3\delta+d_4}.$$

Zur Bestimmung von β, γ, δ dienen die Gleichungen (18), (19), (20), aus denen folgt:

$$\beta=\frac{a_2(b_3c_4-b_4c_3)+a_3(b_4c_2-b_2c_4)+a_4(b_2c_3-b_3c_2)}{a_1(b_3c_2-b_2c_3)+a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_2c_1-b_1c_2)};$$
$$\gamma=\frac{a_1(b_4c_3-b_3c_4)+a_3(b_1c_4-b_4c_1)+a_4(b_3c_1-b_1c_3)}{a_1(b_3c_2-b_2c_3)+a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_2c_1-b_1c_2)};$$
$$\delta=\frac{a_1(b_2c_4-b_4c_2)+a_2(b_4c_1-b_1c_4)+a_4(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_3c_2-b_2c_3)+a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_2c_1-b_1c_2)}.$$

Setzt man diese Werte für β, γ, δ in (21), so erhält man schließlich den Wert für u.

108. Schafft man die Brüche aus den Gl. fort, so erhält man:

(5) $20x+33y=1260$; (6) $114x+145z=9510$;
(6) $328z+385u=41496$; (8) $710u+801x=75150$.

Setzt man jetzt aus (8) den Wert für u in (7), so ist:

$$(9)\ 328z+\frac{385(75150-801x)}{710}=41496.$$

Aus (6) den Wert für z in (9) eingesetzt, giebt:

$$\frac{328(9510-114x)}{145}+\frac{385(75150-801x)}{710}=41496.$$

Hieraus folgt $x=30$, also nach (5):

$$y=\frac{1260-20.30}{33}=20.$$

Nach (6) ist $z=\dfrac{9510-114.30}{145}=42$ und nach (8)

$$u=\frac{75150-801.30}{710}=72.$$

109. Addiert man alle vier Gleichungen, so wird:

$8y-8x=8$ oder (5) $y-x=1$.

Multipliziert man (1) mit 2 und (2) mit 2, so ist:
(6) $2x-4y+6z-8u=-20$;
(7) $-10x+12y-14z+16u=36$.

Durch Addition von (6) und (2), sowie von (7) und (4) erhält man:
(8) $-3x+2y-z=-2$; (9) $-23x+26y+z=31$.

(8) und (9) addiert, giebt: (10) $-13x+14y=15$. Substituiert man aus (5) den Wert für x in (10), so ist: $-13x+14(x+1)=15$; folglich $x=1$, also $y=2$. Die beiden Werte für x und y in (8) eingesetzt, giebt $z=3$; daher $u=4$.

110. Multipliziert man (1) mit 28 und (2) mit 17, so erhält man
(5) $3{,}36x-6{,}44y+9{,}52z=57{,}988$
(6) $7{,}65y-9{,}52z+11{,}39u=-136{,}748$ } addiert, giebt:
(7) $3{,}36x+1{,}21y+11{,}39u=-78{,}76$.

Multipliziert man (4) mit 121 und (7) mit 21, so ist:
(8) $78{,}65u-52{,}03x+25{,}41y=-590{,}601$
(9) $70{,}56x+25{,}41y+239{,}19u=-1653{,}96$ } subtrahiert,
giebt: (10) $122{,}59x+160{,}54u=-1063{,}359$.

(3) mit 17 und (1) mit 39 multipliziert, giebt:
(11) $13{,}26z-15{,}13u+14{,}79x=162{,}52$
(12) $4{,}68x-8{,}97y+13{,}26z=80{,}769$ } subtrahiert,
giebt: (13) $10{,}11x+8{,}97y-15{,}13u=81{,}751$.

(4) mit 299 und (13) mit 7 multipliziert, giebt:
(14) $194{,}35u-128{,}57x+62{,}79y=-1459{,}419$
(15) $70{,}77x+62{,}79y+105{,}91u=572{,}257$ } subtrahiert,
(16) $99{,}67x-150{,}13u=1015{,}838$. Aus dieser Gleichung

folgt $u=\frac{99,67x-1015,838}{150,13}$. Diesen Wert für u in (10) eingesetzt, giebt:

$$122,59x+160,54\left(\frac{99,67x-1015,838}{150,13}\right)=-1063,359,$$

woraus $x=0,1$ und daher $u=-6,7$.

Substituiert man die für x und u gefundenen Werte in (4), so erhält man $y=-2,3$. Die Werte für x und y in (1) eingesetzt, giebt $z=4,5$.

111. α) Multipliziere (1) mit 3 und (4) mit 9, so ist:

(5) $x+\frac{3}{5}y+\frac{3}{7}z+\frac{1}{3}u=8400$
(6) $x+\frac{9}{11}y+\frac{9}{13}z+\frac{3}{5}u=13248$ } subtrahiert, giebt:

(7) $\frac{3}{55}y+\frac{6}{91}z+\frac{1}{15}u=1212$.

Multipliziere (2) mit 5 und (3) mit 7, so wird

(8) $x+\frac{5}{7}y+\frac{5}{9}z+\frac{5}{11}u=10720$
(9) $x+\frac{7}{9}y+\frac{7}{11}z+\frac{7}{13}u=12208$ } subtrahiert, liefert

(10) $\frac{1}{63}y+\frac{2}{99}z+\frac{3}{143}u=372$.

Durch Subtraktion von (8) und (5) erhält man

(11) $\frac{1}{35}y+\frac{2}{63}z+\frac{1}{33}u=580$.

In (7), (10) und (11) haben wir 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Um nun hieraus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten zu entwickeln, multipliziere man (7) mit $\frac{55}{3}$ und (11) mit 35, so ist:

(12) $y+\frac{110}{91}z+\frac{11}{9}u=22220$
(13) $y+\frac{10}{9}z+\frac{35}{33}u+20300$ } subtrahiert, giebt:

(14) $\frac{5}{819}z+\frac{1}{99}u=120$. Multipliziere (10) mit 63, so ist:
(15) $y+\frac{14}{11}z+\frac{189}{143}u=23436$. Subtrahiere (12) von (15), so wird: (16) $\frac{1}{1001}z+\frac{2}{1287}u=19$.

In (14) und (16) haben wir endlich 2 Gleichungen mit nur noch 2 Unbekannten. Um aus denselben eine Unbekannte zu eliminieren, multipliziere (14) mit $\frac{819}{5}$ und (16) mit 1001, so wird: (17) $z+\frac{91}{55}u=19656$; (18) $z+\frac{182}{117}u=19019$.

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man:

$\frac{637}{6435}u=637$ oder $\frac{1}{6435}u=1$; also $u=6435$.

Setze den Wert für u in (16), so ist:

$\frac{1}{1001}z+10=19$: also $\frac{1}{1001}z=9$; folglich $z=9009$.

Setze die Werte für z und u in (7), so ist:

$\frac{3}{55}y+594+429=1212$; daher $\frac{1}{55}y=63$; folglich $y=3465$.

Die Werte für y, z und u in die erste gegebene Gleichung gesetzt, giebt:

$$\frac{x}{3}+693+1287+715=2800;\ \text{also}\ \tfrac{1}{3}x=105;\ x=315.$$

β) Addiere (2) und (4) der hier gegebenen Gleichungen, so ist:
(5) $x+2y+z=4a+2b$. Subtrahiere (1) von (5), so ist:
(6) $y=a+b-c$. Addiere (2) und (3), so ist:

(7) $2x+y-z=2a+4b$. Hierzu (1) addiert, giebt:
(8) $3x+2y=5a+5b+c$. Setze hierin den Wert für y aus (6), so hat man:

$$3x=5a+5b+c-2(a+b-c)=3(a+b+c);$$ also ist: $$x=a+b+c.$$ Nach (1) ist $$z=3a+b+c-(a+b+c)-(a+b-c)=a-b+c.$$

Nach (2) ist

$$t=a+3b+c-(a+b+c)-(a+b-c)=-a+b+c.$$

112. α) Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$5(x+y+z+t+u+v)=a+b+c+d+e+f,$$

oder (7) $x+y+z+t+u+v=\frac{1}{5}(a+b+c+d+e+f)$, oder, wenn man statt der bekannten Größen

$$a+b+c+d+e+f=s$$ setzt,

$$(8)\ x+y+z+t+u+v=\tfrac{1}{5}s.$$

Zieht man von dieser Gleichung nacheinander die 1., 2., 3., 4., 5., 6. Gleichung der gegebenen Gleichungen ab, so erhält man unmittelbar:

$$v=\tfrac{1}{5}s-a;\ u=\tfrac{1}{5}s-b;\ t=\tfrac{1}{5}s-c;\ z=\tfrac{1}{5}s-d;$$
$$y=\tfrac{1}{5}s-e \text{ und } x=\tfrac{1}{5}s-f.$$

β) Man nehme die Differenz zwischen den beiden ersten der hier gegebenen Gleichungen, so ist:
(7) $z+u+v=2c(a+b)+c^2$.

Subtrahiere Gl. (3) von der mit c multiplizierten Gl. (2), so ist:
(8) $cx+cy-bu-av=c(a^2-4ab+b^2)$.

Multipliziere (5) mit b und (8) mit (a+b) und addiere diese Gl., so wird
(9) $(a-b)cx+(a+3b)cy-(a+b)^2v=(a+b)(a^2-4ab+b^2)c$.

Subtrahiere (3) von der mit b multiplizierten Gl. (1), so ist:
(10) $bx+by+bz+(b-c)t+(b-a)v=b(a+b+c)^2-6abc$.

Subtrahiere die mit (b—c) multiplizierte Gl. (2) von (10), so wird:
(11) $cx+cy+bz+(b-a)v=b(a+b+c)^2-6abc-(b-c)(a+b)^2$.

Multipliziere (6) mit b und (11) mit c und subtrahiere diese beiden Gl., so ist:
(12) $(c^2-ab)x+(c^2-b^2)y+c(b-a)v=c^2(a^2-2ab+3b^2)-b(a^3+b^3)$.

Multipliziere (7) mit c und subtrahiere sie von (6), so wird:
(13) $ax+by-cu-cv=a^3+b^3-2c^2(a+b)$.

Multipliziere (13) mit (a+b) und (5) mit c und addiere sie, so ist:
(14) $[a(a+b)-2c^2]x+[b(a+b)+2c^2]y-2c(a+b)v=(a+b)(a^3+b^3)-2c^2(a+b)^2$.

Multipliziere (14) mit (b—a) und (12) mit 2(a+b) und addiere sie, so wird:
(15) $ax+by=a^3+b^3$.

Aus (15) und (6) folgt $z=c^2$. Setze diesen Wert für z in (7), so ist:

(16) $u+v=2c(a+b)$. Den Wert für v setze aus dieser Gleichung in (3) so ist:

(17) $ct-(a-b)u=2ac(2b-a)$. Aus (4) folgt durch Einsetzen des Wertes für z, daß

(18) $2ay-(b+c)t+(b+c)u=2ac^2$. Multipliziere (17) mit $b+c$ und (18) mit c und addiere diese beiden Gl., so ist:

(19) $2acy-(a-b-c)(b+c)u=2ac(2b-a)(b+c)+2ac^3$.

Setze in (5) den Wert für v aus (16) und bestimme u, so ist:

(20) $u=\frac{c(a+b)^2+c(x-y)}{a+b}$. Setze diesen Wert für u in (19), so ist:

(21) $2acy-(a-b-c)(b+c)\frac{c(a+b)^2+c(x-y)}{a+b}=$
$2ac(2b-a)(b+c)+2ac^3$ oder

(22) $[ac(2a+3b+c)-(b+c)^2c]y-(a-b-c)(b+c)\times cx$
$=b^2[ac(2a+3b+c)-(b+c)^2c]-a^2[(a-b-c)\times(b+c)c]$.

Setze aus (15) den Wert für x in (22), so ist:
$[ac(2a+3b+c)-(b+c)^2c]ay+bcy(a-b-c)(b+c)=$
$(a-b-c)(b+c)(a^3+b^3)c+ab^2[ac(2a+3b+c)-$
$(b+c)^2c]-a^3[(a-b-c)(b+c)c]$ oder
$[(a-b-c)(b+c)bc+a^2c(2a+3b+c)-ac(b+c)^2]y=$
$b^2[(a-b-c)(b+c)bc+a^2c(2a+3b+c)-ac(b+c)^2]$, folglich $y=b^2$ und daher nach (15) $x=a^2$. Aus (2) folgt, daß $t=(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Aus (4) folgt $u=2ac$ und aus (16) ergiebt sich $v=2bc$.

113. α) Multipliziert man (1) mit v und (2) mit u, und nimmt die Differenz zwischen den beiden Gleichungen, so erhält man:

(7) $xyztv=xyztu$; also $v=u$.

Multipliziert man (3) mit t, und (4) mit z, und subtrahiert diese beiden Gleichungen, so ist:

(8) $xytuv=xyzuv$; also $t=z$.

(5) mit y und (6) mit x multipliziert und diese beiden Gleichungen von einander abgezogen, giebt:

(9) $yztuv=xztuv$; also $x=y$.

Zieht man die mit t multiplizierte dritte Gleichung von der mit v multiplizierten ersten Gleichung ab, so ist:

(10) $xyzuv=xyzut$; also $t=v$.

Zieht man die mit y multiplizierte fünfte Gleichung von der mit t multiplizierten dritten Gleichung ab, so ist:

(11) $xzuvt=xyzuv$; also $t=y$.

Stellen wir das, was wir bis jetzt gefunden haben, zusammen, so ergiebt sich folgendes:

Nach (9) ist $x=y$ und nach (11) $y=t$; also ist:

$$x=y=t.$$

Nach (8) ist $t=z$; also ist $x=y=t=z$.

Nach (10) ist $t=v$; also ist:

$$x=y=t=z=v,$$

und nach (7) ist $u=v$; also ist auch

$$x=y=t=z=u=v.$$

Substituiert man den Wert für y, nämlich x in (1), so erhält man

$$2xztu+x^2tu+x^2zu+x^2zt=x^2ztu,$$

oder (12) $2ztu+x(tu+zu+zt)=xztu$.

Den Wert für $u=t$ in (12) substituiert, giebt:

$$2zt^2+x(t^2+2zt)=xzt^2, \text{ oder}$$

$$(13)\ 2zt+x(t+2z)=xzt.$$

Den Wert für $t=z$ in (13) substituiert, giebt:

$2z^2+3xz=xz^2$ oder (14) $2z+3x=xz$.

Da nun auch $x=z$, so hat man durch Substitution:

$5x=x^2$; folglich $x=5$. Es ist daher

$$x=y=z=t=u=v=5.$$

β) (2) von (1) subtrahiert, giebt:

(5) $(a-b)y+(a^2-b^2)z+(a^3-b^3)t=m-n$.

(3) von (2) subtrahiert, giebt:

(6) $(b-c)y+(b^2-c^2)z+(b^3-c^3)t=n-o$.

(4) von (3) subtrahiert, liefert:

(7) $(c-d)y+(c^2-d^2)z+(c^3-d^3)t=o-p$.

(5) durch $(a-b)$, (6) durch $(b-c)$ und (7) durch $(c-d)$ dividiert, giebt:

(8) $y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)t=\frac{m-n}{a-b}=m'$;

(9) $y+(b+c)z+(b^2+bc+c^2)t=\frac{n-o}{b-c}=n'$;

(10) $y+(c+d)z+(c^2+cd+d^2)t=\frac{o-p}{c-d}=p'$;

(9) von (8), und (10) von (9) subtrahiert, giebt:

(11) $(a-c)z+(a^2+ab-bc-c^2)t=m'-n'$;

(12) $(b-d)z+(b^2+bc-cd-d^2)t=n'-p'$.

(11) durch $(a-c)$ und (12) durch $(b-d)$ dividiert, giebt:

(13) $z+(a+b+c)t=\frac{m'-n'}{a-c}=m''$;

(14) $z+(b+c+d)t=\frac{n'-p'}{b-d}=n''$.

(14) von (13) subtrahiert, liefert:

(15) $(a-d)t=m''-n''$; also $t=\frac{m''-n''}{a-d}=m'''$.

Den Wert für t, also m''', in (13) gesetzt, giebt:
$z+(a+b+c)m'''=m''$; also $z=m''-(a+b+c)m'''$.

Die Werte für t und z in (8) gesetzt, giebt:
$y+(a+b)[m''-(a+b+c)m''']+(a^2+ab+b^2)m'''=m'$,
oder $y+m''(a+b)-(ab+ac+bc)m'''=m'$; folglich
$y=m'-m''(a+b)+(ab+ac+bc)m'''$.

Setzt man die Werte für t, z und y in (1), so hat man:
$x+a[m'-m''(a+b)+m'''(ab+ac+bc)]+$
$a^2[m''-(a+b+c)m''']+a^3m'''=m$,
oder $x+am'-abm''+abcm'''=m$; also:
$x=m-am'+abm''-abcm'''$.

b) Exponentialgleichungen (114—130).

§. 386c. 114. Nach §. 244 ist: $a^x a^{5y}=a^{x+5y}$ und nach §. 258 ist: $(a^7)^4=a^{7\cdot 4}=a^{28}$. Daher erhält man aus der ersten gegebenen Gleichung:

(3) $a^{x+5y}=a^{28}$.

Aus der zweiten gegebenen Gleichung ergiebt sich:

(4) $a^{7x}=a^{6+3y}$.

Aus (3) und (4) folgt, daß, da bei gleichen Potenzen und gleichen Grundzahlen auch ihre Exponenten gleich sind:

(5) $x+5y=28$; (6) $7x=6+3y$.

Hieraus ergiebt sich: $x=3$ und $y=5$.

115. Nach §. 287 ist: $\sqrt[3]{m^x}=m^{\frac{x}{3}}$ und $\sqrt[7]{m^y}=m^{\frac{y}{7}}$; daher ist $\sqrt[3]{m^x}\,.\,\sqrt[7]{m^y}=m^{\frac{x}{3}}.m^{\frac{y}{7}}=m^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{7}y}$ nach §. 244.

Daher erhält man aus den beiden gegebenen Gleichungen durch Umformung:

(3) $m^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{7}y}=m^7$; (4) $m^{\frac{1}{4}x+11}=m^{\frac{2}{3}y}$;

also ist: (5) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{7}y=7$ und (6) $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=-11$; folglich $x=12$ und $y=21$.

116. Hier erhält man unter Berücksichtigung von §. 287 und §. 244:

$a^{\frac{1}{x}}\,.\,a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{7}{12}}$ oder (3) $a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{\frac{7}{12}}$,

und aus der (2) Gl. (4) $a^{3\cdot\frac{1}{x}}=a^{4\cdot\frac{1}{y}}$ oder $a^{3\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{y}}=a^0$.

Aus (3) und (4) folgt: (5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12}$; (6) $3\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{y}=0$.

Daher $x=3$, $y=4$.

117. Mit Rücksicht auf §. 287 und §. 244 erhält man hier:

$$a^{\frac{3}{x+1}} . a^{y+2} = a^{\frac{27}{4}}, \text{ oder } (3)\ a^{\frac{3}{x+1}+y+2} = a^{\frac{27}{4}} \text{ und}$$

$$a^{\frac{7}{x+1}} = a^{y-5} . a^2 . a^{\frac{3}{4}} \text{ oder } (4)\ a^{\frac{7}{x+1}} = a^{y-2\frac{1}{4}}.$$

Aus den beiden Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$(5)\ \frac{3}{x+1} + y + 2 = 6\tfrac{3}{4} \text{ und } (6)\ \frac{7}{x+1} = y - 2\tfrac{1}{4},$$

daher $x=3$ und $y=4$.

118. Hier erhält man aus den beiden gegebenen Gleichungen:

$$(3)\ m^{\frac{x-5}{3}} = m^{\frac{y-3}{5}} \text{ und } (4)\ m^{\frac{3x-1}{4}+\frac{5y-1}{8}} = m^{16}.$$

Daher: $(5)\ \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{5}$ und $(6)\ \frac{3x-1}{4} + \frac{5y-1}{8} = 16$.

Hieraus folgt, daß $x=11$ und $y=13$.

119. Vermittels der Logarithmen erhält man:

$$(3)\ x \log a + y \log b = \log p;$$

$$(4)\ x \log c + y \log d = \log q.$$

Multipliziere (3) mit $\log d$ und (4) mit $\log b$, so ist:

$$(5)\ x \log a . \log d + y \log b . \log d = \log p . \log d;$$

$$(6)\ x \log c . \log b + y \log b . \log d = \log q . \log b.$$

Nimm die Differenz zwischen (5) und (6), so ist:

$$x(\log c . \log b - \log a . \log d) = \log q . \log b - \log p . \log d,$$

$$\text{folglich } x = \frac{\log q . \log b - \log p . \log d}{\log c . \log b - \log a . \log d}.$$

Multipliziere ferner (3) mit $\log c$ und (4) mit $\log a$ und nimm die Differenz zwischen diesen beiden Gleichungen, so ist:

$$y(\log b . \log c - \log a . \log d) = \log p . \log c - \log q . \log a,$$

$$\text{folglich } y = \frac{\log p . \log c - \log q . \log a}{\log b . \log c - \log d . \log a}.$$

120. Aus den gegebenen Gleichungen erhält man folgende:

$$(3)\ \frac{1}{x} \log a - \frac{1}{y} \log b = \log m$$

$$(4)\ \frac{1}{x} \log c - \frac{1}{y} \log d = \log n.$$

Vergleicht man dieses Beispiel mit dem vorhergehenden, so ergiebt sich, daß hier die reciproken Werte der Unbekannten x und y vorkommen; mithin kann der Wert der Unbekannten aus dem Werte des vorigen Beispiels dadurch hergeleitet werden, daß man die reciproken Werte des vorigen Beispiels nimmt. Es ist daher:

$$x = \frac{\log c . \log b - \log a . \log d}{\log n . \log b - \log m . \log d} \text{ und}$$

$$y = \frac{\log b . \log c - \log a . \log d}{\log n . \log a - \log c . \log m}.$$

121. Da $3981312 = 3^5 . 4^7$ und $400000 = 2^7 . 5^5$, so erhält man aus den beiden gegebenen Gleichungen folgende:
(1) $3^x . 4^y = 3^5 . 4^7$ und (2) $2^y . 5^x = 2^7 . 5^5$, oder:
(3) $3^{x-5} . 4^{y-7} = 1 = 3^0 . 4^0$; (4) $2^{y-7} . 5^{x-5} = 1 = 2^0 . 5^0$.
Diese beiden Gl. werden befriedigt durch die Annahme
$x - 5 = 0$ und $y - 7 = 0$; daher $x = 5$ und $y = 7$.

122. Nach §. 253 ist $\sqrt[3]{2^x} = \sqrt[15]{2^{5x}}$ und $\sqrt[5]{3^y} = \sqrt[15]{3^{3y}}$; daher ist nach §. 248: $\sqrt[15]{2^{5x}} . \sqrt[15]{3^{3y}} = \sqrt[15]{2^{5x} . 3^{3y}}$. Es ist also: (1) $\sqrt[15]{2^{5x} . 3^{3y}} = 36$. Erhebe diese Gleichung auf die 15te Potenz, so hat man:

$$(2)\ 2^{5x} . 3^{3y} = 36^{15}.$$

Nach §. 230 und 231 ist $4^{-x} = 1 : 4^x$; also ist:

$$\sqrt{4^{-x}} = \sqrt{1 : 4^x} = 1 : 4^{\frac{1}{2}x}.$$

und nach §. 257 Nr. 16, 17, 18 ist:

$$\sqrt[-10]{256^y} = \sqrt[10]{256^{-y}} = \sqrt[10]{1 : 256^y} = 1 : 256^{\frac{1}{10}y}.$$

oder da $256 = 4^4$ ist, so ist:

$$1 : 256^{\frac{1}{10}y} = 1 : (4^4)^{\frac{1}{10}x} = 1 : 4^{\frac{2}{5}y}.$$

Daher ist also die linke Seite der zweiten hier gegebenen Gleichung

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{2}x}} : \frac{1}{4^{\frac{2}{5}y}} = 4^{\frac{2}{5}y - \frac{1}{2}x};\ \text{folglich ist:}$$

$$(3)\ 4^{\frac{2}{5}y - \frac{1}{2}x} = 4^1,\ \text{woraus sich ergiebt, daß}$$

$$(4)\ \tfrac{2}{5}y - \tfrac{1}{2}x = 1.$$

Bestimmt man aus (4) den Wert für y, so findet man: $y = \frac{5x+10}{4}$. Setze diesen Wert für y in (2), so ist:

$$(5)\ 2^{5x} . 3^{\frac{3(5x+10)}{4}} = 36^{15}.$$

Ziehe aus dieser Gleichung die fünfte Wurzel, so ist:

$$(6)\ 2^x . 3^{\frac{3x+6}{4}} = 36^3.$$

Diese Gleichung, mit 4 potenziert, giebt:

$$(7)\ 2^{4x} . 3^{3x} . 3^6 = 36^{12}.$$

Dividiere diese Gleichung durch 3^6, so ist:

$$(8)\ 2^{4x} . 3^{3x} = . 2^6 . 36^9.$$

Nun ist $36^9 = (2^2 . 3^2)^9 = 2^{18} . 3^{18}$; daher ist $2^6 . 36^9 = 2^6 . 2^{18} . 3^{18} = 2^{24} . 3^{18}$.

Setzen wir diesen Wert für $2^6 . 36^9$ in die letzte Gleichung, so erhalten wir:

(9) $2^{4x} . 3^{3x} = 2^{24} . 3^{18}$, oder: $(2^4 . 3^3)^x = (2^4 . 3^3)^6$.

Hieraus folgt, daß $x = 6$ sein muß; folglich

$$y = \frac{30+10}{4} = 10.$$

123. Aus der ersten gegebenen Gleichung erhält man: (3) $\sqrt[xy]{5^y.(0,2)^x}=1$ oder (4) $\sqrt[xy]{5^y.5^{-x}}=1$. Diese Gleichung auf die xy^{te} Potenz erhoben, giebt: (5) $5^y.5^{-x}.=1$ oder (6) $5^{y-x}=1$ und weil $1=5^0$, so ist auch: (7) $5^{y-x}-5^0$; daher (8) $y-x=0$; folglich $x=y$. Setzen wir diesen Wert für y in die zweite gegebene Gleichung, so ist:

$\sqrt[x]{\frac{4,92}{1,23}}=4$ oder $\sqrt[x]{4}=4$; also $4^1=4^{\frac{1}{x}}$; daher $1=\frac{1}{x}$; also $x=1$, und folglich auch $y=1$.

124. Da $59049=9^5$ (§. 330)$=(3.3)^5=3^{10}$ und $1296=6^4=(2.3)^4=2^4.3^4$ und $1,5=\frac{3}{2}=3.2^{-1}$ ist, so erhält man aus der ersten gegebenen Gleichung die folgende:

$3^{10.\frac{1}{x}}:(2.3)^{4.\frac{1}{y}}=3^1.2^{-1}$ oder (3)$3^{10.\frac{1}{x}}.(2.3)^{-4.\frac{1}{y}}=3^1.2^{-1}$.

Zieht man nun in der zweiten gegebenen Gleichung aus 1048576 zuerst die Quadratwurzel, so hat man: $1024=2^{10}$; ferner ist $4096=2^{12}$ und $256=2^8$. Daher erhält man aus der zweiten gegebenen Gleichung:

$$2^{10.\frac{1}{x}}:2^{-2.12.\frac{1}{y}}=2^8 \text{ oder } (4)\ 2^{10.\frac{1}{x}+24.\frac{1}{y}}=2^8.$$

Aus (4) folgt, daß $\frac{4}{y}=\frac{4}{3}-\frac{5}{3x}$. Setzen wir diesen Wert für $\frac{4}{y}$ in (3), so erhalten wir: $3^{\frac{10}{3}}.(2.3)^{\frac{5}{3x}-\frac{4}{3}}=3^1.2^{-1}$.

Hieraus erhalten wir durch Entwickelung: $3^{\frac{1}{3x}(35-7x)}=2^{\frac{1}{3x}(x-5)}$. Potenzieren wir diese Gleichung mit 3x, so haben wir:

$$3^{35-7x}=2^{x-5}.$$

Aus dieser Gl. erhält man: $2^x.3^{7x}=2^5.3^{35}$ oder $(2.3^7)^x=(2.3^7)^5$; daher ist $x=5$. Setze diesen Wert für x in (5), so haben wir:

$$\frac{4}{y}=\frac{4}{3}-\frac{5}{15};\ \text{daher}\ \frac{4}{y}=1;\ \text{also}\ y=4.$$

125. Da $64=4^3$, $36=4^1.3^2$, $1728=12^3=(3.4)^3$ und $300=12.25=(3.4)5^2$, so erhält man aus den beiden gegebenen Gl.:

(1) $(4^3)^{\frac{1}{x}}.3^y=4^1.3^2$ und (2) $[(3.4)]^{\frac{1}{x}}.5^y=(3.4).5^2$ oder (3) $4^{\frac{3}{x}-1}.3^{y-2}=1.1=4^0.3^0$ und (4) $(3.4)^{\frac{3}{x}-1}.5^{y-2}=1.1=(3.4)^0.5^0$.

Aus diesen beiden Gl. folgt $\frac{3}{x}-1=0$ und $y-2=0$; folglich $x=3$, $y=2$.

126. Potenziere die zweite gegebene Gleichung mit y, so erhält man:
$1024=(\frac{2}{3}x)^{2y}$ oder: (3) $1024=(\frac{2}{3})^{2y}.x^{2y}$.
Ziehe aus (3) die Quadratwurzel, so ist:
(4) $32=(\frac{2}{3})^{y}.x^{y}$; folglich (5) $x^{y}=32:(\frac{2}{3})^{y}$.
Stellt man aus der ersten gegebenen Gleichung und aus (4) die Werte für x^y einander gleich, so hat man:
(6) $243=32:(\frac{2}{3})^{y}$ oder (7) $243.(\frac{2}{3})^{y}=32$; folglich:
(8) $(\frac{2}{3})^{y}=\frac{32}{243}$. Nun ist $\frac{32}{243}=(\frac{2}{3})^5$; also ist auch:
$(\frac{2}{3})^{y}=(\frac{2}{3})^5$; daher $y=5$.
Setze diesen Wert für y in die erste gegebene Gleichung, so ist: $x^5=243$ oder $x^5=3^5$; folglich $x=3$.

127. Potenziere die erste gegebene Gleichung mit x und dividiere die zweite durch 3^x, so erhält man:

(3) $x+y=2^x$ und (4) $x+y=\frac{279936}{3^x}$.

Aus (3) und (4) stelle die Werte für $x+y$ einander gleich, so ist: $2^x=\frac{279936}{3^x}$ oder $6^x=279936$.

Nach §. 330 ist $279936=6^7$, also auch:
$6^x=6^7$; folglich $x=7$.
Setze diesen Wert für x in (4), so ist:
$7+y=2^7$: also $y=2^7-7$ oder $y=121$.

128. Aus (1) ergiebt sich:

$$\sqrt[y]{\frac{1}{x}}=0{,}6922006, \text{ oder (3) } \sqrt[\frac{1}{y}]{x}=0=0{,}6922006.$$

Es ist also (4) $\sqrt[y]{x}=\frac{1}{0{,}6922006}$. Aus (2) folgt, daß

$$x=\sqrt[2{,}302585]{\frac{10^y}{52{,}27352}}, \text{ oder } x=\left(\frac{10^y}{52{,}27352}\right)^{\frac{1}{2{,}302585}}$$

$$\text{oder } x=\frac{10^{\frac{y}{2{,}302585}}}{(52{,}27352)^{\frac{1}{2{,}302585}}}.$$

Hieraus erhält man durch Ausziehen der yten Wurzel:

$$(5)\ \sqrt[y]{x}=\frac{10^{\frac{1}{2{,}302584}}}{(52{,}27352)^{\frac{1}{2{,}302585y}}}=\left(\frac{10}{(52{,}27352)^{\frac{1}{y}}}\right)^{\frac{1}{2{,}302585}}.$$

Stellt man die Werte für $\sqrt[y]{x}$ aus (4) und (5) einander gleich, so hat man:

$$\left(\frac{10}{(52{,}27352)^{\frac{1}{y}}}\right)^{\frac{1}{2{,}302585}}=\frac{1}{0{,}6922006}, \text{ oder:}$$

$$\frac{10}{(52{,}27352)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{(0{,}6922006)^{2{,}302585}}.$$

Vermittels der Logarithmen erhält man hieraus:

$$\log 10-\frac{1}{y}\log 52{,}27352=\log 1-2{,}302585\log 0{,}6922006.$$

Da $\log 10=1$ und $\log 1=0$, so ist also:

$$\frac{1}{y}\log 52{,}27352=1+2{,}302585\log 0{,}6922006;$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1+2{,}302585\log 0{,}6922006}{\log 52{,}27352}=\frac{0{,}63212060}{1{,}7182818};$$

also: $\frac{1}{y}=0{,}367879$; folglich $y=2{,}7182818$.

Substituiert man den Wert für y in (1), so hat man:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2{,}7182818}}=0{,}6922006.$$

Die Auflösung dieser Gleichung findet man oben S. 32 Beispiel 139.

129. Da $18=2^1 . 3^2$; $500=4^1 . 5^3$ und $12348=6^2 . 7^3$, so erhält man aus den drei gegebenen Gleichungen folgende:

$$(1)\ 2^x . 3^y=2^1 . 3^2$$
$$(2)\ 4^x . 5^z=4^1 . 5^3$$
$$(4)\ 6^y . 7^z=6^2 . 7^3$$

Hieraus erhält man durch abermalige Umformung:

$$(4)\ 2^{x-1} . 3^{y-2}=1 . 1=2^0 . 3^0$$
$$(5)\ 4^{x-1} . 5^{z-3}=1 . 1=4^0 . 5^0$$
$$(6)\ 6^{y-2} . 7^{z-3}=1 . 1=6^0 . 7^0$$

Diese Gleichungen können nur stattfinden, wenn $x-1$, $y-2$, $z-3$ gleich Null gesetzt werden, woraus dann folgt, daß $x=1$, $y=2$, $z=3$.

130. Unter Anwendung der §§. 244 und 247 erhalten wir aus den drei gegebenen Gleichungen folgende:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ a^{zy+xy+xz}=a^{16xyz}\\(2)\ a^{zy-xy+xz}=a^{14xyz}\\(3)\ a^{zy+xy-xz}=a^{6xyz}\end{array}\right\}\text{ Hieraus folgt:}$$

$$(4)\ zy+xy+xz=16xyz$$
$$(5)\ zy-xy+xz=14xyz$$
$$(6)\ zy+xy-xz=6xyz$$

Addiere (5) und (6), so ist: $2zy=20xyz$ oder: $10x=\mathbf{1}$; also $x=0{,}1$.

Addiere (4) und (5), so ist: $y+x=15xy$, hierin $x=0,1$ eingesetzt, giebt: $\frac{1}{2}y=0,1$; also $y=0,2$.

Durch Addition von (4) und (6) erhält man: $z+x=11xz$; hierin $x=0,1$ gesetzt, giebt: $\frac{1}{10}z=0,1$; also $z=1$.

---

3. **Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten mit Hülfe der Determinanten.** Heis, Sammlung §. 66.

§. 387. Aus den beiden Gleichungen (1) $a_1x+b_1y=c_1$ und (2) $a_2x+b_2y=c_2$ folgt

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ und } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

In beiden Werten ist der Nenner $=a_1b_2-a_2b_1$, der aus den 4 Koeffizienten $a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ leicht mechanisch abgeleitet werden könnte. Setzen wir nämlich diese 4 Koeffizienten in der durch die beiden Gleichungen gegebenen Reihenfolge untereinander, also in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

so ist der Nenner offenbar die Differenz der Produkte der in den beiden Diagonalen des Quadrats stehenden Elemente, wobei das Produkt der in der Hauptdiagonale (von links oben nach rechts unten, also von a_1 nach b_2) stehenden Elemente den Minuend jener Differenz bildet. Man nennt nun diese Differenz der Kreuzprodukte die Determinante der 4 Elemente $a_1\, a_2\, b_1\, b_2$ und bezeichnet sie durch obiges Symbol. Demnach ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

Diese Determinante besteht aus zwei Reihen, wovon diejenigen, welche mit den die Elemente $a_1\, b_1\, a_2\, b_2$ einschließenden Linien parallel sind, Vertikalreihen oder Kolumnen, die andern Horizontalreihen oder Zeilen genannt werden. Weil

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

so folgt daraus, daß der Wert dieser Determinante nicht geändert wird, wenn man die Vertikalreihen zu Horizontalreihen oder umgekehrt macht. Daher ist:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

Vertauscht man aber in der Determinante die beiden Kolumnen oder die beiden Zeilen mit einander, so findet jedesmal ein Zeichenwechsel statt. Denn es ist

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1).$$

In den für x und y gefundenen Werten sind ebenfalls die Zähler Determinanten. Denn es ist:

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ und } a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Beide Zähler können mechanisch aus dem Nenner

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

abgeleitet werden, indem man an die Stelle der Koeffizienten der zu suchenden Unbekannten die entsprechenden bekannten Glieder c_1c_2 setzt. Daher kann der Wert für x und y in obigen Gl. auf folgende Weise dargestellt werden:

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ und } y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

1. Beispiel mit 2 Unbekannten. Gegeben sei (1) $5x + 4y = 59$; (2) $2x + 3y = 32$. Bilden wir nach dem Gesagten die Determinante für den Nenner der Werte der beiden Unbekannten, so ist:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 4.2.$$

Setzen wir in dieser Determinante an die Stelle von 5 und 2 sowie von 4 und 3 bezüglich die bekannten Glieder 59 und 32, so erhalten wir die Zähler der Werte für x und y. Es ist daher

$$x = \begin{vmatrix} 59 & 4 \\ 32 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{59.3 - 4.32}{5.3 - 4.2} = \frac{49}{7} = 7.$$

$$y = \begin{vmatrix} 5 & 59 \\ 2 & 32 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5.32 - 2.59}{5.3 - 4.2} = \frac{42}{7} = 6.$$

2. Beispiel mit 3 Unbekannten. Die Auflösung der Aufgabe 87α) des §. 65a ergab, wie wir Seite 162 u. 163 gezeigt haben, für die 3 Unbekannten folgende Werte:

$$x = \frac{m_1(b_2c_3 - b_3c_2) + m_2(b_3c_1 - b_1c_3) + m_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)},$$

$$y = \frac{m_1(c_2a_3 - e_3a_2) + m_2(c_3a_1 - c_1a_3) + m_3(c_1a_2 - c_2a_1)}{b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + b_2(c_3a_1 - c_1a_3) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1)},$$

$$z = \frac{m_1(a_2b_3 - a_3b_2) + m_2(a_3b_1 - a_1b_3) + m_3(a_1b_2 - a_2b_1)}{c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Eine Vergleichung der Divisoren mit den Dividenden in diesen Werten läßt sofort erkennen, daß man diese Dividenden aus den Divisoren leicht ableiten könnte, indem man die darin

vorkommenden Koeffizienten der zu suchenden Unbekannten, also $a_1 a_2 a_3$, dann $b_1 b_2 b_3$ und endlich $c_1 c_2 c_3$ in den bezüglichen Werten mit den bekannten Größen $m_1 m_2 m_3$ vertauscht. Die Divisoren der 3 Quotienten sind zwar im Ausdruck verschieden. Wenn wir indeß jeden derselben entwickeln und die 3 Buchstaben, woraus jedes Produkt besteht, in alphabetischer Ordnung auf einander folgen lassen, so erhalten wir als gemeinschaftlichen Divisor für alle 3 Unbekannten

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

Dieser den Werten aller 3 Unbekannten gemeinschaftliche Divisor heißt wieder die Determinante der in den 3 Gleichungen vorkommenden Koeffizienten $a_1\, b_1\, c_1$; $a_2\, b_2\, c_2$; $a_3\, b_3\, c_3$ und wird, wenn wir allgemein die Determinante mit R bezeichnen, symbolisch dargestellt durch

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante besteht also aus 6 Produkten, worin jedesmal drei Elemente als Faktoren auftreten und zwar in jedem Produkte aus jeder Horizontal- oder Vertikalreihe nur ein einziges Element. Um eine Determinante von 9 Elementen rasch und sicher ausrechnen zu können, schreibe man neben dieselbe nochmals die beiden ersten Vertikalreihen. Das Hauptprodukt liegt in der Diagonale von a_1 und c_3 und ist positiv. Alle ferneren Produkte, deren Elemente mit dieser Diagonale parallel liegen, sind ebenfalls positiv; alle Produkte dagegen, deren Elemente parallel mit der zweiten Diagonale der Determinante R von c_1 nach a_3 liegen, sind negativ. Daher ist

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \end{matrix} \right\}.$$

Es lassen sich die positiven und negativen Produkte auch noch auf folgende Weise bestimmen. Alle Koeffizienten der Unbekannten sind mit den Indices oder Zeigern 1 2 3 versehen. Dieselben können eine sechsfach verschiedene Stellung zu einander haben, nämlich: 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1. Daher kann es auch aus den 9 mit diesen Indices versehenen Koeffizienten nur 6 verschiedene Produkte von je 3 Faktoren geben. Mit Ausnahme in der ersten Stellung 1 2 3 ist in allen andern Versetzungen die natürliche Reihenfolge der Indices gestört. Dies ist immer der Fall, wenn ein höheres (später vorkommendes) Element einem niedrigeren (früher vorkommenden) vorangeht. Man nennt dies Inversion (Abweichung von der natürlichen Reihenfolge). So hat 1 3 2 eine Inversion, weil 3 vor 2 steht, dagegen 2 3 1 zwei

Inversionen, nämlich 21 und 31. Nun sind alle Produkte positiv, deren Indices keine oder eine gleiche Anzahl, dagegen negativ, deren Indices eine ungleiche Anzahl von Inversionen enthalten, vorausgesetzt, daß die Faktoren in alphabetischer Ordnung aufeinanderfolgen. Daher sind alle Produkte mit den Indices 123, 231, 312 also $a_1 b_2 c_3$, $a_2 b_3 c_1$, $a_3 b_1 c_2$ positiv; hingegen die mit den Indices 132, 213, 321 also $a_1 b_3 c_2$, $a_2 b_1 c_3$, $a_3 b_2 c_1$ negativ.

Der gemeinschaftliche Divisor der 3 Unbekannten oder die Determinante der 9 Koeffizienten erscheint vor der Entwickelung in 3 verschiedenen Formen (wie aus den oben angeführten Werten für x, y, z zu ersehen), in der ersten nach $a_1 a_2 a_3$, in der zweiten nach $b_1 b_2 b_3$ und in der dritten nach $c_1 c_2 c_3$ geordnet. Die binamischen Faktoren dieser Größen heißen Unterdeterminanten oder Determinanten zweiter Ordnung.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$A_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$A_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix};$$

$$A_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = a_3 c_2 - a_2 c_3 = \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$B_2 = a_1 c_3 - a_3 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$B_3 = a_2 c_1 - a_1 c_2 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix};$$

$$C_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$C_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix};$$

$$C_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

so kann die Determinante R in folgenden 3 Formen durch ihre Unterdeterminanten dargestellt werden:

$$R = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3;$$
$$R = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3;$$
$$R = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3.$$

Daher können wir die Werte für x, y, z auch in folgender Form ausdrücken;

$$x=\frac{m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3}{a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3}=\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$y=\frac{m_1B_1+m_2B_2+m_3B_3}{b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3}=\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 \\ a_3 & m_3 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$z=\frac{m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3}{c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & m_1 \\ a_2 & b_2 & m_2 \\ a_3 & b_3 & m_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Aus den für R gefundenen Ausdrücken folgt, daß eine Determinante dritter Ordnung auf 3 Arten durch Unterdeterminanten oder Determinanten zweiter Ordnung dargestellt werden kann, daß sie zerlegbar ist in Produkte aus den Elementen einer Vertikalreihe in die Determinanten derjenigen Elemente, welche übrig bleiben, wenn man diejenige Kolumne und diejenige Zeile außer Acht läßt, welche das als Faktor vorangestellte Element enthalten. So ist nämlich:

$$R=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3, \text{ d. h.}$$

$$R=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Multipliziert man die Unterdeterminanten nach den Elementen einer Reihe mit den Elementen einer andern Reihe, so beträgt ihre Summe Null.

Hiernach ist also: $0=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3$.

Denn es ist

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

daher ist

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

Hieraus folgt, daß eine Determinante immer Null ist, wenn zwei Parallelreihen einander gleich sind. Daher ist also immer:

$$\begin{aligned} R&=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 \\ 0&=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 \\ 0&=c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 \\ 0&=a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 \\ R&=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 \\ 0&=c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 \\ 0&=a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ 0&=b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ R&=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3. \end{aligned}$$

Hiernach sind wir jetzt imstande, die Aufgabe 87α) in § 65a mit Hülfe der Determinanten auf folgende Weise zu lösen. Multipliziert man die 3 gegebenen Gleichungen zuerst bezüglich mit $A_1 A_2 A_3$, dann mit $B_1 B_2 B_3$ und endlich mit $C_1 C_2 C_3$ und addiert jedesmal die entstandenen Resultate, so erhalten wir unmittelbar zur Bestimmung der Unbekannten folgende 3 Gleichungen, die in Vorstehendem bereits ihre Auflösung gefunden haben:

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x=m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3;$$
$$(b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3)y=m_1B_1+m_2B_2+m_3B_3;$$
$$(c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3)z=m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3.$$

---

1. Eine Determinante zweiten Grades besteht aus zwei Teilprodukten. Die Teilprodukte einer Determinante dritten Grades erhält man, indem man jedes Element der ersten (oder irgend einer) Kolumne (oder Zeile) mit seiner Unterdeterminante, einer Determinante zweiten Grades multipliziert; man erhält also 3 . 2 Teilprodukte. Eine Determinante vierten Grades wird auf dieselbe Weise aus Determinanten dritten Grades gebildet. Man erhält hier 4 . 3 . 2 Teilprodukte. Eine Determinante nten Grades besteht ebenso aus $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3 . 2$ oder $n!$ Teilprodukten. $n!$ ist aber stets eine gerade Zahl, weil es den Faktor 2 enthält.
2. Alle Elemente seien positiv. Die Determinante zweiten Grades enthält ein positives und ein negatives Glied. Die Determinante dritten Grades werde nach der ersten Kolumne entwickelt, so wird das erste Element positiv, das zweite negativ, das dritte positiv mit einer Determinante zweiten Grades multipliziert. Man erhält also gleich viele positive und negative Glieder. Die Determinante vierten Grades enthält, nach der ersten Kolumne entwickelt, vier Determinanten dritten Grades, die erste multipliziert mit dem positiven ersten, die zweite mit dem negativen zweiten, die dritte mit dem positiven dritten und die vierte mit dem negativen vierten Element der ersten Kolumne. Man erhält so stets gleich viele positive und negative Glieder. Jedes Element kommt in der Determinante eine gerade Anzahl von Malen vor. Denn entwickelt man nach der Kolumne oder Zeile, die jenes Element enthält, so wird dieses mit seiner Unterdeterminante multipliziert, also mit einer geraden Anzahl von Gliedern (nach Nr. 1). Davon ist nach Obigem die eine Hälfte positiv, die andere Hälfte negativ. Sind alle Elemente von demselben Vorzeichen, so ist der Satz erwiesen. Kehrt man irgend einem Element das Vorzeichen um, so werden in der Determinante eine gerade Anzahl Zeichen ge-

ändert. Das Verhältnis bleibt das gleiche. Ebendasselbe ist der Fall, wenn einem weitern Element das Vorzeichen umgekehrt wird. Die Determinante zweiten Grades bildet eine Ausnahme, weil hier die Unterdeterminanten eine ungerade Anzahl Elemente, nämlich ein Element enthalten. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 + b_1a_2.$$

3. Entwickelt man die Determinante nach der ersten Kolumne, so ist das erste Element a_1 positiv zu nehmen. Die Unterdeterminante zu a_1 beginnt mit b_2. Dieses ist auch positiv zu nehmen, da es in der ersten Kolumne und Zeile steht. Dasselbe gilt für c_3, $d_4 \ldots\ldots q_n$, so daß das Produkt $a_1b_2c_3 \ldots\ldots q_n$ stets positiv ausfällt.

4. In der Determinante $| a_1b_2c_3 \ldots\ldots p_{n-1}q_n |$ hat

a_n das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$, da es in der nten Zeile und in der ersten Kolumne steht,

b_{n-1} " " $(-1)^n$

c_{n-2} " " $(-1)^{n-1}$

⋮

p_2 " " $(-1)^3$

q_1 " " $(-1)^2$,

also hat das Produkt $a_nb_{n-1}c_{n-2} \ldots\ldots p_2q_1$, das Vorzeichen $(-1)^{n+1+n+n-1+\ldots\ldots 3+2}$, d. i. $(+1)$ oder (-1), jenachdem die Summe $\sum_{a=2}^{a=n+1} a$ oder die Summe $\sum_{a=3}^{a=n+1} a$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Nach der Summenformel für die arithmetische Reihe ist jene Summe gleich $\frac{n-1}{2}(3+n+1)$ oder $\frac{n(n-1)}{2}+2n-2$. Die Summanden $2n-2$ können keine Änderung herbeiführen; $\frac{n(n-1)}{2}$ aber ist offenbar nur gerade, wenn entweder $n=4t$ oder $n=4t+1$ ist. Man hat entweder $\frac{4t(4t-1)}{2}$ oder $\frac{(4t+1)4t}{2}$.

5. Die Berechnung der hier gegebenen Determinanten ergiebt: α) $a_1b_2-b_1a_2$; β) $16-15=1$; γ) $-28-(-6)=-22$; δ) -6.

6. Hier ist α) $(a+b)a-b(a-b)=a^2+b^2$,
β) $(x+y)(x-y)-(x-2y)(x+2y)=$
$x^2-y^2-(x^2+4y^2)=-5y^2$,

γ) $\cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha = \cos\alpha$,

δ) $\sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$.

7. Die gegebenen Ausdrücke verwandeln sich in folgende Determinanten zweiten Grades:

α) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} a_2 & -a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ -c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} x+y & y \\ x-y & x \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} m & 0 \\ a & m \end{vmatrix}$ Für a kann jede positive oder negative Größe, auch 0 stehen.

8. Die Berechnung der gegebenen Determinanten dritten Grades durch Zerlegung in Unterdeterminanten erster Ordnung bezüglich der ersten Kolumne ergibt:

α) $a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} =$

$a(ei-fh)-d(bi-ch)+g(bf-ce)=$

$aei-afh-dbi+dch+gbf-gce.$

β) $a\begin{vmatrix} c & d \\ d & e \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} =$

$ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3.$

γ) $1\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} =$

$-2+92-114=-24.$

9. α) $1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1+4-3=0.$

Diese Aufgabe ist ein Zahlenbeweis zu Nr. 8. β); durch Einsetzen findet sich die Übereinstimmung.

β) $m\begin{vmatrix} m & p \\ 0 & m \end{vmatrix} = m^3.$

γ) $(1+a)\begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+b & 1 \end{vmatrix} =$

$(1+a)(1+b)(1+c)-(1+a)-(1+c-1)+1-(1+b)=$

$bc+ac+ab+abc.$

10. Die Werte der Koeffizienten-Determinanten sind:

α) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

β) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$

$3(-2+9)-7(5-12)+4(15-8)=98.$

11. α) $$z\begin{vmatrix} z & -a_1c_2^2 \\ -a_1b_2^2 & z \end{vmatrix} - a_2^2c_1\begin{vmatrix} -b_2^2c_1 & b_1c_2^2 \\ -a_1^2b_2^2 & z \end{vmatrix}$$
$$+a_2^2b_1\begin{vmatrix} -b_2^2c_1 & b_1c_2^2 \\ z & -a_1c_2^2 \end{vmatrix} =$$
$$z^3+z\left(-a_1^2b_2^2c_2^2+a_2^2b_2^2c_1^2-a_2^2b_1^2c_2^2\right).$$

β) $$a\begin{vmatrix} c-z & d \\ d & e \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c+2z \\ d & e \end{vmatrix} + (c+2z)\begin{vmatrix} b & c+2z \\ c-z & d \end{vmatrix} =$$
$$a\big((c-z)e-d^2\big)-b\big(be-(c+2z)d\big)+(c+2z)\big(bd-(c+2z)(c-2z)\big)=$$
$$4z^3-z(ae-4bd+3c^2)+ace-ad^2-b^2e+2bcd-c^3.$$

12. Der Dividendus ergiebt:
$$1\begin{vmatrix} x_2 & z \\ x_2^2 & z^2 \end{vmatrix} - x_1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2^2 & z^2 \end{vmatrix} + x_1^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & z \end{vmatrix} =$$
$$x_2z^2-zx_2^2-x_1z^2+x_1x_2^2+x_1^2z-x_1^2x_2.$$

Der Divisor ist: x_2-x_1.

Die Division geht auf und man erhält:
$$z^2-z(x_1+x_2)+x_1x_2.$$

13. α) $$x\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -b & x \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -b & c \\ -b & x \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -b & c \\ 1 & -a \end{vmatrix} = 0$$
$$x^2-abx+abx-abc+abc-c^2=0$$
$x^2-c^2=0$ oder $x=c$.

β) $$x\begin{vmatrix} x & -c \\ c & x \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -a & -b \\ c & x \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & -b \\ x & -c \end{vmatrix} = 0$$
$$x^3+c^2x+a^2x-abc+abc+b^2x=0$$
$$x^2+a^2+b^2+c^2=0;\ x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

14. In $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ist $a_1\,b_2\,c_3$ positiv. (Vgl. Nr. 3.)
ist $a_3\,b_2\,c_1$ negativ. (Vgl. Nr. 4.)
ist $a_2\,b_3\,c_1$ positiv; a_2 ist negativ zu nehmen, b_3 ebenso; c_1 ist positiv zu nehmen.

15. α) $a_1\,b_2\,c_3\,d_4$ ist positiv. (Vgl. Nr. 3.)
$a_4\,b_3\,c_2\,d_1 = d_1\,c_2\,b_3\,a_4$ ist positiv. (Vgl. Nr. 4.)
$d_1\,b_2\,a_3\,c_4$ ist positiv, da d_1 und b_2 negativ, a_3 und a_4 positiv zu nehmen sind.
$b_1\,a_2\,d_3\,c_4$ ist positiv. b_1 und d_3 sind negativ, a_2 und c_4 positiv zu nehmen.

β) $a_1\,b_2\,c_3\,d_4$ ist positiv. (Vgl. Nr. 3.)
$a_4\,b_3\,c_2\,d_1$ ist positiv. (Vgl. Nr. 4.)

$d_1 b_2 a_3 c_4$, nach dem Alphabet geordnet in
$a_3 b_2 c_4 d_1$ ist positiv, da $(-a_3)$ seiner Stelle nach positiv, $(-b_2)$ negativ, c_4 negativ und d_1 positiv ist.
$b_1 a_2 d_3 c_4 = a_2 b_1 c_4 d_3$ positiv, da a_2 und c_4 ihrer Stelle nach negativ, b_1 und d_3 dagegen positiv sind.

16. Der in der Anleitung zu dieser Nr. gegebene Beweis wird sogleich zu einem allgemeinen, wenn man sich statt einer Determinante 5ten Grades eine solche nten Grades geschrieben denkt und statt der Indices 3 und 5 die allgemeinen p und q auswählt.

17. $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3; \\ -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3; \\ c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3; \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$= b_1B_1 - b_2B_2 + b_3B_3$
$= -D$, wie die Vergleichung mit der zweiten Zeile rechts zeigt.

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$= c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3$
$= D$, wie die Vergleichung zeigt.

19. Man setze statt der Determinante dritten Grades in der Anleitung eine solche nten Grades:
$$| a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots k_n |$$
und erhält entsprechend:

$D = a_1A_1 - a_2A_2 \pm \ldots\ldots + (-1)^{n+1} a_nA_n$
$D = -b_1B_1 + b_2B_2 \mp \ldots\ldots + (-1)^{n+2} b_nB_n$
$\vdots$
$D = (-1)^{n+1} k_1K_1 + (-1)^{n+2} k_2K_2 + \ldots\ldots + (-1)^{n+n} k_nK_n$
$R = a_1A_1 - b_1B_1 \pm \ldots\ldots + (-1)^{n+1} k_1K_1$
$R = -a_2A_2 + b_2B_2 \mp \ldots\ldots + (-1)^{n+2} k_2K_2$
$\vdots$
$R = (-1)^{n+1} a_nA_n + (-1)^{n+2} b_nB_n + \ldots\ldots + (-1)^{n+n} k_nK_n.$

Addiert man jedes System von n Gleichungen, so erhält man, wie leicht zu übersehen: $nD = nR$, also ist $D = R$.

20. Da man eine Determinante entwickelt, indem man jedes Element derselben beliebigen Kolumne oder Zeile mit seiner Unterdeterminante multipliziert, jedes entstehende Glied mit

dem richtigen Vorzeichen versieht und alle Produkte addiert, so wird eine Determinante mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert, wenn jedes Element derselben Kolumne oder Zeile mit dieser Zahl multipliziert oder durch diese Zahl dividiert wird.

21. α) $\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & \frac{11}{4} \\ \frac{19}{5} & -\frac{29}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{12.30} \begin{vmatrix} 20 & 33 \\ 144 & -145 \end{vmatrix}$ (nach Nr. 20)

$=(-2900-3762):360=-18\frac{91}{180}$.

β) Man läßt die Decimalkommata weg, bildet die Determinante und dividiert alsdann durch 1000. Man erhält zunächst:

$42120+77452+72128+85680+45024+60996+383400$

Die Determinante hat den Wert 383,4.

γ) Nach Nr. 20 ist die Determinante

$$xyzd \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ e & f & g \end{vmatrix}.$$

Man entwickelt nach der zweiten Zeile und hat:

$xyzd\big(-(bg-cf)-(af-be)\big)=$

$xyzd(be+cf-af-bg)$.

22. Der Beweis wird allgemein, sobald man statt der Determinante vierten Grades eine Determinante nten Grades schreibt.

23. α) Der Wert der Determinante ist Null (nach Nr. 22), da die erste und zweite Kolumne übereinstimmen.

β) Multipliziert man die Elemente der zweiten Kolumne mit 3, so wird die Determinante mit 3 multipliziert. Es werden dann die beiden ersten Kolumnen identisch. Die Determinante hat also den Wert Null.

γ) Dividiert man die Elemente der zweiten Kolumne durch $(-b)$, die der dritten durch c, so stimmen beide überein. Die Determinante hat also ebenfalls den Wert Null.

24. Entwickelt man eine Determinante nach den Elementen irgend einer Kolumne und ersetzt in diesem Ausdruck jene Elemente durch die entsprechenden Elemente einer andern Kolumne, so erhält man denselben Ausdruck, als wenn man die Elemente jener zweiten Kolumne mit den Unterdeterminanten der Elemente der ersten Kolumne multipliziert hätte. Schreibt man diesen Ausdruck wieder als Determinante, so erhält dieselbe zwei gleiche Kolumnen und ist (nach Nr. 22) gleich Null.

25. Ist ein System von n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten aufzulösen, so hat man mit Anwendung des in der vorhergehenden Nummer Behandelten der Reihe nach

mit den rechts angeschriebenen Faktoren zu multiplizieren und jedesmal die n Gleichungen zu addieren:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a_1x+b_1y+\ldots..+k_1t=m_1 & A_1 & -B_1 & \ldots\ldots(-1)^{n+1}\,K_1 \\
a_2x+b_2y+\ldots..+k_2t=m_2 & -A_2 & B_2 & (-1)^{n+2}\,K_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_nx+b_ny+\ldots..+k_nt=m_n & (-1)^{n+1}\,A_n & (-1)^{n+2}\,B_n & (-1)^{n+n}\,K_n
\end{array}$$

Man erhält so:

$$x=\frac{m_1A_1-m_2A_2+\ldots..+(-1)^{n+1}m_nA_n}{a_1A_1-a_2A_2+\ldots..+(-1)^{n+1}a_nA_n}=\frac{m_1A_1-m_2A_2+\ldots..+(-1)^{n+1}m_nA_n}{D}.$$

Ebenso $y=\frac{-m_1B_1+m_2B_2-\ldots..+(-1)^{n+2}m_nB_n}{D}$

$$\vdots$$

$$t=\frac{(-1)^{n+1}m_1K_1+(-1)^{n+2}m_2K_2+\ldots..+(-1)^{n+n}m_nK_n}{D}.$$

26. α) Mit Anwendung der in Nr. 24 erhaltenen Formeln erhält man:

$$x=\frac{m_1b_2-m_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\ y=\frac{m_2a_1-m_1a_2}{a_1b_2-a_2b_2}.$$

β) $x=\frac{-20\,.\,11+44\,.\,7}{-5\,.\,11+9\,.\,7}=11;\ y=\frac{5\,.\,44-9\,.\,20}{-5\,.\,11+9\,.\,7}=5.$

γ) Nach Wegschaffung der Nenner und Umstellung erhält man:

$$18x-16y=53$$
$$54x-4y=-259.$$

Hieraus folgt $x=\frac{-53\,.\,4-259\,.\,16}{-18\,.\,4+16\,.\,54}=-5\tfrac{1}{2};$

$$y=\frac{-18\,.\,259-53\,.\,54}{-18\,.\,4+16\,.\,54}=-9\tfrac{1}{2}.$$

27. α)

für $+\begin{cases} x=\frac{-ecg-hcd}{-abcg-acdf}=\frac{eg+hd}{a(bg+df)}; \\ y=\frac{-\ aef+abh}{-abcg-acdf}=\frac{ef-bh}{c(bg+df)}; \end{cases}$

für $-\begin{cases} x=\frac{bd-eg}{a(fd-bg)}; \\ y=\frac{bh-ef}{c(fd-bg)}. \end{cases}$

β) Die Gleichungen werden geschrieben:

$$(a-b)x+(a+b)y=2a$$
$$(a-b)x-(a+b)y=2b;$$ hieraus folgt:

$$x=\frac{-2a(a+b)-2b(a+b)}{-(a-b)(a+b)-(a+b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b};$$

$$y=\frac{-2a(a-b)+2b(a-b)}{-(a-b)(a+b)-(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

28*). α) Die Koeffizienten-Determinante ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

Es findet sich sogleich:

$$x=\frac{-2a-2b}{-4}=\frac{a+b}{2};$$

$$y=\frac{-2a-2c}{-4}=\frac{a+c}{2};$$

$$z=\frac{-2b-2c}{-4}=\frac{b+c}{2}.$$

β) Die Koeffizienten-Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 \\ 9 & 0 & -11 \end{vmatrix}=196.$$

Man erhält sogleich:

$$x=\frac{5\,.\,55-75(-11)-10(7+5)}{196}=5;$$

$$y=\frac{-5(-33-63)+75(-11-9)+10(7-3)}{196}=-5;$$

$$z=\frac{5\,.\,45-75(-9)-10(-5-3)}{196}=5.$$

29. α) Die Koeffizienten-Determinante ist:

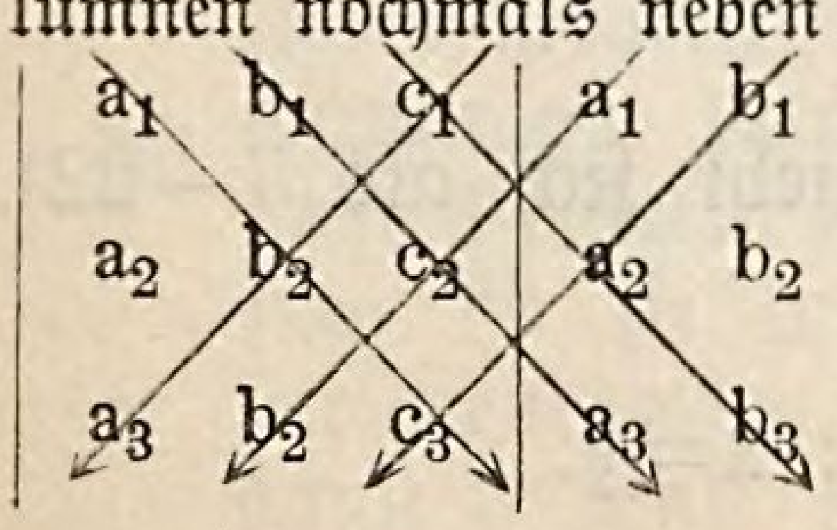
$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=98.$$

Man erhält sogleich:

$$x=\frac{0{,}5(-2+9)-0{,}2(5-12)+0{,}7(15-8)}{98}=\frac{9{,}8}{98}=0{,}1;$$

---

*) Anmerkung. Um eine Determinante dritten Grades zu bilden, kann man folgende praktische Regel benutzen. Man schreibe die beiden ersten Kolumnen nochmals neben das Schema und ziehe durch das neue Schema Querlinien, wie nebenstehend. Die drei Elemente auf derselben Querlinie multipliziere man miteinander und gebe dem Produkte das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Querlinie von links oben nach unten rechts zeigt oder umgekehrt. Die entstehenden 6 Produkte werden addiert.



$$y=\frac{-0{,}5(-7+12)+0{,}2(-3-16)-0{,}7(-9-28)}{98}=\frac{19{,}6}{98}=0{,}2;$$

$$z=\frac{0{,}5(21-8)-0{,}2(9+20)+0{,}7(6+35)}{98}=\frac{29{,}4}{98}=0{,}3.$$

β) Die Determinante der Koeffizienten ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2.$$

Man erhält sogleich:

$$x=\frac{-16-22+28}{-2}=5;$$

$$y=\frac{-16+22-28}{-2}=11;$$

$$z=\frac{16-22-28}{-2}=17.$$

30. α) Die Koeffizienten-Determinante ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3+b_1b_2b_3=D.$$

Man erhält somit:

$$x=\frac{m_1a_2a_3-m_2b_1a_2+m_3b_1b_2}{D};$$

$$y=\frac{m_1b_2b_3+m_2a_1a_3+m_3a_1b_2}{D};$$

$$z=\frac{-m_1a_2b_3+m_2b_1b_3+m_3a_1a_2}{D}.$$

β) Man dividiert jede Gleichung durch xyz und erhält als Unbekannte $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$;

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9;$$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=-4;$$

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=4.$$

Die Koeffizienten-Determinante ergiebt sich als (—22). Man erhält sogleich:

$$\frac{1}{x}=\frac{9(-4)+4.3+4(-5)}{-22}=\frac{44}{22};\ x=\tfrac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{y}=\frac{(-9).10-4(-2)-4(-4)}{-22}=\frac{66}{22};\ y=\tfrac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{z}=\frac{9(-8)+4(-5)+4.1}{-22}=\frac{88}{22};\ z=\tfrac{1}{4}.$$

31. Die Koeffizienten-Determinante für das System III in §. 65a. 2) ist:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 5 & 8 & 11 \\ 8 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 64+231-385+392-242-60=0.$$

Die Koeffizienten-Determinante in System IV ebendaselbst ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn die Koeffizienten-Determinante verschwindet, hat das System von Gleichungen keine Lösung, da jede Unbekannte sich als Bruch darstellt, dessen Nenner die Determinante ist.

32. Lösung der Systeme §. 65a. Nr. 107. 108. 109 mittels Determinanten.

(107) Multiplizieren wir die 4 Gleichungen bezüglich mit A_1, A_2, A_3, A_4, dann mit B_1, B_2, B_3, B_4, hierauf mit C_1, C_2, C_3, C_4, und endlich mit D_1, D_2, D_3, D_4, so erhalten wir, wenn wir jedesmal die erhaltenen Resultate addieren:

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4)x=m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4$$
$$(b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4)y=m_1B_1+m_2B_2+m_3B_3+m_4B_4$$
$$(c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+c_4C_4)z=m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3+m_4C_4$$
$$(d_1D_1+d_2D_2+d_3D_3+d_4D_4)u=m_1D_1+m_2D_2+m_3D_2+m_4D_4.$$

Nun ist die Determinante R, deren Unterdeterminanten wir mit den entsprechenden großen Buchstaben A_1, B_1, C_1, D_1, u. s. w. bezeichnen:

$$R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Bei der Bildung der Produkte dieser Determinante muß festgehalten werden, daß jede Horizontal- oder Vertikalreihe nur ein einziges Element zu jedem Produkte hergeben darf. Jedes Produkt besteht hier aus 4 Faktoren, weil es eine Determinante vierten Grades ist. Es kommt nun darauf an, diese Produkte richtig zu bilden. Da hier die Indices 1 2 3 4 sind, so ist zu untersuchen, wie oft sich diese 4 Elemente versetzen lassen. Setzen wir nun nacheinander 1, dann 2, dann 3 und endlich 4 an die Spitze der Gruppen, so er-

halten wir jedesmal 6 Produkte, also im ganzen $4 \times 6 = 24$ Produkte von je 4 Faktoren. Unter diesen Produkten sind diejenigen positiv, welche keine oder eine gleiche Anzahl von Inversionen haben, und diejenigen negativ, in welchen eine ungleiche Anzahl von Inversionen vorkommt. Hiernach enthält die Determinante R folgende Produkte:

1234	hat	keine	Inversion;	daher	$+a_1 b_2 c_3 d_4$
1243	„	1	„ ;	„	$-a_1 b_2 c_4 d_3$
1324	„	1	„ ;	„	$-a_1 b_3 c_2 d_4$
1342	„	2	Inversionen;	„	$+a_1 b_3 c_4 d_2$
1423	„	2	„ ;	„	$+a_1 b_4 c_2 d_3$
1432	„	3	„ ;	„	$-a_1 b_4 c_3 d_2$
2134	„	1	Inversion;	„	$-a_2 b_1 c_3 d_4$
2143	„	2	Inversionen;	„	$+a_2 b_1 c_4 d_3$
2314	„	2	„ ;	„	$+a_2 b_3 c_1 d_4$
2341	„	3	„ ;	„	$-a_2 b_3 c_4 d_1$
2413	„	3	„ ;	„	$-a_2 b_4 c_1 d_3$
2431	„	4	„ ;	„	$+a_2 b_4 c_3 d_1$
3124	„	2	„ ;	„	$+a_3 b_1 c_2 d_4$
3142	„	3	„ ;	„	$-a_3 b_1 c_4 d_2$
3214	„	3	„ ;	„	$-a_3 b_2 c_1 d_4$
3241	„	4	„ ;	„	$+a_3 b_2 c_4 d_1$
3412	„	4	„ ;	„	$+a_3 b_4 c_1 d_2$
3421	„	5	„ ;	„	$-a_3 b_4 c_2 d_1$
4123	„	3	„ ;	„	$-a_4 b_1 c_2 d_3$
4132	„	4	„ ;	„	$+a_4 b_1 c_3 d_2$
4213	„	4	„ ;	„	$+a_4 b_2 c_1 d_3$
4231	„	5	„ ;	„	$-a_4 b_2 c_3 d_1$
4312	„	5	„ ;	„	$-a_4 b_3 c_1 d_2$
4321	„	6	„ ;	„	$+a_4 b_3 c_2 d_1$

Wie aus Vorstehendem erhellt, fehlen in allen Produkten, die mit a_1 beginnen, alle Faktoren aus der Vertikalreihe der a und der Horizontalreihe mit dem Index 1, also aus den beiden Reihen, die sich in a_1 kreuzen; in den Produkten, die mit a_2 anfangen, fehlen alle Faktoren aus den 2 Reihen, die sich in a_2 treffen u. s. w. Ferner haben diejenigen Produkte, denen a_1 und a_3 vorangeht, sowie diejenigen, die mit a_2 und a_4 anfangen, der Reihe nach bezüglich dieselben Vorzeichen. Überhaupt ist ersichtlich, daß die Produkte in je 2 aufeinanderfolgenden Aggregaten der Reihe nach entgegengesetzte Vorzeichen haben. Mit Rücksicht hierauf kann die Determinante vierter Ordnung auch auf folgende Weise in die Summe von 4 Determinanten dritter Ordnung zerlegt und ausgerechnet werden. Es ist daher auch:

$$R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_3 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=$$

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$R=\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=$$

$$-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$R=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 & d_3 \\ c_4 & a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}=$$

$$c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$R=\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ d_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=$$

$$-d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung der in 4 verschiedenen Formen dargestellten Determinante giebt jedesmal die obigen 24 Produkte. Schreiben wir dieselbe nun so, daß immer ein positives Produkt mit einem negativen abwechselt, so erhalten wir die Determinante R in folgenden 4 Ausdrücken, die aber alle identisch sind. Dieselben lauten geordnet nach den Koeffizienten:

(1) $a_1a_2a_3a_4$

$$\begin{aligned} &a_1\{b_2(c_3d_4-c_4d_3)+b_3(c_4d_2-c_2d_4)+b_4(c_2d_3-c_3d_2)\}=a_1A_1\\ +&a_2\{b_1(c_4d_3-c_3d_4)+b_3(c_1d_4-c_4d_1)+b_4(c_3d_1-c_1d_3)\}=a_2A_2\\ +&a_3\{b_1(c_2d_4-c_4d_2)+b_2(c_4d_1-c_1d_4)+b_4(c_1d_2-c_2d_1)\}=a_3A_3\\ +&a_4\{b_1(c_3d_2-c_2d_3)+b_2(c_1d_3-c_3d_1)+b_3(c_2d_1-c_1d_2)\}=a_4A_4 \end{aligned}$$

(2) $b_1 b_2 b_3 b_4$

$$\begin{aligned} & b_1\{a_2(c_4d_3-c_3d_4)+a_3(c_2d_4-c_4d_2)+a_4(c_3d_2-c_2d_3)\}=b_1B_1 \\ +& b_2\{a_1(c_3d_4-c_4d_3)+a_3(c_4d_1-c_1d_4)+a_4(c_1d_3-c_3d_1)\}=b_2B_2 \\ +& b_3\{a_1(c_4d_2-c_2d_4)+a_2(c_1d_4-c_4d_1)+a_4(c_2d_1-c_1d_2)\}=b_3B_3 \\ +& b_4\{a_1(c_2d_3-c_3d_2)+a_2(c_3d_1-c_1d_3)+a_3(c_1d_2-c_2d_1)\}=b_4B_4 \end{aligned}$$

(3) $c_1 c_2 c_3 c_4$

$$\begin{aligned} & c_1\{(a_2(b_3d_4-b_4d_3)+a_3(b_4d_2-b_2d_4)+a_4(b_2d_3-b_3d_2)\}=c_1C_1 \\ +& c_2\{(a_1(b_4d_3-b_3d_4)+a_3(b_1d_4-b_4d_1)+a_4(b_3d_1-b_1d_3)\}=c_2C_2 \\ +& c_3\{a_1(b_2d_4-b_4d_2)+a_2(b_4d_1-b_1d_4)+a_4(b_1d_2-b_2d_1)\}=c_3C_3 \\ +& c_4\{a_1(b_3d_2-b_2d_3)+a_3(b_1d_3-b_3d_1)+a_3(b_2d_1-b_1d_2)\}=c_4C_4 \end{aligned}$$

(4) $d_1 d_2 d_3 d_4$

$$\begin{aligned} & d_1\{a_2(b_4c_3-b_3c_4)+a_3(b_2c_4-b_4c_2)+a_4(b_3c_2-b_2c_3)\}=d_1D_1 \\ +& d_2\{a_1(b_3c_4-b_4c_3)+a_3(b_4c_1-b_1c_4)+a_4(b_1c_3-b_3c_1)\}=d_2D_2 \\ +& d_3\{a_1(b_4c_2-b_2c_4)+a_2(b_1c_4-b_4c_1)+a_4(b_2c_1-b_1c_2)\}=d_3D_3 \\ +& d_4\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3)b_1c_2-b_2c_1)\}=d_4D_4. \end{aligned}$$

Aus obigen 4 Gleichungen folgt:

$$x=\frac{m_1A_1+m_2A_2+m_3A_3+m_4A_4}{a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4};$$

$$y=\frac{m_1B_1+m_2B_2+m_3B_3+m_4B_4}{b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4};$$

$$z=\frac{m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3+m_4C_4}{c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+c_4C_4};$$

$$u=\frac{m_1D_1+m_2D_2+m_3D_3+m_4D_4}{d_1D_1+d_2D_2+d_3D_3+d_4D_4}.$$

(108) Aus den gegebenen Gleichungen bilden wir folgende:
(1) $20x+33y=1260$; (2) $114x+145z=9510$;
(3) $328z+385u=41496$; (4) $710u+801x=75150$.

Um diese Gl. mittels Determinanten auflösen zu können, schreiben wir sie auf folgende Weise:

(1) $20x+33y+0z+0u=1260$;
(2) $114x+0y+145z+0u=9510$;
(3) $0x+0y+328z+385u=41496$;
(4) $801x+0y+0z+710u=75150$.

Nun ist die Determinante der Koeffizienten, also

$$R=\begin{vmatrix} 20 & 33 & 0 & 0 \\ 114 & 0 & 145 & 0 \\ 0 & 0 & 328 & 385 \\ 801 & 0 & 0 & 710 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-33.114.328.710 \\ -33.801.145.385\end{matrix}\right\}=-33.71264145.$$

Die Dividenden für die Werte von x, y, z, u sind bezüglich:

$$\begin{vmatrix} 1260 & 33 & 0 & 0 \\ 9510 & 0 & 145 & 0 \\ 41496 & 0 & 328 & 385 \\ 75150 & 0 & 0 & 710 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-9510.33.328.710 \\ +41496.33.145.710 \\ -75150.33.145.385\end{matrix}\right\}=-33.2137924350.$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 1260 & 0 & 0 \\ 114 & 9510 & 145 & 0 \\ 0 & 41496 & 328 & 385 \\ 801 & 75150 & 0 & 710 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 20.9510.328.710 \\ +20.145.385.75150 \\ -20.145.41496.710 \\ -114.1260.328.710 \\ -801.1260.145.385 \end{matrix} \right\} = -33.1425282900.$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 33 & 1260 & 0 \\ 114 & 0 & 9510 & 0 \\ 0 & 0 & 41496 & 385 \\ 801 & 0 & 75150 & 710 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} -114.33.41496.710 \\ +114.33.385.75150 \\ -801.33.9510.385 \end{matrix} \right\} = -33.2993094090.$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 33 & 0 & 1260 \\ 114 & 0 & 145 & 9510 \\ 0 & 0 & 328 & 41496 \\ 801 & 0 & 0 & 75150 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} -114.33.328.75150 \\ -801.33.145.41496 \\ +801.33.9510.328 \end{matrix} \right\} = -33.5131018440.$$

Daher ist $x = \frac{-33.2137924350}{-33.71264145} = 30$;

$$y = \frac{-33.1425282900}{-33.71264145} = 20;$$

$$z = \frac{-33.2993094090}{-33.71264145} = 42;$$

$$u = \frac{-33.5131018440}{-33.71264145} = 72.$$

(109) Es ist

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 9 & -10 & -11 & 12 \\ -13 & 14 & 15 & -16 \end{vmatrix}$$

Zerlegen wir diese Determinante von 4 Elementen in 4 Unterdeterminanten von je 3 Elementen, so finden wir:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 8 \\ -10 & -11 & 12 \\ 14 & 15 & -16 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} +1056-1176 \\ +1332-1200 \\ +1120-1080 \end{matrix} \right\} = -48.$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -10 & -11 & 12 \\ 14 & 15 & -16 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} -352+504 \\ -616+600 \\ -480+360 \end{matrix} \right\} = +16.$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 6 & -7 & 8 \\ 14 & 15 & -16 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} -224+336 \\ -360+240 \\ -392+288 \end{matrix} \right\} = -112.$$

$$A_4=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -4\\ 6 & -7 & 8\\ -10 & -11 & 12\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}+168-240\\ +264-176\\ +280-216\end{matrix}\right\}=+80.$$

Nun ist $R=a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3-a_4A_4$, folglich hier $R=1.(-48)-(-5).16+9(-112)-(-13).80=+64$.

Setzen wir nun statt der Koeffizienten a_1 a_2 u. s. w. die Absolutglieder -10, $+18$, $+4$, -4, so erhalten wir den Dividend für den Wert von x. Bezeichnen wir die Dividenden für die Werte der verschiedenen Unbekannten mit Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4, so ist

$\Delta_1=(-10).(-48)-16.16+4.(-112)-(-4.80)=64.$

Folglich ist $x=64:64=1$.

Ferner ist $\Delta_2=-m_1B_1+m_2B_2-m_3B_3+m_4B_4$.

Bestimmen wir die verschiedenen B.

$$B_1=\begin{vmatrix}-5 & -7 & 8\\ 9 & -11 & 12\\ -13 & 15 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-880+1092\\ -1144+1080\\ -1008+900\end{matrix}\right\}=+40.$$

$$B_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ 9 & -11 & 12\\ -13 & 15 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}+176-468\\ +572-540\\ +432-180\end{matrix}\right\}=-8.$$

$$B_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ -5 & -7 & 8\\ -13 & 15 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}+112-312\\ +300-120\\ +364-240\end{matrix}\right\}=+104.$$

$$B_4=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ -5 & -7 & 8\\ 9 & -11 & 12\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-84+216\\ -220+88\\ -252+180\end{matrix}\right\}=-72.$$

Also ist: $\Delta_2=-(-10).40+18.(-8)-4.104+(-4).(-72)=128.$

Daher ist: $y=128:64=2$.

Es ist weiter $\Delta_3=m_1C_1-m_2C_2+m_3C_3-m_4C_4$.

$$C_1=\begin{vmatrix}-5 & 6 & 8\\ 9 & -10 & 12\\ -13 & 14 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-800+1008\\ -936+840\\ -1040+864\end{matrix}\right\}=-64.$$

$$C_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 9 & -10 & 12\\ -13 & 14 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}+160-504\\ +312-168\\ +520-288\end{matrix}\right\}=+32.$$

$$C_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ -5 & 6 & 8\\ -13 & 14 & -16\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-96+208\\ -312+280\\ -112+160\end{matrix}\right\}=+128.$$

$$C_4=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -5 & 6 & 8 \\ 9 & -10 & 12 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} +72-144 \\ +216-200 \\ +80-120 \end{Bmatrix}=-96.$$

Daher ist: $\Delta_3=(-10).(-64)-18.32+128.4-(-4).(-96)$
$=+192.$

Folglich $z=192:64=3.$

Endlich ist $\Delta_4=-m_1D_1+m_2D_2-m_3D_3+m_4D_4.$

$$D_1=\begin{vmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 9 & -10 & -11 \\ -13 & 14 & 15 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} +750-882 \\ +858-770 \\ +910-810 \end{Bmatrix}=+56.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 9 & -10 & -11 \\ -13 & 14 & 15 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} -150+378 \\ -286+154 \\ -390+270 \end{Bmatrix}=-24.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -7 \\ -13 & 14 & 15 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} +90-182 \\ +234-210 \\ +98-150 \end{Bmatrix}=-120.$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -5 & 6 & -7 \\ 9 & -10 & -11 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} -66+126 \\ -162+150 \\ -70+110 \end{Bmatrix}=+88.$$

Daher $\Delta_4=-(-10).56+18.(-24)-4.(-120)+(-4).88=256.$

Folglich $u=256:64=4.$

33. α) Die Koeffizienten-Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ h & 0 & 0 & g \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man nach der ersten Kolumne, so erhält man sogleich

$$D=aceg-hbdf.$$

Man erhält somit

$$x=\frac{lceg-mbeg+nbdg-rbdf}{D}.$$

$$y=\frac{-lhdf-maeg-nadg+padf}{D}.$$

$$z=\frac{lhcf-mhbf+nacg-pacf}{D}.$$

$$u=\frac{-lhce+mhbe-nhbd+pace}{D}.$$

β) Die Determinante der Koeffizienten ist:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -7 \\ -1 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man diese nach der ersten Kolumne, so erhält man:

$$5.245+5.45-47=1403.$$

Es ist also:

$$x=\frac{245+17.58-39.45+41.47}{1403}=1.$$

$$y=\frac{-43+17.7-39.78+41.175}{1403}=3.$$

$$z=\frac{49-17.269-39.9+41.290}{1403}=5.$$

$$u=\frac{182+17.3+39.167+41.75}{1403}=7.$$

γ) Die Koeffizienten-Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man nach den Elementen der ersten Kolumne, so erhält man $4+4+4+4=16$.

Man erhält:

$$x=\frac{4a+4b+4c+4d}{16}=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

$$y=\frac{4a-4b+4c-4d}{16}=\frac{a-b+c-d}{4}.$$

$$z=\frac{4a+4b-4c-4d}{16}=\frac{a+b-c-d}{4}.$$

$$u=\frac{4a-4b-4c+4d}{16}=\frac{a-b-c+d}{4}.$$

34. Die Unterdeterminanten zu den Elementen der betreffenden Zeile (oder Kolumne) seien P_1, P_2, $P_3 \ldots\ldots P_n$. Die betr. Zeile (oder Kolumne) sei:

$a_1+a_2+\ldots\ldots a_s$, $b_1+b_2+\ldots\ldots b_s$, $\ldots\ldots r_1+r_2+\ldots\ldots r_s$.

Entwickelt man die Determinante nach derselben, so erhält man eine Summe von s Determinanten nten Grades, nämlich:

$$\begin{array}{l} a_1P_1+b_1P_2+\ldots\ldots+r_1P_n \\ +a_2P_1+b_2P_2+\ldots\ldots+r_2P_n \\ \vdots \\ +a_sP_1+b_sP_2+\ldots\ldots+r_sP_n. \end{array}$$

35. α) Man erhält nach Nr. 34:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & b_1 & c_1 \\ \gamma_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

β) Unter Anwendung von Nr. 34, 22 und 20 erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

da die beiden andern Determinanten Null sind wegen der Uebereinstimmung zweier Kolumnen.

36. Die ursprüngliche Determinante sei D_1, die veränderte D_2, dann soll $D_1=D_2$ sein. Zerlegt man D_2 nach Nr. 34 in zwei Determinanten desselben Grades, so wird eine derselben D_1, die andere enthält eine Kolumne (oder Zeile), deren sämtliche Elemente mit demselben Faktor multipliziert sind. Dieser tritt (nach Nr. 20) als gemeinsamer Faktor vor die Determinante. Diese selbst enthält dann zwei gleiche Kolumnen (oder Zeilen) und ist daher (nach Nr. 22) gleich Null, somit ist $D_2=D_1$.

37. α) Von den Elementen der ersten Kolumne zieht man die entsprechenden der vierten ab, nachdem jedes Element derselben mit 2 multipliziert worden ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 13 & 17 & 4 \\ 2 & 28 & 33 & 8 \\ 4 & 40 & 54 & 13 \\ 2 & 37 & 16 & 11 \end{vmatrix}.$$

Jetzt werden von der

II. Kolumne die Elemente der ersten 13fach genommen abgezogen,
III. „ „ „ „ „ 17fach „ „ ,
IV. „ „ „ „ „ 4fach „ „ ,

so kommt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -12 & -14 & -3 \\ 2 & 11 & -18 & 3 \end{vmatrix}.$$

Man entwickelt nach den Elementen der ersten Zeile und hat nur eine Determinante des dritten Grades zu bilden; diese giebt den Wert -195.

β) Man multipliziert die Elemente der ersten Kolumne mit a und zieht dieselben der Reihe nach von den Elementen der zweiten Kolumne ab. Dann multipliziert man die Elemente der ersten Kolumne mit a^2 und zieht dieselben der

Reihe nach von den Elementen der dritten Kolumne ab. Man erhält:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)=(b-a)(c-a)(c-b).$$

38. Auflösung des Systems §. 65 a. 113 β).

Die Koeffizienten-Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Man entwickelt am besten nach den Elementen der ersten Kolumne und erhält die Determinante

$$\Delta = A_1 - A_2 + A_3 + A_4,$$

wenn:

$$bc^2d^3+b^2c^3d+b^3cd^2-b^3c^2d-bc^3d^2-b^2cd^3=A_1$$
$$ac^2d^3+a^2c^3d+a^3cd^2-a^3c^2d-ac^3d^2-a^2cd^3=A_2$$
$$ab^2d^3+a^2b^3d+a^3bd^2-a^3b^2d-ab^3d^2-a^2bd^3=A_3$$
$$ab^2c^3+a^2b^3c+a^3bc^2-a^3b^2c-ab^3c^2-a^2bc^3=A_4,$$

wenn ebenso:

$$c^2d^3+b^2c^3+b^3d^2-b^3c^2-c^3d^2-b^2d^3=B_1$$
$$c^2d^3+a^2c^3+a^3d^2-a^3c^2-c^3d^2-a^2d^3=B_2$$
$$b^2d^3+a^2b^3+a^3d^2-a^3b^2-b^3d^2-a^2d^3=B_3$$
$$b^2c^3+a^2b^3+a^3c^2-a^3b^2-b^3c^2-a^2c^3=B_4$$

und ebenso:

$$cd^3+bc^3+b^3d-b^3c-c^3d-bd^3=C_1$$
$$cd^3+ac^3+a^3d-a^3c-c^3d-ad^3=C_2$$
$$bd^3+ab^3+a^3d-a^3b-b^3d-ad^3=C_3$$
$$bc^3+ab^3+a^3c-a^3b-b^3c-ac^3=C_4$$

und ebenso:

$$cd^2+bc^2+b^2d-b^2c-c^2d-bd^2=D_1$$
$$cd^2+ac^2+a^2d-a^2c-c^2d-ad^2=D_2$$
$$bd^2+ab^2+a^2d-a^2b-b^2d-ad^2=D_3$$
$$bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-b^2c-ac^2=D_4,$$

so ist sogleich:

$$x=\frac{mA_1-nA_2+oA_3+pA_4}{\Delta}$$

$$y=\frac{-mB_1+nB_2-oB_3+pB_4}{\Delta}$$

$$z=\frac{mC_1-nC_2+oC_3-pC_4}{\Delta}$$

$$\mu=\frac{-mD_1+nD_2-oD_3+pD_4}{\Delta}.$$

39. Der Satz wird deutlich an dem Beispiel von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, bei denen die Absolutglieder Null sind, und kann sogleich auf ein System von n Gleichungen übertragen werden.

$$(1)\quad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0\\ a_2x+b_2y+c_2z&=0\\ a_3x+b_3y+c_3z&=0. \end{aligned}$$

Man dividiere jede Gleichung durch z und setze $\frac{x}{z}=u$; $\frac{y}{z}=v$, so geht (1) über in

$$(2)\quad \begin{aligned} a_1u+b_1v+c_1&=0\\ a_2u+b_2v+c_2&=0\\ a_3u+b_3v+c_3&=0. \end{aligned}$$

Die Unterdeterminanten zu den Elementen in (1) seien mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet. Die beiden ersten Gleichungen in (2) ergeben:

$$u=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{A_3}{C_3}$$

$$v=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{-B_3}{C_3}.$$

Setzt man diese Werte von u und v in die dritte Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$a_3A_3-b_3B_3+c_3C_3=0,$$

d. h. die Determinante des Systems der Koeffizienten in (1) muß Null sein, wenn nicht $x=y=z=0$ sein soll.

Es verhält sich:

$$u:v:1=\frac{A_3}{C_3}:\frac{-B_3}{C_3}:1 \text{ oder}$$

$$x:y:z=A_3:-B_3:C_3.$$

40. Die Determinante, welche Null sein muß, ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & -1\\ c & -1 & b\\ -1 & c & a \end{vmatrix}=0.$$

Wird dieselbe entwickelt, so entsteht die Gleichung:

$$a^2+b^2+c^2+2abc=1.$$

Außerdem erhält man, wie in Nr. 39:

$$x:y:z=b^2-1:-(ab+c):(-a-bc).$$

41. α) Die Determinante der Koeffizienten ist:

$$\begin{vmatrix} a & b\\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & 1\\ a & b \end{vmatrix}=ab(b-a).$$

Dieses Produkt muß Null sein. Da nicht $a=b=0$ sein kann, so muß $a=b$ sein. Es ist $x:y=-b:a$.

β) Die Determinante, die Null sein muß, ist:

$$abc\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=abc\{(bc^2-b^2c)-(ac^2-a^2c)+(ab^2-a^2b)\}$$
$$=abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Soll dieses Produkt Null sein, so muß entweder $a=b$ oder $a=c$ oder $b=c$ sein.

$$x:y:z=bc^2-b^2c:a^2c-ac^2:ab^2-a^2b.$$

Nimmt man $a=b$, so erhält man: $x:y:z=1:-1:0$.

42. In der Auflösung zu Nr. 39 war das System (2) ein System von 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten. Damit dieses zusammen bestehen konnte, mußte die Determinante Null sein. Es muß also auch hier die Determinante Null sein, wenn u und v in den drei Gleichungen dieselben Werte haben sollen. Die Determinante ist:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -5\\ 3 & -2 & -37\\ 5 & 6 & -42\end{vmatrix}=84-555-90-50+222+378=-11.$$

Die drei Gleichungen können nicht zusammen bestehen.

Wir fügen hier die Auflösungen noch einiger Gleichungen mittels Determinanten aus Heis, Sammlung §. 65a an.

(22)
$$x=\begin{vmatrix}p & n\\ t & s\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}m & n\\ r & s\end{vmatrix}=(ps-nt):(ms-nr).$$

$$y=\begin{vmatrix}m & p\\ r & t\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}m & n\\ r & s\end{vmatrix}=(mt-pr):(ms-nr).$$

(28) Entwickelt und ordnet man die beiden Gleichungen, so erhält man:

(1) $(a+b)x+by=a(a+b)$,

(2) $-ax+(a-b)y=b(a-b)$.

Es ist daher:

$$x=\begin{vmatrix}a(a+b) & b\\ b(a-b) & (a-b)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}(a+b) & b\\ -a & (a-b)\end{vmatrix}=$$
$$\frac{a(a+b)(a-b)-b^2(a-b)}{(a+b)(a-b)+ab}=a-b.$$

$$y=\begin{vmatrix}(a+b) & a(a+b)\\ -a & b(a-b)\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}(a+b) & b\\ -a & (a-b)\end{vmatrix}=$$
$$\frac{b(a+b)(a-b)+a^2(a+b)}{(a+b)(a-b)+ab}=a+b.$$

(30) Die Determinanten für den Nenner und die beiden Zähler der Werte der Unbekannten x und y sind:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}.\frac{1}{n} - \frac{1}{b}.\frac{1}{m} = -\frac{an+bm}{abmn}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{p} & -\frac{1}{n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{c}.\frac{1}{n} - \frac{1}{b}.\frac{1}{p} = -\frac{bp+cn}{bcnp}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}.\frac{1}{p} - \frac{1}{c}.\frac{1}{m} = \frac{ap-cm}{acmp}$$; daher ist

$$x = \left\{-\frac{bp+cn}{bcnp}\right\} : \left\{-\frac{an+bm}{abmn}\right\} = \frac{am(bp+cn)}{cp(an+bm)}.$$

$$y = \left\{-\frac{ap-cm}{acmp}\right\} : \left\{-\frac{an+bm}{abmn}\right\} = \frac{bn(ap-cm)}{cp(an+bm)}.$$

(53) $$x = \begin{vmatrix} 6ac & -(a-2b) \\ 4ab & (a+3c) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a+2b) & -(a-2b) \\ -(a-3c) & (a+3c) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{6ac(a+3c)+4ab(a-2b)}{(a+2b)(a+3c)-(a-2b)(a-3c)}$$

$$= \frac{6a^2c+18ac^2+4a^2b-8ab^2}{6ac+4ab} = a-2b+3c.$$

$$y = \begin{vmatrix} (a+2b) & 6ac \\ -(a-3c) & 4ab \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a+2b) & -(a-2b) \\ -(a-3c) & (a+3c) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4ab(a+2b)+6ac(a-3c)}{(a+2b)(a+3c)-(a-2b)(a-3c)}$$

$$= \frac{4a^2b+8ab^2+6a^2c-18ac^2}{4ab+6ac} = a+2b-3c.$$

(61) Die erste der gegebenen Gleichungen läßt sich umformen in

(3) $236x - 301y = -1991.$

Daher ist

$$x = \begin{vmatrix} -1991 & -301 \\ 22 & -4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 236 & -301 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1991.4+301.22}{-236.4+301.5} = 26.$$

$$y = \begin{vmatrix} 236 & -1991 \\ 5 & 22 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 236 & -301 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{236.22+1991.5}{-236.4+301.5} = 27.$$

(64) Die gegebenen Gleichungen verwandeln sich in folgende:

(3) $15x+4y=42$; (4) $-51x+19y=-45.$

Daher ist

$$x=\begin{vmatrix} 42 & 4 \\ -45 & 19 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 15 & 4 \\ -51 & 19 \end{vmatrix} =(42.19+4.45):(15.19+4.51)=2.$$

$$y=\begin{vmatrix} 15 & 42 \\ -51 & -45 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 15 & 4 \\ -51 & 19 \end{vmatrix}$$

$$=(-15.45+51.42):(15.19+4.51)=3.$$

(77)

$$\begin{aligned} &(1)\ x+2y+0z=23 \\ &(2)\ 3x+0y+4z=57 \\ &(3)\ 0x+5y+6z=94. \end{aligned}$$

$$R=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} =-1.4.5-2.3.6.$$

$$x=\begin{vmatrix} 23 & 2 & 0 \\ 57 & 0 & 4 \\ 94 & 5 & 6 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \frac{+2.4.94-23.4.5-2.6.57}{-1.4.5-2.3.6}=7.$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 23 & 0 \\ 3 & 57 & 4 \\ 0 & 94 & 6 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \frac{+1.6.57-1.4.94-23.3.6}{-1.4.5-2.3.6}=8.$$

$$z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 3 & 0 & 57 \\ 0 & 5 & 94 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \frac{+23.3.5-1.57.5-2.3.94}{-1.4.5-2.3.6}=9.$$

(88)

$$R=\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{7.9}-\frac{1}{5^2}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5.9}-\frac{1}{7^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5.7}-\frac{1}{9^2}\right) \text{ oder} \\ \frac{-38.7^2.9^2+4.5^2.9^2+46.5^2.7^2}{5^3.7^3.9^3}=-\frac{86372}{5^3.7^3.9^3}. \end{cases}$$

Die Zähler der Werte für x, y, z sind bezüglich folgende:

$$\begin{vmatrix} 258 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ 304 & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} \\ 296 & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} 258.\left(\frac{1}{7.9}-\frac{1}{5^2}\right)+304.\left(\frac{1}{5.9}-\frac{1}{7^2}\right)+296.\left(\frac{1}{5.7}-\frac{1}{9^2}\right) \text{ oder} \\ \frac{-258.38.7.9+304.4.5.9+296.46.5.7}{5^2.7^2.9^2}=-\frac{86372}{5^2.7^2.9^2}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 258 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{7} & 304 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{9} & 296 & \frac{1}{7} \end{vmatrix} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}258.\left(\frac{1}{5.9}-\frac{1}{7^2}\right)+304.\left(\frac{1}{5.7}-\frac{1}{9^2}\right)+296.\left(\frac{1}{7.9}-\frac{1}{5^2}\right) \text{ oder} \\ \frac{258.4.5.9+304.46.5.7-296.38.7.9}{5^2.7^2.9^2}=\frac{2.86372}{5^2.7^2.9^2}.\end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 258 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 304 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & 296 \end{vmatrix}=$$

$$\left\{\begin{array}{l}258.\left(\frac{1}{5.7}-\frac{1}{9^2}\right)+304.\left(\frac{1}{7.9}-\frac{1}{5^2}\right)+296.\left(\frac{1}{5.9}-\frac{1}{7^2}\right) \text{ oder} \\ \frac{258.46.5.7-304.38.7.9+296.4.5.9}{5^2.7^2.9^2}=\frac{3.86372}{5^2.7^2.9^2}.\end{array}\right.$$

Daher ist:

$$x=\left\{\frac{86372}{5^2.7^2.9^2}\right\}:\left\{\frac{86372}{5^3.7^3.9^3}\right\}=1.5.7.9=315$$

$$y=\left\{\frac{2.86372}{5^2.7^2.9^2}\right\}:\left\{\frac{86372}{5^3.7^3.9^3}\right\}=2.5.7.9=620$$

$$z=\left\{\frac{3.86372}{5^2.7^2.9^2}\right\}:\left\{\frac{86372}{5^3.7^3.9^3}\right\}=3.5.7.9=945.$$

(94 α) Die gegebenen Gleichungen werden geschrieben:

(1) $(c+a)x-(c-a)y+0z=2bc$,

(2) $0x+(a+b)y-(a-b)z=2ac$,

(3) $-(b-c)x+0y+(b+z)z=2ab$.

Dann ist die Koeffizienten-Determinante:

$$R=\begin{vmatrix} (c+a) & -(c-a) & 0 \\ 0 & (a+b) & -(a-b) \\ -(b-c) & 0 & (b+c) \end{vmatrix} \begin{array}{l}=(c+a)(a+b)(b+c)- \\ \quad (c-a)(a-b)(b-c) \\ =2(b^2c+ac^2+a^2b+abc).\end{array}$$

Daher ist:

$$x=\begin{vmatrix} 2bc & -(c-a) & 0 \\ 2ac & (a+b) & -(a-b) \\ 2ab & 0 & (b+c) \end{vmatrix}:R=$$

$$\frac{2(b^3c+2abc^2+a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2+ac^3-a^3b}{2(b^2c+ac^2+a^2b+abc)}=b+c+a.$$

$$y=\begin{vmatrix} (c+a) & 2bc & 0 \\ 0 & 2ac & -(a-b) \\ -(b-c) & 2ab & (b+c) \end{vmatrix}:R=$$

$$\frac{2(a^2c^2+2a^2bc+a^3b+ac^3-b^3c+b^2c^2-a^2b^2}{2(ac^2+b^2c+a^2b+abc)}=a+c-b.$$

$$z=\begin{vmatrix} (c+a) & -(c-a) & 2bc \\ 0 & (a+b) & 2ac \\ -(b-c) & 0 & 2ab \end{vmatrix}:R=$$

$$\frac{2(a^3b+a^2c^2+2ab^2c+a^2b^2+b^3c-ac^3-b^2c^2}{2(a^2b+ac^2+b^2c+abc)}=a+b-c.$$

(101 α) Die Koeffizienten-Determinante ist:

$$R=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 \\ -8 & 9 & 10 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} -120+180 \\ -168+126 \\ -192+150 \end{Bmatrix}=-24.$$

Daher ist:

$$\frac{1}{x}=\begin{vmatrix} 2,9 & -3 & 4 \\ -10,4 & -6 & -7 \\ 14,9 & 9 & 10 \end{vmatrix}:R=\begin{Bmatrix} -174+312,9 \\ -374,4+357,6 \\ -312+182,7 \end{Bmatrix}:R=$$

$$\frac{-7,2}{-24}=+0,3;\quad x=\tfrac{10}{3}=3\tfrac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{y}=\begin{vmatrix} 2 & 2,9 & 4 \\ 5 & -10,4 & -7 \\ -8 & 14,9 & 10 \end{vmatrix}:R=\begin{Bmatrix} -208+162,4 \\ -332,8+298 \\ -145+208 \end{Bmatrix}:R=$$

$$\frac{-16,8}{-24}=+0,7;\quad y=\tfrac{10}{7}=1\tfrac{3}{7}.$$

$$\frac{1}{z}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2,9 \\ 5 & -6 & -10,4 \\ -8 & 9 & 14,9 \end{vmatrix}:R=\begin{Bmatrix} -178,8+130,5 \\ -249,6+187,2 \\ -139,2+223,5 \end{Bmatrix}:R=$$

$$\frac{-26,4}{-24}=+1,1;\quad z=\tfrac{10}{11}.$$

(110) Multipliziert man alle 4 Gleichungen mit 100 und formt sie um, so wird:

(1) $12x-23y+34z+0u=207,1$
(2) $0x+45y-56z+67u=-804,4$
(3) $87x+0y+78z-89u=956$
(4) $-43x+21y+0z+65u=-488,1.$

Also ist:

$$R=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 34 & 0 \\ 0 & 45 & -56 & 67 \\ 87 & 0 & 78 & -89 \\ -43 & 21 & 0 & 65 \end{vmatrix}$$

$$A_1=\begin{vmatrix} 45 & -56 & 67 \\ 0 & 78 & -89 \\ 21 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} +228150 \\ +104664 \\ -109746 \end{Bmatrix}=+223068.$$

$$A_2=\begin{vmatrix} -23 & 34 & 0 \\ 0 & 78 & -89 \\ 21 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} -116610 \\ -63546 \end{Bmatrix}=-180156.$$

$$A_3=\begin{vmatrix} -23 & 34 & 0 \\ 45 & -56 & 67 \\ 21 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} +83720 \\ +47838 \\ -99450 \end{matrix}\right\}=+32108.$$

$$A_4=\begin{vmatrix} -23 & 34 & 0 \\ 45 & -56 & 67 \\ 0 & 78 & -89 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} -114632 \\ +120198 \\ +136170 \end{matrix}\right\}=+141736.$$

$R=12.223068+87.32108-(43).141736=11564860.$

$\Delta_1=207,1.223068-(-804,4).(-180156)+$
$956.32108-(-488,1).141736=1156486.$

Also $x=1156486:11564860=0,1.$

$$B_1=\begin{vmatrix} 0 & -56 & 67 \\ 87 & 78 & -89 \\ -43 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} -214312 \\ +316680 \\ +224718 \end{matrix}\right\}=+327086.$$

$$B_2\begin{vmatrix} 12 & 34 & 0 \\ 87 & 78 & -89 \\ -43 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} +60840 \\ +130118 \\ -192270 \end{matrix}\right\}=-1312.$$

$$B_3=\begin{vmatrix} 12 & 34 & 0 \\ 0 & -56 & 67 \\ -43 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} -43680 \\ -97954 \end{matrix}\right\}=-141634.$$

$$B_4=\begin{vmatrix} 12 & 34 & 0 \\ 0 & -56 & 67 \\ 87 & 78 & -89 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} +59808 \\ +198186 \\ -62712 \end{matrix}\right\}=+195282.$$

$\Delta_2=-207,1.327086+(-804,4).(-1312)-956.(-141634)$
$+(-488,1).195282=-26599178$; daher
$y=-26599178:11564860=-2,3.$

$$C_1=\begin{vmatrix} 0 & 45 & 67 \\ 87 & 0 & -89 \\ -43 & 21 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} +172215 \\ +122409 \\ -254475 \end{matrix}\right\}=+40149.$$

$$C_2=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 0 \\ 87 & 0 & -89 \\ -43 & 21 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} -88021 \\ +22428 \\ +130065 \end{matrix}\right\}=+64472.$$

$$C_3=\begin{vmatrix} 12 & 34 & 0 \\ 0 & -56 & 67 \\ -43 & 0 & 65 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} +35100 \\ +66263 \\ -16884 \end{matrix}\right\}=+84479.$$

$$C_4=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 0 \\ 0 & 45 & 67 \\ 87 & 0 & -89 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} -48060 \\ -134067 \end{matrix}\right\}=-182127.$$

$\Delta_3=207{,}1.40149-(-804{,}4).64472$
$+956.84479-(-488{,}1).(-182127)=52041870$; folglich
$z=52041870:11564860=4{,}5.$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 45 & -56 \\ 87 & 0 & 78 \\ -43 & 21 & 0 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} -150930 \\ -102312 \end{Bmatrix}=-253242.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 34 \\ 87 & 0 & 78 \\ -43 & 21 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} +77142 \\ +62118 \\ -19656 \end{vmatrix}=+119604.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 34 \\ 0 & 45 & -56 \\ -43 & 21 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -55384 \\ +65790 \\ +14112 \end{vmatrix}=+24518.$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 12 & -23 & 34 \\ 0 & 45 & -56 \\ 87 & 0 & 78 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} +42120 \\ +112056 \\ -133110 \end{vmatrix}=+21066.$$

$\Delta_4=-207{,}1.(-253242)+(-804{,}4).119604-956.24518$
$+(-488{,}1).21066=-77484562$; folglich
$u=-77484562:11564860=-6{,}7.$

(111 α)
$$R=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} \end{vmatrix}$$

$A_1=\frac{256}{7.9^2.11^3.13^2.15}$; $A_2=\frac{-768}{5.7.9^2.11^2.13^2.15}$;

$A_3=\frac{768}{5.7^2.9^2.11^2.13.15}$; $A_4=\frac{-256}{5.7^2.9^3.11^2.13}$; daher

$R=\frac{3.196608}{3.5^2.7^3.9^4.11^3.13^2.15}$

$\Delta_1=\frac{196608}{5.7^2.9^3.11^3.13^2.15}$; folglich

$x=\frac{196608}{5.7^2.9^3.11^3.13^2.15}:\frac{3.196608}{3.5^2.7^3.9^4.11^3.13^2.15}$
$=5.7.9=315.$

$B_1=\frac{-768}{5.7.9^2.11^2.13^2.15}$; $B_2=\frac{2304}{3.7^2.9^2.11.13^2.15}$;

$B_3=\frac{-2304}{3.5.7.9^3.11.13.15}$; $B_4=\frac{768}{3.5.7^2.9^2.11^2.13}$; daher

$\Delta_2=\frac{589424}{3.5.7^2.9^3.11^2.13^2.15}$; folglich

$$y=\frac{589824}{3.5.7^2.9^3.11^2.13^2.15}:\frac{589824}{3.5^2.7^3.9^4.11^3.13^2.15}$$
$$=5.7.9.11=3465.$$

$$C_1=\frac{768}{5.7^2.9^2.11^2.13.15};\ C_2=\frac{-2304}{3.5.7.9^3.11.13.15};$$

$$C_3=\frac{2304}{3.5^2.7.9^2.11^2.15};\ C_4=\frac{-768}{3.5^2.7^2.9^2.11.13};\ \text{daher}$$

$$\varDelta_3=\frac{589824}{3.5^2.7^2.9^3.11^2.13.15};\ \text{folglich}$$

$$z=\frac{589824}{3.5^2.7^2.9^3.11^2.13.15}:\frac{589824}{3.5^2.7^3.9^4.11^3.13^2.15}$$
$$=7.9.11.13=9009.$$

$$D_1=\frac{-256}{5.7^2.9^3.11^2.13};\ D_2=\frac{768}{3.5.7^2.9^2.11^2.13};$$

$$D_3=\frac{-768}{3.5^2.7^2.9^2.11.13};\ D_4=\frac{256}{3.5^2.7^3.9^2.11};\ \text{daher}$$

$$\varDelta_4=\frac{196608}{3.5^2.7^3.9^3.11^2.13};\ \text{folglich}$$

$$u=\frac{196608}{3.5^2.7^3.9^3.11^2.13}:\frac{3.196608}{3.5^2.7^3.9^4.11^3.13^2.15}$$
$$=5.9.11.13=6435.$$

---

4. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 67.

§. 388. 1. α) Die größere der beiden Zahlen sei x, die kleinere y, so ist:

(1) $x+y=857142$; (2) $x-y=571428$,
folglich $x=714285$ und $y=142857$.

Zweite Auflösung. Heißt der eine Summand x, so heißt der andere, der um 571428 größer ist, $x+571428$, also sind beide Summanden zusammen $2x+571428$. Es ist also $2x+571428=857142$; folglich $x=142857$ und der andere Summand $142857+571428=714285$.

β) Arithmetische Auflösung. Nach §. 42 ist die Summe zweier ungleichen Zahlen, vermehrt um ihre Differenz, dem Zweifachen der größeren Zahl gleich. Ist nun die Summe zweier solchen Zahlen$=67\frac{3}{4}$ und ihre Differenz$=25\frac{5}{6}$, so ist die größere Zahl$=\frac{1}{2}(67\frac{3}{4}+25\frac{5}{6})=46\frac{19}{24}$; daher die kleinere: $67\frac{3}{4}-46\frac{19}{24}=20\frac{23}{24}$.

2. Haben x Personen für und y Personen gegen den Vorschlag gestimmt, so ist:

$$(1)\ x+y=48;\ (2)\ x-y=18.$$

Hieraus folgt: x=33 und y=15.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wurde der Vorschlag mit einer Stimmenmehrheit von 18 Personen angenommen, so hatten $\frac{1}{2}(48-18)=15$ Personen dagegen gestimmt, also 15+18=33 dafür.

3. Legt der Schall allein x *m* und der Wind ebenfalls allein y *m* in einer Stunde zurück, so ist:

$$(1)\ x+y=344{,}42;\ (2)\ x-y=335{,}94;$$

folglich x=340,18 *m* und y=4,24 *m*.

4. α) Die telegraphische Nachricht werde von Berlin nach Köln in x Minuten gebracht und die Berliner und Kölner Uhren seien um y Minuten von einander verschieden, so ist, da die erste Mitteilung 61 Minuten, die zweite nur 9 Minuten gebrauchte, die Geschwindigkeit aber dieselbe sein soll,

$$(1)\ x+y=61;\ (2)\ x-y=9,$$

folglich x=35 und y=26 Minuten ging die Berliner Uhr vor der Kölner Uhr.

β) Hier ist (1) x+y=33 und (2) x—y=—19; folglich x=7, y=26. Die telegraphische Nachricht wurde also in 7 Minuten mitgeteilt.

5. Bezeichnet man die Entfernung der Venus von der Sonne durch x und die der Erde von der Sonne durch y Meilen, so ist, da beide Planeten um die Sonne als Mittelpunkt eine kreisförmige Bewegung machen, ihre größte Entfernung gleich dem Halbmesser dieser centralen Bewegung der Erde um die Sonne, also y Meilen + dem Halbmesser der centralen Bewegung der Venus um die Sonne, also x Meilen und ihre kleinste Entfernung ist der Differenz dieser Halbmesser gleich. Da überdies die Venus der Sonne näher steht als die Erde, so ist also:

$$(1)\ x+y=34403000;\ (2)\ y-x=5523000;$$

folglich y=19963000 und x=14440000 geographische Meilen.

6. Wurde das 20-Francstück zu x und der Dukaten zu y *M* gerechnet, so ist:

$$x-(y+2{,}20)=4{,}60 \text{ oder } (1)\ x-y=6{,}80 \text{ und}$$

$$y+x-0{,}40=25{,}50 \text{ oder } (2)\ x+y=25{,}90.$$

Also x=16,35 *M* und y=9,55 *M*.

7. Die Mutter habe x Pfund und das Söhnlein y Pfund getragen. Gab die Mutter 1 Pfund ab, so behielt sie noch x—1 Pfund, und das Söhnlein erhielt auf diese Weise y+1 Pfund. Hierdurch wurde die Bürde des letzteren doppelt so schwer, als die der Mutter. Es ist daher

$$2(x-1)=y+1, \text{ oder } (1)\ 2x-y=3.$$

Nimmt hingegen die Mutter 1 Pfund vom Söhnlein, so haben sie gleich viel zu tragen; in diesem Falle ist

$$y-1=x+1, \text{ oder } (2)\ y-x=2:$$

folglich $x=5$ und $y=7$ Pfund.

Zweite Auflösung. Die Mutter habe x Pfund. Giebt sie 1 Pfund ab, so hat sie noch $x-1$ Pfund und da das Söhnlein jetzt eine doppelt so große Bürde hat, als die Mutter, so hat es $2(x-1)$ Pfund. Hierin ist aber 1 Pfund mehr enthalten, als es anfangs hatte, folglich hatte es $2(x-1)-1$ Pfund $=2x-3$ Pfund. Giebt es nun der Mutter 1 Pfund ab, so hat es $(2x-3)-1=2x-4$ Pfund und die Mutter hat $x+1$ Pfund. Da nun beide gleich viel tragen, so ist:

$$2x-4=x+1;$$

folglich $x=5$ Pfund trug die Mutter und $2\times5-3=7$ Pfund das Söhnlein.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Giebt der Sohn seiner Mutter 1 Pfund, so haben beide gleich viel; folglich muß der Sohn 2 Pfund mehr tragen als seine Mutter. Giebt nun die Mutter dem Sohne 1 Pfund, so ist die Bürde des Sohnes doppelt so groß; in diesem Falle hat der Sohn dann 4 Pfund mehr, als die Mutter. Diese 4 Pfund sind die Hälfte von dem, was er jetzt hat; folglich trägt seine Mutter 4 Pfund und er 8 Pfund. Vor der Abgabe des 1 Pfundes von seiten der Mutter hatte sie demnach 5 und der Sohn 7 Pfund.

8. Der Knabe A habe x Nüsse und B y Nüsse. Giebt B an A 5 Nüsse, so hat jener noch $y-5$ und dieser $x+5$. Hierdurch hat A 3mal so viel Nüsse als B; daher ist:

$$3(y-5)=x+5, \text{ oder } (1)\ 3y-x=20.$$

Erhält hingegen B 2 Nüsse von A, so hat B $y+2$ und jener $x-2$ Nüsse. Auf diese Weise hat aber B 5mal so viel als A; folglich ist

$$5(x-2)=y+2, \text{ oder } (2)\ 5x-y=12.$$

Aus (1) und (2) folgt $x=4$ und $y=8$ Nüsse.

Zweite Auflösung. Hat der erste x Nüsse und erhält vom zweiten 5, so hat er $x+5$. Dieses ist das dreifache dessen, was der zweite jetzt hat, also hatte er vor seiner Abgabe $\frac{1}{3}(x+5)+5=\frac{1}{3}(x+20)$ Nüsse. Giebt der erste 2 Nüsse ab, so hat er noch $x-2$ und der zweite $\frac{1}{3}(x+20)+2=\frac{1}{3}(x+26)$ und da er nun 5mal so viel hat, als der erste, so ist $\frac{1}{3}(x+26)=5(x-2)$; folglich $x=4$ Nüsse hat der erste und $\frac{1}{3}(4+20)=8$ Nüsse der zweite.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Giebt B dem A 5 Nüsse, so hat A 3mal soviel als B. Dieser behält aber seine 5 Nüsse und bekommt von A noch 2 dazu, hat also

7 Nüsse mehr. Sollte nun A noch 3mal so viel haben, so hätte er $3 \times 7 = 21$ dazu erhalten müssen; statt dessen aber giebt er dem A die 7 Nüsse, welches einen Unterschied von $21 + 7 = 28$ Nüssen ausmacht. Dadurch behält A auch statt 3mal nur $\frac{1}{5}$mal dessen Nüsse. $3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5}$mal dasselbe muß also 28 sein, folglich $\frac{1}{5} = 2$, und das Ganze oder Einmalige $5 \times 2 = 10$. Anfangs hatte B also $10 - 2 = 8$ Nüsse. Gab er an A 5 Nüsse, so behielt er noch 3. Dadurch erhielt A das 3fache, mußte also in diesem Falle 9 Nüsse haben; folglich hatte er anfangs $9 - 5 = 4$ Nüsse.

Nimmt man die allgemeinen Zahlzeichen, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(1)\ ny - x = a(n+1);\ (2)\ px - y = b(p+1);$$

$$x = \frac{a(n+1) + bn(p+1)}{np - 1};\ y = \frac{b(p+1) + ap(n+1)}{np - 1}.$$

9. Der eine Becher sei ohne Deckel x ℳ und der andere y ℳ wert. Setzt man den Deckel auf den ersten, so ist dieser $x + 30$ ℳ wert. Da er nun noch einmal so viel wert ist, als der zweite, so ist:

$$2y = x + 30, \text{ oder } (1)\ 2y - x = 30.$$

Setzt man aber den Deckel auf den zweiten Becher, so ist dieser $y + 30$ ℳ wert, und weil dieser Wert das $1\frac{1}{3}$fache des Wertes des ersten ist, so hat man:

$$1\tfrac{1}{3}x = y + 30, \text{ oder } (2)\ 4x - 3y = 90.$$

folglich $x = 54$ und $y = 42$ ℳ.

Zweite Auflösung. Ist der Becher x ℳ wert, so ist er mit dem Deckel $x + 30$ ℳ wert. Da dies der doppelte Wert des zweiten Bechers ist, so ist dieser $\frac{1}{2}(x + 30)$ ℳ wert. Setzt man jetzt den Deckel auf diesen, so ist derselbe $\frac{1}{2}(x + 30) + 30$ ℳ wert, und da er auf diese Weise $1\frac{1}{3}$mal so viel wert ist, als jener, so ist:

$$1\tfrac{1}{3}x = \tfrac{1}{2}(x + 30) + 30;$$

folglich $x = 54$ ℳ der eine, und $\frac{1}{2}(54 + 30) = 42$ ℳ der andere Becher.

Dritte Auflösung. Bezeichnet man den ersten Becher mit B′, den zweiten mit B″ und den Deckel mit D, so ist nach der Aufgabe

(1) $B' + D : B'' = 2 : 1$ und (2) $B'' + D : B' = \frac{4}{3} : 1$.

Aus (1) folgt nach §. 226:

(3) $B' + B'' + D : B'' = 3 : 1$ und aus (2)

(4) $B' + B'' + D : B' = \frac{7}{3} : 1$. Aus (3) und (4) ergiebt sich $B' + B'' + D = 3B''$ und $B' + B'' + D = \frac{7}{3}B'$. Es ist daher auch $\frac{7}{3}B' = 3B''$; folglich $B' = \frac{9}{7}B''$. Der Wert des ersten Bechers beträgt also das $\frac{9}{7}$fache des zweiten. Da der Wert des ersten Bechers und des Deckels aber das Doppelte $= \frac{14}{7}$ des Wertes

des zweiten Bechers ausmacht, so folgt daraus, daß $\frac{14}{7}-\frac{9}{7}=\frac{5}{7}$ des Wertes des zweiten Bechers 30 ℳ beträgt; folglich $\frac{1}{7}$ des Wertes=6 ℳ; mithin kostete der zweite Becher $7\times6=42$ ℳ und der erste $\frac{9}{7}\times42=54$ ℳ.

10. Es seien x Knaben und y Mädchen. Wenn das älteste Mädchen sagte, es habe so viele Schwestern als Brüder, so waren der Mädchen 1 mehr, als der Knaben; folglich ist dann (1) $x+1=y$. Sagt der älteste Knabe dagegen, er habe nur halb so viel Brüder, als Schwestern, so ist die Anzahl seiner Brüder $x-1$; und deshalb ist (2) $\frac{1}{2}y=x-1$. Aus (1) und (2) folgt, daß $x=3$ und $y=4$.

Zweite Auflösung. Sind der Knaben x, so sind, da der Mädchen 1 mehr ist, der Mädchen $x+1$. Da der älteste Knabe nur halb so viel Brüder hatte, als Schwestern, so ist $\frac{1}{2}(x+1)=x-1$; folglich $x=3$ und daher $x+1=4$.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Nach der Angabe des ältesten Mädchens übersteigt die Anzahl der Mädchen die der Knaben um 1 und nach der Angabe des ältesten Knaben beträgt die Hälfte der Mädchen 1 weniger als die Anzahl der Knaben. Daraus folgt, daß $1\frac{1}{2}$mal die Anzahl der Mädchen gerade soviel ausmacht, als die doppelte Anzahl der Knaben, mithin beträgt auch das $1\frac{1}{3}$fache der Knaben das 1fache der Mädchen. Nun ist das $\frac{1}{3}$fache=1; folglich sind $3\times1=3$ Knaben und $4\times1=4$ Mädchen.

11. α) Bezeichnet man den Zähler des Bruches mit x und den Nenner mit y, ist

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{4}, \text{ oder (1) } y-4x=4;$$

$$\frac{x}{y+1}=\frac{1}{5}, \text{ oder (2) } 5x-y=1;$$

folglich $x=5$, also $y=24$. Der Bruch ist also $\frac{5}{24}$.

Unter Anwendung der allgemeinen Zahlzeichen erhalten wir:

$$(1)\ \frac{x+a}{y}=m;\ (2)\ \frac{x}{y+b}=n;$$

hieraus folgt $x=\frac{(a+bm)n}{m-n}$ und $y=\frac{a+bn}{m-n}$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn man den Zähler um 1 vermehrt, also $\frac{1}{4}$ daraus gemacht wird, so bleibt der Bruch in diesem Wert, wenn Zähler und Nenner in gleichem Verhältnisse vermindert oder vermehrt werden. Wo ich demnach den Nenner um 1 vermehre, müßte der Zähler noch um $1:4=\frac{1}{4}$ vermehrt werden. Dieses geschieht nicht und es soll auch noch das im ersten Falle zugedachte 1 daran fehlen, oder zusammen $1\frac{1}{4}$ und dadurch

wird der Wert von $\frac{1}{4}$ zu $\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ weniger, woraus folgt, daß $1\frac{1}{4}$ der 20. Teil des jetzigen Nenners ist; dieser ist mithin $20\times1\frac{1}{4}=25$; der zu suchende $25-1=24$; der Zähler $25:5=5$; also heißt der Bruch $\frac{5}{24}$.

β) Ist der Zähler des Bruches wieder x und der Nenner desselben y, so hat man:

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{1}{2}, \text{ oder (1) } 2x-y=-1;$$

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{3}, \text{ oder (2) } 3x-y=2. \text{ Hieraus folgt:}$$

$x=3$, also $y=7$. Der Bruch heißt also $\frac{3}{7}$.

12. Legte A zu dem Geschäfte x *Fl* und B y *Fl* ein, so ist, da sie zusammen 10000 *Fl* hergegeben,

(1) $x+y=10000$.

A läßt sein Geld 15 Monate und B 35 Monate im Geschäft. Mit x *Fl* handelt A 15 Mon. und mit y *Fl* B 35 Mon.; daher gebührt ihnen vom Gewinn so viel, als hätte A mit 15x *Fl* und B mit 35y *Fl* sich am Geschäft beteiligt. Da nun die mit ihrem Gelde gemachten Gewinne gleich sein sollen, so müssen auch ihre bezüglichen Einlagen, womit sie sich einen Monat lang am Geschäfte beteiligten, einander gleich sein; daher ist:

(2) $15x=35y$.

Aus (1) und (2) folgt $x=7000$ *Fl* für A und daher $y=3000$ *Fl* für B.

Zweite (arithmetische) Auflösung. A läßt sein Geld 1 Jahr 3 Monate = 15 Monate, B das seinige 2 Jahre 11 Monate = 35 Monate im Geschäfte, also verhalten sich die Zeiten, die beide mit ihrem Gelde am Geschäfte beteiligt sind, wie 15 : 35 oder wie 3 : 7. Da die Gewinne nach diesen Zeiten bei beiden gleich sind, so müssen ihre Einlagen im umgekehrten Verhältnisse der Zeit stehen, d. h. bei je 10 *Fl* Einlage beteiligte sich A mit 7 und B mit 3 *Fl*. Demnach hat A $\frac{10000}{10}\times7=7000$ *Fl* und B 3000 *Fl* eingelegt.

13. Die größere der beiden Zahlen heiße x und die andere y, so ist, da die Summe derselben 47 beträgt,

(1) $x+y=47$.

Dividiert man x durch y, so erhält man zum Quotient 5 und zum Reste 5, und da der Dividend gleich ist dem Produkte aus dem Divisor in den Quotienten, vermehrt um den Rest, so ist: (2) $x=5y+5$; also $x=40$ und $y=7$.

Zweite Auflösung. Heißt die eine Zahl x, so ist die andere $47-x$. Es ist also

$$5(47-x)+5=x;\ x=40,\ 47-x=47-40=7.$$

Mit allgemeinen Zahlzeichen hat man:

$(1)\ x+y=s;\ (2)\ x=qy+r.$ Hieraus folgt:

$x=(qs+r):(q+1)$ und $y=(s-r):(q+1)$.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Geben die beiden Zahlen, durch einander dividiert, zum Quotienten 5 und zum Reste 5, so folgt daraus, daß die eine Zahl das 5fache und 5 der andern ist; da sie zusammen 47 ausmachen, so ist $47-5=42$ das 6fache der gesuchten Zahl; folglich die eine $42:6=7$ und die andere

$$47-7=5\times7+5=40.$$

14. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist ihre Differenz $x-y$ und ihr Quotient $\frac{x}{y}$, und da beide $=5$ [a] sind, so ist

α) $(1)\ x-y=5;\ (2)\ \frac{x}{y}=5;\ x=6\frac{1}{4},\ y=1\frac{1}{4}.$

β) $(1)\ x-y=a;\ (2)\ \frac{x}{y}=a;\ x=a^2:(a-1);\ y=a:(a-1).$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Ist ihr Quotient 5, so ist die eine Zahl das 5fache der andern; da nun auch ihre Differenz 5 ist, so ist die eine um 5 größer als die andere; mithin ist die kleinere der beiden Zahlen das $\frac{1}{4}$fache von 5, macht $1\frac{1}{4}$; folglich die größere Zahl

$$5\times1\tfrac{1}{4}=6\tfrac{1}{4}.$$

15. Die Zahlen seien x und y, so ist ihre Summe $x+y$ und ihr Quotient $\frac{x}{y}$ und weil beide $=a$ sind, so erhält man:

$$(1)\ x+y=a;\ (2)\ \frac{x}{y}=a;\ \text{also}\ x=ay;$$

folglich $x=a^2:(a+1)$ und $y=a:(a+1)$.

16. Die größere der beiden Zahlen sei x und die kleinere y. Multipliziert man den Divisor mit dem Quotienten und addiert zu diesem Produkt den Rest, so erhält man den Dividenden. Da nun y durch x geteilt, zum Quotienten 0,21 und zum Reste 0,04162 giebt, so ist:

$$y=0{,}21x+0{,}04162,\ \text{oder}\ (1)\ y-0{,}21x=0{,}04162,$$

und weil x, geteilt durch y, zum Quotienten 4 und zum Reste 0,742 giebt, so ist

$$x=4y+0{,}742,\ \text{oder}\ (2)\ x-4y=0{,}742;$$

folglich $x=5{,}678$ und $y=1{,}234$.

17. Heißt die erste der beiden Zahlen x und die zweite y, so ist nach den in der vorhergehenden Auflösung angestellten Betrachtungen

$$x=y(a-b^2)+b+b^4,\ \text{oder}\ (1)\ x-y(a-b^2)=b+b^4;$$
$$y=x(b-a^2)+a+a^4,\ \text{oder}\ (2)\ y-x(b-a^2)=a+a^4.$$

Hieraus folgt: $x=a^2+b$, $y=a+b^2$.

18. Heißt die größere der beiden Zahlen x und die kleinere y, so ist, weil die Summe derselben, um 1 vermehrt, gerade 1000 ausmacht, $x+y+1=1000$, oder (1) $x+y=999$.

Setzt man die kleinere Zahl y nach der größeren x, und trennt sie durch ein Decimalkomma, so wird y dadurch 1000mal so klein, und auf diese Weise erhält man die Zahl $x+\frac{y}{1000}$. Setzt man dagegen x hinter y und trennt sie wieder durch ein Decimalkomma, so wird x dadurch 1000mal so klein, und man erhält die Zahl $y+\frac{x}{1000}$. Weil nun erstere Zahl sechsmal so groß ist, als die zweite, so hat man: $x+\frac{y}{1000}=6\times\left(y+\frac{x}{1000}\right)$ oder (2) $994x-5999y=0$.

Aus (1) und (2) folgt, daß $y=142$ und $x=857$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Nennen wir der Abkürzung wegen die größere Zahl a und die kleinere b, weiter diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man die kleinere hinter die größere setzt und sie durch ein Decimalkomma trennt, z, endlich diejenige, welche entsteht, wenn man die größere hinter die kleinere setzt und sie ebenfalls durch ein Decimalkomma trennt, z'. Nach der Aufgabe ist die Summe der beiden Zahlen, also $a+b=999$. Ferner ist z sechsmal so groß als z'. Man erhält also z aus z', wenn man z' sechsmal nimmt. Da z' der sechste Teil von z ist, so folgt daraus, daß die letzte Ziffer rechts in b eine gerade Zahl oder Null ist. Aus dem Umstande jedoch, daß die Summe der Einer der beiden Zahlen 9 ausmachen soll, und der sechste Teil einer Zahl, deren Einer Null sind, nicht 9 ausmachen kann, folgt, daß die letzte Ziffer rechts in b nicht Null sein kann, also ist sie eine gerade Zahl. Daraus ergiebt sich ferner, daß die letzte Ziffer rechts in a eine ungerade und kleiner sein muß als 9. Wenn nun z das sechsfache von z' ist, so ist $z-z'$ das fünffache, also muß $z-z'$ durch 5 teilbar sein, und daher muß in $z-z'$ die letzte Ziffer rechts 5 sein. Diese ist aber entstanden, indem ich die letzte Ziffer rechts in z', welche eine ungerade ist, von der letzten Ziffer rechts in z, welche eine gerade ist, subtrahiert habe; also ist die Differenz der Einer in beiden Zahlen a und $b=5$ und da ihre Summe 9 ist, so ist die größere 7 und die kleinere 2. Also betragen die Einer in a 7 und in b 2. Da durch die Multiplikation der Zahl z' mit 6 die Zahl z entstehen soll, so sind durch $6\times7=42$ schon die Zehner und Einer der Zahl b gefunden. Nun betragen die Zehnerziffern in a und b wieder 9, also betragen die Zehner in a 5; demnach heißen die beiden letzten

Ziffern in a 57 und in b 42. Nun ist 6×5 Zehner + 4 Zehner=34 Zehner=3 Hunderte +4 Zehner. Die Summe der Ziffern der Hunderte in a und b muß wieder 9 sein, also ist die erste Ziffer links in a<9 und in b>0. Da nun schon 3 Hunderte vorhanden und umgekehrt jetzt die Zahl a durch das Multiplizieren der kleineren mit 6 entstehen muß, also die erste Ziffer vor dem Decimalkomma in z' 2 und in z 7 sein muß, 6×2 aber zur Einer-Ziffer nur 2 giebt, so müssen durch die Multiplikation der Zehntelziffer in z' 5 herüberkommen; also muß durch die Multiplikation mit 6 und in Vereinigung der 3, die ich im Sinne behalten, eine Zahl entstehen, die 5 an die nächstfolgende Stelle abgiebt. Die also in z' mit 6 zu multiplizierende Zahl, die <9 sein muß und den angegebenen Bedingungen genügen soll, muß daher 8 sein; also betragen die Hunderte in a 8 und in b 1; also ist a=857 und b=142.

19. Der Vater sei x Jahre und der Sohn y Jahre alt. Vor 7 Jahren war also der Vater x—7 und der Sohn y—7 Jahre alt, und weil damals der Vater 7mal so alt war, als sein Sohn, so ist:

$$x-7=7(y-7), \text{ oder (1) } 7y-x=42.$$

Nach 3 Jahren ist der Vater x+3 und der Sohn y+3 Jahre alt, und da dann das Alter des Vaters 3mal so groß ist, als das des Sohnes, so hat man:

$$x+3=3(y+3), \text{ oder (2) } x-3y=6;$$

folglich x=42 und y=12.

Zweite Auflösung. Der Vater sei jetzt x Jahre alt; vor 7 Jahren war er x—7 Jahre alt und der Sohn $\frac{1}{7}(x-7)$, also ist dieser jetzt $\frac{1}{7}(x-7)+7=\frac{1}{7}(x+42)$ Jahre alt. Nach 3 Jahren ist der Vater x+3 und der Sohn $\frac{1}{7}(x+42)+3=\frac{1}{7}(x+63)$ Jahre alt. Da nun der Vater 3mal so alt ist, als der Sohn, so ist:

$\frac{1}{3}(x+3)=\frac{1}{7}(x+63)$; folglich x=42 Jahre der Vater und $\frac{1}{7}(42+42)=12$ Jahre der Sohn.

Dritte Auflösung nach der regula falsi. Der Vater sei jetzt etwa 30 Jahre alt, so betrug sein Alter vor 7 Jahren 23 und das seines Sohnes $23:7=3\frac{2}{7}$ Jahre; also ist dieser jetzt $10\frac{2}{7}$ Jahre alt. Nach 3 Jahren ist der Vater 33 und der Sohn $13\frac{2}{7}$ alt; folglich fehlen an dem Alter des Vaters $6\frac{6}{7}$ Jahre, um 3mal so alt zu sein, als sein Sohn; daher $\varphi'=6\frac{6}{7}$. Der Vater sei zweitens 31 Jahre alt, dann ist sein Sohn $\frac{31-7}{7}+7=10\frac{3}{7}$ Jahre alt. Nach 3 Jahren beträgt das Alter des Vaters 34 und das des

Sohnes $13\frac{3}{7}$; an dem Alter des Vaters fehlen aber noch $6\frac{2}{7}$ Jahre, um 3mal so alt zu sein, als sein Sohn; folglich $\varphi''=6\frac{2}{7}$. Demnach beträgt das Alter des Vaters, wenn wir es mit x bezeichnen:

$$x=\frac{31\,.\,6\frac{6}{7}-30\,.\,6\frac{2}{7}}{6\frac{6}{7}-6\frac{2}{7}}=42 \text{ Jahre}$$

und der Sohn $\frac{42-7}{7}+7=12$ Jahre.

20. Das Kapital sei x ℳ groß und stehe zu y pCt., so betragen die Zinsen desselben in 1 Jahre $\frac{xy}{100}$ ℳ; also in 8 Jahren $\frac{8xy}{100}$ ℳ. Weil nun das Kapital am Ende von 8 Jahren mit den Zinsen zu 6486 ℳ anwächst, so ist: $x+\frac{8xy}{100}=6486$, oder (1) $25x+2xy=162150$. Steht dasselbe Kapital zu 1 pCt. höher, also zu $y+1$ pCt., so betragen die Zinsen desselben in 5 Jahren $\frac{5x(y+1)}{100}$, und da es in diesem Falle mit den Zinsen $6051\frac{1}{4}$ ℳ ausmacht, so ist: $x+\frac{5x(y+1)}{100}=6051\frac{1}{4}$, oder (2) $21x+xy=121025$. Aus den beiden Gl. (1) und (2) folgt $x=4700$ ℳ das Kapital und $y=4\frac{3}{4}$ pCt.

Zweite Auflösung. Nimmt man an, das Kapital stehe im ersten Falle zu x pCt. und im zweiten Falle zu $(x+1)$ pCt. aus, so erhält man zur Bestimmung von x die Gl.:

$$\frac{6486(105+5x)}{100+8x}=6051\tfrac{1}{4}.$$

Also $x=4\frac{3}{4}$ pCt. und das Kapital $\frac{6486\,.\,100}{100+8\,.\,4\frac{3}{4}}=47\,.\,100$ $=4700$ ℳ.

Oder: Sucht man zu bestimmen, wie viel Zinsen das eine Kapital mehr einbringt, als das andere, so erhält man:

$$\frac{\frac{6051\frac{1}{4}(3x-5)-(6486-6051\frac{1}{4})\,.\,100}{5\,.\,(3x-5)}}{\frac{6486(3x-5)-(6486-6051\frac{1}{4})\,.\,100}{8(3x-5)}}=\frac{6486-6051\frac{1}{4}}{3x-5}.$$

Also $x=4\frac{3}{4}$ pCt.; daher das Kapital $\frac{(6486-6051\frac{1}{4})\,.\,100}{3\,.\,4\frac{3}{4}-5}$ $=4700$ ℳ.

Dritte Auflösung. Das Kapital sei x; sucht man die Prozente zu bestimmen, so erhält man die Gl.:

$$\frac{(6051\frac{1}{4}-x).100}{5x}-\frac{(6486-x).100}{8x}=1.$$

Also x=4700 ℳ.

Vierte Auflösung. Das Kapital sei x und die einjährigen Zinsen seien y, so erhält man die beiden Gl.:

$$(1)\ x+8y=6486;\ (2)\ x+\frac{x+100y}{20}=6051\tfrac{1}{4};$$

x=4700 ℳ; y=223¼ ℳ, woraus sich leicht der Zinsfuß berechnen läßt.

21. Die Schuldsumme betrage x ℳ, die man mit y pCt. monatlichem Diskonto bezahle, so beträgt der Diskonto für 3 Monate von x ℳ $\frac{3xy}{100}$ ℳ. Es ist daher:

$$x-\frac{3xy}{100}=3523\tfrac{1}{2},\ \text{oder}\ (1)\ 100x-3xy=352350.$$

Der zweite zahlt für dieselbe Summe mit $\frac{11xy}{100}$ Diskonto 3319½ ℳ. Es ist daher:

$$x-\frac{11xy}{100}=3319\tfrac{1}{2},\ \text{oder}\ (2)\ 100x-11xy=331950.$$

Hieraus folgt x=3600 ℳ Schuldsumme und $y=\frac{17}{24}$ pCt. Diskonto monatlich, folglich $\frac{17\times12}{24}=8\frac{1}{2}$ pCt. Diskonto jährlich.

Zweite Auflösung. Beträgt das Kapital x, so suche man die Barzahlung zu bestimmen, wonach man die Gl. erhält:

$$x-\tfrac{11}{3}(x-3523\tfrac{1}{2})=3319\tfrac{1}{2};$$

also x=3600 ℳ und der jährliche Diskonto beträgt

$$\frac{12\,.\,100(3600-3523\frac{1}{2})}{3\,.\,3600}=8\tfrac{1}{2}\ \text{pCt.}$$

Dritte (arithmetische) Auflösung. Der eine hat die Summe nach 3, der andere dieselbe Summe nach 11 Monaten, also 8 M. später zu bezahlen, dafür bezahlt dieser auch 3523½—3319½=204 ℳ weniger als jener; deshalb beträgt der Diskonto für 1 Monat 204:8=25½ ℳ und daher für 11 Monate 11×25½=280½ ℳ; mithin betrug die zu zahlende Summe 3319½+280½=3600 ℳ, welche mit $\frac{12\times25\frac{1}{2}\times100}{3600}=8\frac{1}{2}$ pCt. jährlich diskontiert wurde.

22. A habe x ℳ und B y ℳ. Giebt B an A ¾ seines Geldes, so hat A x+¾y, und weil er nun 100 ℳ hat, so ist:

$$(1)\ x+\tfrac{3}{4}y=100.$$

Giebt hingegen A an B die Hälfte seines Geldes, so hat dieser $y+\frac{1}{2}x$, und da dies wieder 100 ℳ ausmacht, so ist:

$$(2)\ y+\tfrac{1}{2}x=100;$$

folglich $x=40$ ℳ für A, $y=80$ ℳ für B.

Zweite Auflösung. B habe x ℳ; dann hat A $100-\frac{3}{4}x$ ℳ. Giebt A dem B hiervon die Hälfte, also $\frac{1}{2}(100-\frac{3}{4}x)$, so hat er jetzt $x+\frac{1}{2}(100-\frac{3}{4}x)$ und da das gerade 100 ℳ ausmacht, so ist:

$$x+\tfrac{1}{2}(100-\tfrac{3}{4}x)=100;$$

folglich $x=80$ ℳ hat B, also A $100-\frac{3}{4}\times 80=40$ ℳ.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da das einfache Geld des A und das $\frac{3}{4}$fache des B gerade 100 ℳ ausmacht, so beträgt das 4fache Geld des A nebst dem 3fachen des B 400 ℳ. Und wenn die Hälfte des Geldes von A nebst dem Gelde von B ebenfalls 100 ℳ ausmacht, so beträgt das Geld von A nebst dem 2fachen Gelde des B 200 ℳ; woraus folgt, daß ihr 5faches Geld $400+200=600$, also ihr einfaches 120 ℳ ausmacht. Da nun das Geld des A nebst dem 2fachen des B 200 ℳ beträgt, so hat

B $200-120=80$ und A $120-80=40$ ℳ.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Wenn $\frac{3}{4}$ des Geldes von B nebst dem Gelde des A ebensoviel ausmacht, als die Hälfte des Geldes von A nebst dem Gelde des B, da jedesmal 100 ℳ entstehen, so folgt daraus, daß B doppelt soviel Geld haben muß, als A; demnach ist auch $\frac{3}{4}$ des Geldes von B soviel, wie $1\frac{1}{2}$mal das Geld des A. Hätte A also $1+1\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$mal soviel Geld gehabt, als er wirklich hat, so hätte er 100 ℳ gehabt; er hatte also $100:2\frac{1}{2}=40$ ℳ und daher hatte B $2\times 40=80$ ℳ.

Fünfte (arithmetische) Auflösung. Im ersten Falle giebt A $\frac{4}{4}$ und B $\frac{3}{4}$ seines Geldes, im zweiten giebt A $\frac{2}{4}$ und B $\frac{4}{4}$ desselben; also kommt im ersten Falle $\frac{1}{4}$ des Geldes von B und im zweiten $\frac{2}{4}$ des Geldes von A nicht in Betracht, und da durch das jedesmalige Zusammenlegen gleich viel entsteht, so muß auch das, was B im ersten Falle von seinem Gelde übrig behält, so viel betragen, als was A im zweiten Falle übrig hat, oder $\frac{1}{4}$ des Geldes von B muß so viel betragen, als $\frac{2}{4}$ des Geldes von A. Wenn demnach A $\frac{3}{4}$ des Geldes von B erhält, so macht das gerade soviel aus, als hätte A $\frac{4}{4}+\frac{6}{4}=\frac{10}{4}$mal sein Geld genommen. Nun macht $\frac{10}{4}$ seines Geldes 100 ℳ aus, also $\frac{4}{4}=40$ ℳ und demnach hatte B $4 \,.\, 20=80$ ℳ.

23. A habe x ℳ und B y ℳ. Mit seinem Gelde samt der Hälfte des Geldes von B will A das Pferd kaufen, mithin kostete das erste Pferd $(x+\frac{1}{2}y)$ ℳ. Dagegen fehlt dem B $\frac{1}{3}$ des Geldes von A, also $\frac{1}{3}x$ ℳ, um den Preis desselben

zu erlegen; B hätte also den Kaufpreis des Pferdes mit $(y+\frac{1}{3}x)$ ℳ abgemacht. Daher ist:

$$x+\tfrac{1}{2}y=y+\tfrac{1}{3}x, \text{ oder } (1)\ 4x-3y=0.$$

Das zweite zum Verkauf ausgestellte Pferd kostete 36 ℳ weniger als das erste, folglich kostete es $(y+\frac{1}{3}x-36)$ ℳ. Mit seinem Gelde, nebst $\frac{3}{8}$ des Geldes von B hätte A dasselbe kaufen können, also betrug der Kaufpreis $(x+\frac{3}{8}y)$ ℳ. Es ist daher $y+\frac{1}{3}x-36=x+\frac{3}{8}y$, oder

$$(2)\ 15y-16x=864.$$

Hieraus folgt, daß $x=216$ ℳ hatte A, und $y=288$ ℳ hatte B. Mithin kostete das erste Pferd $216+144=360$ ℳ.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Dem A fehlt die Hälfte des Geldes von B und dem B der dritte Teil des Geldes von A, um das Pferd kaufen zu können. Bei dem zweiten Pferde fehlte dem A $\frac{3}{8}$ des Geldes von B, und dem B $\frac{1}{6}$ des Geldes von A, also hatte A jetzt $\frac{4}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ des Geldes von B weniger nötig und B $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ des Geldes von A. Dies kam aber dadurch, daß das zweite Pferd 36 ℳ billiger war, als das erste; folglich hat, da $\frac{1}{8}$ des Geldes von $B=\frac{1}{6}$ des Geldes von A ist, und dies 36 ℳ ausmacht, B $8\times36=288$ und A $6\times36=216$ ℳ und das Pferd kostete $216+(288:2)=360$ ℳ.

24. Es mögen anfangs im ersten Fasse x und im zweiten y *l* gewesen sein. Gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite, als schon darin ist, so befinden sich im zweiten 2y *l* und im ersten bleiben noch $x-y$ *l*. Gießt er hierauf aus dem zweiten in das erste so viel, als darin ist, so enthält das erste $2(x-y)$ und das zweite $2y-(x-y)=3y-x$ *l*. Gießt er endlich wieder aus dem ersten so viel in das zweite, als noch darin übrig bleibt, so ist in dem ersten noch

$$2(x-y)-(3y-x)=3x-5y\ l,$$

und im zweiten Fasse

$$2(3y-x)=6y-2x\ l.$$

Da sich auf diese Weise in jedem Fasse gleich viel befindet, nämlich 80 *l*, so ist:

$$(1)\ 3x-5y=80,\ (2)\ 6y-2x=80.$$

Hieraus folgt $x=110$ *l* in dem ersten und $y=50$ *l* im zweiten Fasse.

Zweite Auflösung. Im ganzen sind $2\times80=160$ *l* Wein in den beiden Fässern. Es seien nun anfangs x *l* im ersten gewesen, so waren im zweiten $160-x$ *l*. Nach dreimaliger Operation des Umgießens befinden sich im ersten Fasse $8(x-100)$ und im zweiten Fasse $8(120-x)$ *l*.

Zur Bestimmung von x hat man daher folgende 3 Gleichungen:

(1) $8(x-100)=80$;
(2) $8(120-x)=80$;
(3) $8(120-x)=8(x-100)$.

Aus allen 3 Gleichungen folgt $x=110$ *l* u. s. w.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Aus dem einen Fasse werden jedesmal soviel Liter in das andere gegossen, als bereits darin ist, und nach dreimaliger Operation befinden sich in beiden Fässern gleich viel Liter, nämlich 80. Vor der dritten Operation befanden sich also im 2. Fasse $\frac{80}{2}=40$, also im ersten $80+40=120$. Vor der zweiten Operation sind im ersten Fasse $120:2=60$ und im zweiten $40+60=100$; demnach waren anfangs im zweiten $100:2=50$ und im ersten $60+50=110$ *l*.

25. Bei gleichen Angaben wie in der vorigen Aufgabe, mit Ausnahme, daß das Ausgießen auf dieselbe Weise noch einmal wiederholt wird, so bleibt im zweiten Fasse noch $6y-2x-(3x-5y)=11y-5x$ *l*, und das erste enthält $2(3x-5y)=6x-10y$ *l*. Weil nun n *l* in jedem Fasse übrig bleiben, so ist:

(1) $6x-10y=n$, (2) $11y-5x=n$.

Hieraus folgt $y=\frac{11}{16}n$ *l* waren anfangs im zweiten und $x=\frac{21}{16}n$ *l* im ersten Fasse.

26. Heißt die erste Zahl x und die zweite y, so ist:

(1) $3x+7y=58$, (2) $7x+3y=42$.

Hieraus folgt: $x=3$, $y=7$.

27. α) Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist: $x:y=(x+y):5$ und $x:y=(x-y):3$. Daraus folgt, daß $(x+y):(x-y)=5:3$ und hieraus, daß $x=4y$. Demnach beträgt die Summe der beiden Zahlen das 5fache der zweiten Zahl (y), also $x+y=5y$. Setzt man diesen Wert für die Summe der beiden Zahlen in die erste Proportion, so hat man $x:y=5y:5=y:1$; woraus folgt, daß $x=y^2$ oder da $x=4y$, so ist $y^2=4y$; folglich $y=4$ und daher $x=4\times4=16$.

β) Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist:

(1) $x:y=(x+y):a$; (2) $x:y=(x-y):b$.

Da die Exponenten in den beiden Proportionen einander gleich sind, so hat man nach §. 236:

(3) $(x+x):(y+y)=[(x+y)+(x-y)]:(a+b)$ oder
(4) $\quad 2x \quad : \quad 2y \quad = \qquad 2x \qquad :(a+b)$

Hier ist das erste Glied dem dritten gleich, also ist auch das zweite dem vierten gleich; daher folgt aus (4), daß

$2y=a+b$; also $y=\frac{1}{2}(a+b)$, daher
$x=(a+b)^2:2(a-b)$.

28. Wird die Ziffer an der ersten Stelle links, also die Hunderte mit x, die zweite, nämlich die Zehner mit y bezeichnet, so betragen, da die Quersumme 9 ausmacht, die Einer

$9-(x+y)$ und die gesuchte Zahl heißt: $100x+10y+9-(x+y)$. Weil die Ziffer auf der ersten Stelle links den achten Teil der aus den beiden andern Ziffern bestehenden Zahl beträgt, so ist:

$$(1)\ x=\tfrac{1}{8}[10y+9-(x+y)],$$

und weil die Ziffer auf der ersten Stelle rechts ebenfalls den achten Teil der aus den beiden andern Ziffern bestehenden Zahl ausmachen soll, so ist:

$$(2)\ 9-(x+y)=\tfrac{1}{8}(10x+y).$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich $x=3$, $y=2$ und die Einer $=9-(3+2)=4$; die verlangte Zahl heißt also $300+20+4=324$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Ziffer auf der ersten Stelle links, also die Ziffer der Hunderter, beträgt den achten Teil der aus den beiden andern Ziffern gebildeten Zahl, also muß diese Zahl durch 8 teilbar sein. Aus der fernern Bestimmung, daß auch die aus den Ziffern der Hunderter und Zehner gebildete Zahl ebenfalls das Achtfache der Einer ist, folgt, daß sowohl die Ziffer der Zehner als auch die der Einer der gesuchten Zahl eine gerade sein muß und daher, weil die Quersumme 9 ausmacht, die Ziffer der Hunderter eine ungerade Zahl, die >1 und <7 sein muß. Weil nun eine Zahl, deren Einer weder 0 noch 5 sind, nicht durch 5 teilbar ist, so muß die Ziffer der Hunderter 3 sein, und da das achtfache von 3 die aus den Zehnern und Einern gebildete Zahl giebt, so heißt diese $8\times 3=24$; also heißt die gesuchte Zahl 324.

29. Heißen die beiden Glieder des Verhältnisses x und y, so ist, wenn man dieselben um 5 vermehrt:

$$(x+5):(y+5)=9:11, \text{ oder } (1)\ 9y-11x=10;$$

und wenn sie um 5 vermindert werden:

$$(x-5):(y-5)=2:3, \text{ oder } (2)\ 3x-2y=5.$$

Aus (1) und (2) folgt $x=13$ und $y=17$. Das Verhältnis heißt also $13:17$.

30. Nach der vorigen Auflösung hat man:

$$(x+d):(y+d)=m:n \text{ oder } (1)\ nx-my=(m-n)d;$$
$$(x-o):(y-o)=p:q \text{ oder } (2)\ qx-py=(q-p)o.$$

Multipliziert man (1) mit p und (2) mit m und nimmt zwischen beiden Gleichungen die Differenz, so hat man:

$$x(np-mq)=(m-n)dp-(q-p)mo,$$

$$\text{folglich } x=\frac{(m-n)dp+(p-q)om}{np-mq},$$

$$\text{und daher } y=\frac{(m-n)dq+(p-q)on}{np-mq}.$$

31. Heißen die beiden Zahlen x und y, so heißt das Verhältnis

derselben x : y, und da dasselbe gleich dem Verhältnisse 3 : 5 ist, so ist:

$$x : y = 3 : 5 \text{ oder } (1)\ 5x - 3y = 0.$$

Setzt man zur ersten 10, so hat man x+10, zieht man hingegen von der andern 10 ab, so hat man y—10, und das Verhältnis dieser Zahlen, nämlich (x+10) : (y—10) ist das Umgekehrte des vorigen Verhältnisses. Es ist demnach:

$$(x+10) : (y-10) = 5 : 3 \text{ oder } (2)\ 5y - 3x = 80.$$

Hieraus folgt, daß x=15 und y=25.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die beiden Zahlen stehen in dem Verhältnisse von 3 : 5 oder von $\frac{3}{3} : \frac{5}{3}$. Nachdem man aber die erste um 10 vermehrt und die zweite um 10 vermindert hat, kehrt sich das Verhältnis um; sie verhalten sich alsdann wie 5 : 3 oder wie $\frac{5}{3} : \frac{3}{3}$. In diesem Falle ist das zweite Glied des Verhältnisses um $\frac{2}{3}$ kleiner geworden; daher ist $\frac{2}{3}$ der Zahl = 10; also $\frac{1}{3} = 5$; das zweite Glied heißt also 5×5=25. Das erste Glied des Verhältnisses ist im zweiten Falle auch um $\frac{2}{3}$ größer geworden, weil es um 10 vermehrt worden ist; es beträgt daher auch im zweiten Falle 25 und vor der Vermehrung um 10 also 25—10=15.

32. Die beiden Zahlen seien x und y, so ist:

$$(1)\ \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 52; \quad (2)\ \frac{x}{8} + \frac{y}{12} = 31.$$

Hieraus folgt x=168 und y=120.

33. Die beiden Zahlen seien x und y, so ist:

$$(1)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5; \quad (2)\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y = 2xy.$$

Hieraus folgt: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$.

34. Das erste Faß fasse x und das zweite y *l*, so faßt das dritte, größere Faß, da zu dessen Füllung der Inhalt des ersteren nebst einem Fünftel des Inhaltes des zweiten erforderlich ist, $(x + \frac{1}{5}y)$ *l*. Weil sie alle drei zusammen 1440 *l* fassen können, so ist:

$$x + y + x + \tfrac{1}{5}y = 1440 \text{ oder } (1)\ 10x + 6y = 7200.$$

Da man ebenso das dritte größere Faß mit dem Inhalte des zweiten nebst einem Drittel des Inhaltes des erstern füllen könnte, also mit $(y + \frac{1}{3}x)$ *l*, so hat man auch:

$$(2)\ x + \tfrac{1}{5}y = y + \tfrac{1}{3}x;$$

folglich x=480 *l* Inhalt des 1. Fasses,
y=400 *l* „ „ 2. „ und
1440—(400+480)=560 *l* „ „ 3. „ .

Zweite Auflösung. Das zweite Faß enthalte x *l*, so enthalten die beiden andern 1440—x. Setzt man zum ersten Fasse $\frac{1}{5}$ des Inhaltes des zweiten, so erhält man

das leere; also fehlt an dem doppelten Inhalte des großen leeren Fasses noch $\frac{1}{5}x\ l$; folglich ist das Doppelte des leeren $=1440-x+\frac{1}{5}x=1440-\frac{4}{5}x$; also faßt das leere $720-\frac{2}{5}x$ und das erste $1440-x-(720-\frac{2}{5}x)=720-\frac{3}{5}x\ l$. Der Inhalt des zweiten nebst $\frac{1}{3}$ des erstern beträgt nun so viel als das große leere Faß; also ist:

$$x+\tfrac{1}{3}(720-\tfrac{3}{5}x)=720-\tfrac{2}{5}x;$$

folglich $x=400\ l$ das zweite; demnach $720-\frac{3}{5}\times400=480\ l$ das erste und $720-\frac{2}{5}\times400=560\ l$ das leere Faß.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Bezeichnen wir den Inhalt des großen leeren Fasses mit a, den des ersten vollen mit b und den Inhalt des zweiten vollen mit c, dann ist (1) $a=b+\frac{1}{5}c$ und (2) $a=\frac{1}{3}b+c$; woraus folgt, daß $b+\frac{1}{5}c=\frac{1}{3}b+c$; also $b=\frac{6}{5}c$. Bestimmen wir jetzt a sowohl durch b als auch durch c, so erhalten wir $a=\frac{7}{6}b$ und $a=\frac{7}{5}c$. Hieraus ergiebt sich, daß sich

$$(1)\ a:b=7:6;\ (2)\ a:c=7:5 \text{ und } (3)\ b:c=5:6;$$

folglich verhält sich $a:b:c=7:5:6$. Bei je $7+5+6=18\ l$ kommen also 7 auf das große leere Faß, 5 auf das erste volle und 6 l auf das zweite volle. Da nun die 3 Fässer $1440=18\times80\ l$ enthalten, so ist

$$a=80\times7=560;\ b=80\times5=400 \text{ und}$$
$$c=80\times6=480\ l.$$

35. Bezeichnet man die zwei Ziffern, aus denen die zweizifferige Zahl besteht, mit x und y, so daß x die Zehner, y die Einer bezeichnet, so ist die gesuchte Zahl $10x+y$. Weil nun der Aufgabe gemäß die Quersumme der beiden Ziffern 10 giebt, so ist:

$$(1)\ x+y=10.$$

Kehrt man aber die Ziffern der Zahl um, so werden ihre Zehner zehnmal kleiner, dagegen ihre Einer zehnmal größer, und auf diese Weise entsteht die Zahl $10y+x$, welche um 36 kleiner ist, als die gesuchte Zahl. Es ist daher:

$$10x+y=10y+x+36, \text{ oder } (2)\ x-y=4,$$
$$\text{folglich } x=7 \text{ und hieraus } y=3;$$

die gesuchte Zahl heißt also $10\times7+3=73$.

Zweite Auflösung. Bezeichnet man die Einer der Zahl mit x, so betragen die Zehner $10-x$, also hat die Zahl die Form $10(10-x)+x=100-9x$. Kehrt man die Ziffern um, so werden die Einer zehnmal größer; folglich hat dann die Zahl die Form $10x+(10-x)=10+9x$, und da diese Zahl um 36 kleiner ist, so hat man:

$$10+9x+36=100-9x;\ \text{folglich } x=3;$$

also sind die Zehner $=10-3=7$, die Zahl heißt also $10\times7+3=73$.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Kehre ich die

Ziffern einer zweistelligen Zahl, deren Quersumme 10 ausmacht, um, und subtrahiere sie von der fraglichen Zahl, so bleibt 36 als Rest, oder so ist die gesuchte Zahl um 36 größer, als die durch Umkehrung der Ziffern entstandene. Durch das Subtrahieren dieser Zahl von der ursprünglichen geht nun $3+1=4$ von der Zehnerziffer verloren; folglich ist dieselbe um $\frac{10-4}{2}=3$ kleiner geworden, als sie war; sie heißt also $4+3=7$, daher die Einerziffer 3; die Zahl selbst ist also 73.

36. Würde das 20-Francstück zu x *M* und der Dukaten zu y *M* gerechnet, so ist:

$$(1)\ 7x+9y=198{,}80;\ (2)\ 11x+3y=207{,}10,\ \text{hieraus}\ x=16{,}25\ M,\ y=9{,}45\ M.$$

37. Das *kg* Kaffee koste x *M* und das *kg* Zucker y *M*, so ist

$$(1)\ 10x+14y=30{,}50;\ (2)\ 18x+7y=41{,}25.$$

Hieraus folgt $x=2$ *M*, $y=0{,}75$ *M*.

38. Verdient der Meister täglich x *M* und der Geselle y *M*, so ist: $(1)\ 7x+12y=80.$
In 3 Tagen erhält der Meister 3x *M* und in 5 Tagen der Geselle 5y *M*. Da der Meister aber für 3 Arbeitstage $3\frac{3}{4}$ *M* weniger erhält, als der Geselle für 5 Tage, so ist:

$$(2)\ 5y-3x=3{,}75.$$

Aus (1) und (2) folgt $x=5$ *M*, $y=3\frac{3}{4}$ *M*.

Zweite Auflösung. Der Meister verdiene x *M*, dann verdient der Geselle täglich $\frac{1}{5}(3x+3\frac{3}{4})$ *M*, also in 12 Tagen $12.\frac{1}{5}(3x+3\frac{3}{4})$ *M*. Es ist daher: $7x+12.\frac{1}{5}(3x+3\frac{3}{4})=80$; also $x=5$ *M* und der Lohn des Gesellen $\frac{1}{5}(3.5+3\frac{3}{4})=3\frac{3}{4}$ *M*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Verdient der Meister in 3 Tagen $3\frac{3}{4}$ *M* weniger, als der Geselle in 5 Tagen, so verdient der Meister in $7=2\frac{1}{3}\times3$ Tagen $2\frac{1}{3}\times3\frac{3}{4}=8\frac{3}{4}$ *M* weniger, als der Geselle in $2\frac{1}{3}\times5=11\frac{2}{3}$ Tagen. Der Geselle hat nun außerdem noch $\frac{1}{3}$ Tag gearbeitet. Hätte er also allein gearbeitet, so hätte er $2\times11\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=23\frac{2}{3}$ Tage lang arbeiten müssen und hätte überdies $8\frac{3}{4}$ *M* mehr verdient, als der sämtliche Arbeitslohn beträgt. Er hätte demnach in der angegebenen Zeit $80+8\frac{3}{4}=88\frac{3}{4}$ *M* verdient, also an 1 Tage $88\frac{3}{4}:23\frac{2}{3}=3\frac{3}{4}$ *M*. Nun verdiente der Meister in 3 Tagen $5.3\frac{3}{4}-3\frac{3}{4}=15$ *M*; also an 1 Tage $15:3=5$ *M*.

39. Das erste Kapital sei x *Frc* groß, so beträgt das zweite, das 3mal so groß ist, 3x *Frc*, und jedes der beiden Kapitalien möge zu y pCt. gestanden haben. Die 7jährigen Zinsen des Kapitals x zu y pCt. betragen $\frac{7xy}{100}$ *Frc* und

die 5jährigen Zinsen vom Kapitale 3x betragen $\frac{15xy}{100}$ *Frc.*

Da nun das erste Kapital nebst den Zinsen 2101,95 *Frc* und das zweite nebst den Zinsen 5892,75 *Frc* ausmacht, so ist:

$x+\frac{7xy}{100}=2101,95$ oder (1) $100x+7xy=210195$,

$3x+\frac{15xy}{100}=5892,75$ oder (2) $300x+15xy=589275$; folglich $x=1620$ *Frc* das erste, also 4860 *Frc* das zweite Kapital, und $y=4\frac{1}{4}$ pCt.

Zweite Auflösung. Das Kapital sei x, so betragen die einjährigen Zinsen desselben $\frac{2101,95-x}{7}$ *Frc*; folglich stand es zu $\frac{100(2101,95-x)}{7x}$ pCt.

Das zweite Kapital von 3x *Frc* zu denselben Prozenten brachte in 5 Jahren $\frac{15(2101,95-x)}{7}$ *Frc* Zinsen. Es ist also:

$$3x+\frac{15(2101,95-x)}{7}=5892,75;$$

folglich $x=1620$ *Frc* Kapital, das zu $\frac{100(2101,95-1620)}{7\times1620}$ $=4\frac{1}{4}$ pCt. ausstand.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Hätte das zweite Kapital, das dreimal so groß ist, als das erste, auch 7 Jahre gestanden, so hätte es mit den Zinsen das Dreifache des ersten nebst den 7jährigen Zinsen ausmachen müssen. Es hat aber 2 Jahre weniger auf Zinsen gestanden und ist darum nicht das Dreifache, sondern nur das 5892,75 : $2101,95=2\frac{1}{1}\frac{3}{7}\frac{3}{8}$fache des ersten Kapitals geworden. Es hat nun in 2 Jahren $3\times2101,95-5892,75=413,1$ *Frc* weniger an Zinsen eingebracht; folglich brachte es jährlich $431,1:2=206,55$ *Frc* an Zinsen ein; also in 5 Jahren $5\times206,55=1032,75$ *Frc*, mithin betrug das zweite Kapital $5892,75-1032,75=4860$ *Frc*, und da dasselbe 3mal so groß ist, als das erste, so beträgt dieses $4860:3=1620$ *Frc.* Beide Kapitalien standen zu $\frac{1032,75\times100}{5\times4860}=4\frac{1}{4}$ pCt.

30. Der eine Krug fasse x *l* und der andere y *l* Wein, so kostet der Wein des ersten Kruges 1,20x *M* und der des zweiten 1,60y *M*. Für beide Krüge bezahlt er 11,80 *M*, daher ist:

$$(1)\ 1,20x+1,60y=11,80.$$

Es ergiebt sich aber, daß man beide Krüge verwechselt und

für den Wein des ersten Kruges 1,60x und für den des zweiten 1,20y M berechnete. Da er nun an 11,80 M 50 ₰ zurückerhielt, so ist:

(2) $1{,}60x + 1{,}20y = 11{,}30$.

Aus (1) und (2) folgt $x = 3\frac{1}{2}$ l, $y = 4\frac{3}{4}$ l.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wären die Krüge nicht verwechselt worden, so hätte der erste $\frac{11{,}80}{1{,}20 + 1{,}60} \times 1{,}20 = 505\frac{5}{7}$ ₰ und der zweite $\frac{11{,}80}{1{,}20 + 1{,}60} \times 1{,}60 = 674\frac{2}{7}$ ₰ gekostet. Durch die Verwechselung der Krüge mußte der erste $\frac{11{,}30}{1{,}20 + 1{,}60} \times 1{,}60 = 645\frac{5}{7}$ ₰ und der zweite $\frac{11{,}30}{1{,}20 + 1{,}60} \times 1{,}20 = 487\frac{2}{7}$ ₰ kosten. In diesem Falle kostet der erste $645\frac{5}{7} - 505\frac{5}{7} = 140$ ₰ mehr und der zweite $674\frac{2}{7} - 484\frac{2}{7} = 190$ ₰ weniger, als im ersten Falle. Da nun der Unterschied des Preises pro Liter 40 ₰ beträgt, so faßt der erste Krug $140 : 40 = 3\frac{1}{2}$ l und der zweite $190 : 40 = 4\frac{3}{4}$ l.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Suchen wir zu bestimmen, wie viel Liter der eine Krug mehr faßt, als der andere. Nimmt man in der ersten algebraischen Auflösung die Differenz zwischen den beiden Gleichungen und dividiert diese durch 4, so wird $y - x = 1\frac{1}{4}$. Daraus folgt, daß der zweite Krug $1\frac{1}{4}$ l mehr faßt, als der erste; er kostet also auch $1\frac{1}{4} \times 1{,}60 = 2$ M mehr; demnach kosten die beiden Krüge, wenn sie gleich groß wären, $11{,}80 - 2 = 9{,}80$ M. Ein Liter des ersten nebst einem Liter des zweiten Kruges kosten $1{,}20 + 1{,}60 = 2{,}80$ M; folglich kommen auf den ersten Krug $9{,}80 : 2{,}80 = 3\frac{1}{2}$ l, und auf den zweiten $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$ l.

41. Das eine Kapital sei x M und das andere y M groß, so bringt das erste zu 5 pCt. in 1 Jahre $\frac{5}{100}x = \frac{1}{20}x$ M Zinsen, und das zweite Kapital zu $4\frac{1}{2}$ pCt. in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2}}{100}y = \frac{9}{200}y$ M Zinsen. Weil nun die einjährigen Zinsen beider Kapitalien 853,20 M betragen, so ist:

$\frac{1}{20}x + \frac{9}{200}y = 853{,}20$ oder (1) $10x + 9y = 170640$.

Steht hingegen das Kapital y zu 5 pCt. und x zu $4\frac{1}{2}$ pCt., so bringt dies jährlich 13,50 M weniger an Zinsen ein. Es ist demnach:

$\frac{9}{200}x + \frac{1}{20}y = 839{,}70$ oder (2) $9x + 10y = 167940$.

Hieraus folgt $x = 10260$ M das erste Kapital,
und $y = 7560$ M das zweite Kapital.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wird das erste Kapital zu $4\frac{1}{2}$ pCt. statt zu 5 pCt. verzinset, so entsteht für jede 100 M dieses Kapitals ein Zinsenverlust von $\frac{1}{2}$ M.

Da dieser Verlust im ganzen $13\frac{1}{2}=27.\frac{1}{2}$ *M* beträgt, so folgt daraus, daß dieser Verlust ein Kapital von $27.100=2700$ *M* darstellt, um welche ersteres also größer ist, als das zweite, hat also auch das erstemal, zu 5 pCt. verzinset, $\frac{2700}{100}\times 5=$ 135 *M* mehr an Zinsen eingebracht; folglich brachten die beiden gleich großen Kapitalien $853{,}20-135=718{,}20$ *M* Zinsen ein; mithin brachte das zweite Kapital $\frac{718{,}20}{5+4{,}5}\times 4{,}5$ $=340{,}20$ *M* und war demnach $\frac{340{,}20}{4{,}5}\times 100=7560$ *M* groß und deshalb betrug das erste $7560+2700=10260$ *M*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Je 200 *M* Kapital brachten $9\frac{1}{2}+9\frac{1}{2}=19$ *M* an Zinsen ein. Beide Kapitalien haben an Zinsen $853{,}20+839{,}70=1692{,}90$ *M* eingebracht. Demnach war die Summe der beiden Kapitalien $\frac{1692{,}90}{19}\times 200=17820$ *M*. Da nun nach der vorhergehenden Auflösung das erste Kapital 2700 *M* größer war, so betrug das zweite Kapital $\frac{1}{2}(17820-2700)=7560$ *M* und das erste $7560+2700=10260$ *M*.

42. Das eine Kapital betrage x *Fl* und das andere y *Fl*, so bringt $\frac{1}{4}$x in 6 Jahren à $3\frac{3}{4}$ pCt. $\frac{6\times 3\frac{3}{4}}{4\times 100}x=\frac{9}{160}$ *Fl* Zinsen und $\frac{2}{5}$y bringt in 6 Jahren à $4\frac{1}{4}$ pCt. $\frac{6\times 4\frac{1}{4}\times 2}{5\times 100}y=\frac{51}{500}y$ *Fl* Zinsen. Es ist also:

$\frac{9}{160}x+\frac{51}{500}y=327\frac{9}{10}$ oder (1) $225x+408y=1311600$.

Der Rest des ersten Kapitals $=\frac{3}{4}$x bringt in 2 Jahren à $5\frac{1}{2}$ pCt. $\frac{2\times 5\frac{1}{2}\times 3}{4\times 100}x=\frac{33}{400}x$ *Fl* Zinsen und der Rest des zweiten Kapitals $=\frac{3}{5}$y à $4\frac{3}{4}$ pCt. bringt in 2 Jahren $\frac{2\times 4\frac{3}{4}\times 3}{5\times 100}y=\frac{57}{1000}y$, Es ist demnach:

$\frac{33}{400}x+\frac{57}{1000}y=277\frac{1}{5}$ oder (2) $165x+114y=554400$.

Hieraus folgt $x=1840$ *Fl* das erste Kapital, und $y=$ 2200 *Fl* das zweite Kapital.

Zweite Auflösung. Die beiden Kapitalien geben in 6 Jahren $327\frac{9}{10}$ *Fl* Zinsen, also in 1 Jahre $327\frac{9}{10}:6=$ $54\frac{13}{20}$ *Fl*. Nun gebe $\frac{1}{4}$ des ersten Kapitals in einem Jahre x *Fl* Zinsen, so giebt $\frac{2}{5}$ des zweiten Kapitals $54\frac{13}{20}-x$ *Fl* Zinsen. Demnach ist $\frac{1}{4}$ des Kapitals $\frac{100}{3\frac{3}{4}}x=\frac{80}{3}x$ und $\frac{2}{5}$ des zweiten $\frac{100(54\frac{13}{20}-x)}{4\frac{1}{4}}=\frac{400(54\frac{13}{20}-x)}{17}$ *Fl* groß. Im

zweiten Falle ist, das erste Kapital 3mal so groß, also $3 \cdot \frac{80}{3}x = 80x$ und das zweite $1\frac{1}{2}$mal so groß, also

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{400(54\frac{13}{20}-x)}{17} = \frac{600(54\frac{13}{20}-x)}{17} \; Fl.$$

Das Kapital von $80x$ *Fl* à $5\frac{1}{2}$ pCt. bringt $\frac{80x}{100} \cdot 5\frac{1}{2} = \frac{22}{5}x$ *Fl*, und $\frac{600(54\frac{13}{20}-x)}{17}$ à $4\frac{3}{4}$ pCt. bringen $\frac{600(54\frac{13}{20}-x)}{100 \cdot 17} \cdot 4\frac{3}{4} = \frac{57(54\frac{13}{20}-x)}{34}$ *Fl* Zinsen. Beide Kapitalien bringen also im zweiten Falle in einem Jahre $\frac{22}{5}x + \frac{57(54\frac{13}{20}-x)}{34}$ *Fl*, und weil dieselben in zwei Jahren $277\frac{1}{5}$, also in einem Jahre $138\frac{3}{5}$ *Fl* einbringen, so ist:

$$\frac{22}{5}x + \frac{57(54\frac{13}{20}-x)}{34} = 138\frac{3}{5}.$$

Hieraus folgt $x = 17\frac{1}{4}$ *Fl*, demnach bringt $\frac{1}{4}$ des ersten Kapitals in 1 Jahre $17\frac{1}{4}$ *Fl*, mithin beträgt $\frac{1}{4}$ desselben $\frac{17\frac{1}{4}}{3\frac{3}{4}} \cdot 100 = 460$ *Fl* und daher das ganze Kapital $4 \cdot 460 = 1840$ *Fl*. Nun betragen die Zinsen von $\frac{2}{5}$ des zweiten Kapitals $54\frac{13}{20} - 17\frac{1}{4} = 37\frac{2}{5}$ *Fl*; daher machen $\frac{2}{5}$ desselben $\frac{37\frac{2}{5}}{4\frac{1}{4}} \cdot 100 = 880$ *Fl*; also beträgt das ganze Kapital

$$880 + 1\frac{1}{2} \cdot 880 = 2200 \; Fl.$$

43. α) Das Liter der schlechtern Sorte koste x *M* und das Liter der bessern y *M*, so ist:

(1) $9x+7y=(9+7)\times 1\frac{3}{8}$; (2) $3x+5y=(3+5)\times 1{,}45$.

Also $x=1{,}20$ *M*, $y=1{,}60$ *M*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Mischt er 9 *l* der schlechtern Sorte mit 7 *l* der bessern, so kosten diese $9+7=16$ *l* $16\times 1\frac{3}{8}=22$ *M*. Mischt er dagegen 3 *l* der schlechtern Sorte mit 5 *l* der bessern, so kosten diese $(3+5)=8$ *l* $8\times 1{,}45=11{,}60$ *M*. Demnach kosten 12 *l* der schlechtern nebst 12 *l* der bessern $22+11{,}60=33{,}60$ *M*; folglich kostet 1 *l* der schlechtern nebst 1 *l* der bessern Sorte 2,80 *M*. Mischt er also 3 *l* der schlechtern mit 3 *l* der bessern Sorte, so kosten diese $3\times 2{,}80=8{,}40$ *M*, folglich 1 *l* der bessern Sorte 1,60 *M* und 1 *l* der schlechtern Sorte $2{,}80-1{,}60=1{,}20$ *M*.

β) Setzt man für die Zahlen 9, 7, $1\frac{3}{8}$, 3, 5, 1,45 der vorigen Aufgabe die allgemeinen Zeichen a, b, p, c, d, q, so ist, wenn x und y denselben Wert wie dort haben:

(1) $ax+by=p(a+b)$,

(2) $cx+dy=q(c+d)$.

folglich $x=\frac{(c+d)bq-(a+b)dp}{bc-ad}$ Preis der schlechtern Sorte,

und daher $y=\frac{(a+b)cp-(c+d)aq}{bc-ad}$ Preis der bessern Sorte.

44. Das Kleid sei zu x und die Schuhe zu y *Fl* berechnet worden; dann war der ganze Lohn jeder Magd $40+x+y$ für 12 Monate, also für 1 Monat $\frac{1}{12}(40+x+y)$ *Fl*. Die erste Magd ist 8 Monate im Dienste gewesen und mußte sonach $\frac{2}{3}(40+x+y)$ *Fl* Lohn erhalten. Da sie für diese Zeit $26\frac{1}{2}$ *Fl* an Geld und das Kleid, also $(26\frac{1}{2}+x)$ *Fl* erhielt, so ist:

$$(1)\ \frac{2}{3}(40+x+y)=26\tfrac{1}{2}+x.$$

Die zweite Magd blieb $9\frac{1}{2}$ Mon. im Dienst, wofür ihr $\frac{19}{24}(40+x+y)$ *Fl* an Lohn gebührte; sie erhielt aber $35\frac{1}{2}$ *Fl* an Geld und die Schuhe, also im ganzen $(35\frac{1}{2}+y)$ *Fl*; daher ist:

$$(2)\ \frac{19}{24}(40+x+y)=35\tfrac{1}{2}+y.$$

Hieraus ergiebt sich $x=5\frac{1}{2}$ *Fl* und $y=2\frac{1}{2}$ *Fl*.

Zweite Auflösung vermittels der regula falsi. Wir nehmen an, das Kleid und die Schuhe kosten etwa zusammen 1 *Fl*, so müßte jede Magd jährlich an Lohn 41 *Fl* erhalten. Die erste müßte also für ihre 8 Monate Dienstzeit $\frac{2}{3}.41=27\frac{1}{3}$ *Fl* und die zweite für $9\frac{1}{2}$ Monate $9\frac{1}{2}.\frac{41}{12}=32\frac{11}{24}$ *Fl*, also beide zusammen für ihre Dienstzeit $27\frac{1}{3}+32\frac{11}{24}=59\frac{19}{24}$ *Fl* erhalten. Aber sie erhielten $26\frac{1}{2}+35\frac{1}{2}+1=63$ *Fl*; also ist der erste Fehler $\varphi'=63-59\frac{19}{24}=3\frac{5}{24}$. Sollen Kleid und Schuhe 2 *Fl* kosten, so betrug der jährliche Lohn 42 *Fl*, also der monatliche $3\frac{1}{2}$ *Fl*. Dann müßte die erste Magd für ihre Dienstzeit $8.3\frac{1}{2}=28$ und die zweite $9\frac{1}{2}.3\frac{1}{2}=33\frac{1}{4}$ *Fl*; also beide zusammen $28+33\frac{1}{4}=61\frac{1}{4}$ *Fl* Lohn haben. Sie erhielten aber 64 *Fl*, folglich zweiter Fehler $\varphi''=64-61\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$. Daher ist der wirkliche Preis des Kleides und der Schuhe

$$x=\frac{2.3\frac{5}{24}-1.2\frac{3}{4}}{3\frac{5}{24}-2\frac{3}{4}}=8\ Fl.$$

Jede Magd soll also 48 *Fl* Lohn erhalten. Der ersten gebühren für ihre Dienstzeit 32 *Fl* und der zweiten 38 *Fl*. Erstere erhielt das Kleid und $26\frac{1}{2}$ *Fl* an Geld, sie erhielt also $32-26\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$ *Fl* an Geld weniger. Da sie für Kleid und Schuhe jährlich 8 *Fl* erhalten mußte, das Kleid aber bereits erhalten hatte, so kostete dasselbe $5\frac{1}{2}$ *Fl*. Die zweite bekam $35\frac{1}{2}$ *Fl* und die Schuhe, folglich wurden ihr die Schuhe zu $38-35\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$ *Fl* berechnet.

45. 1 *ccm* Blei wiege x *g* und 1 *ccm* Zinn wiege y *g*, so ist, da 11 *ccm* Zinn ebensoviel wiegen, als 7 *ccm* Blei:

(1) $11y = 7x$.

Wiegen ferner 11 *ccm* Blei und 7 *ccm* Zinn zusammen 175,1 *g*, so ist:

(2) $11x + 7y = 175{,}1$.

Aus den beiden Gleichungen folgt, daß $x = 11{,}33$ *g* und $y = 7{,}21$ *g*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn 11 *ccm* Zinn ebensoviel wiegen als 7 *ccm* Blei, so wiegt 1 *ccm* Zinn ebensoviel als $\frac{7}{11}$ *ccm* Blei. Bestände also diese Masse nur aus Blei, so würden $7 \times \frac{7}{11} + 11 = 15\frac{5}{11}$ *ccm* Blei 175,1 *g* wiegen, also 1 *ccm* $175{,}1 : 15\frac{5}{11} = 11{,}33$ *g* und daher 1 *ccm* Zinn $\frac{7}{11} \times 11{,}33 = 7{,}21$ *g*.

46. Die Ausgaben für die Haushaltung mögen im ersten Jahre x *M* und für die Steuern y *M* betragen haben, dann hatte das Gut, da der Pächter nur 840 *M* Pacht bezahlen konnte, im ersten Jahre $x + y + 840$ *M* aufbringen müssen, und der Pächter blieb $960 - 840 = 120$ *M* schuldig. Wurde im folgenden Jahre das Pachtgeld um 5 pCt. erniedrigt, so betrug es jetzt $960 - 48 = 912$ *M*. Weil auch die Ausgaben für den Haushalt um $\frac{1}{6}$, sowie die Steuern um $\frac{1}{4}$ verringert wurden, so betrugen dieselben fürs zweite Jahr $\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y$ *M*. Der Ertrag des Gutes hatte sich um $\frac{1}{10}$ gegen das vorige Jahr vermehrt, brachte also in diesem Jahre $\frac{11}{10}(x + y + 840)$ *M* ein. Da der Pächter in diesem Falle sowohl die vorigjährige Schuld von 120 *M*, als auch noch einen Ueberschuß von 126 *M* hatte, so mußte ihm das Gut $120 + 126 = 246$ *M* mehr eingebracht haben. Im ganzen war also sein Ertrag $(\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + 912 + 246)$ *M*. Deshalb ist:

(1) $\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + 1158 = \frac{11}{10}(x + y + 840)$.

Im 3. Jahre vermehrt sich das Pachtgut noch um $\frac{1}{8}$ des Ertrages des zweiten Jahres, bringt also $\frac{99}{80}(x + y + 840)$ *M* ein. Zudem vermehren sich seine Ausgaben für die Haushaltung um $\frac{1}{10}$ der Ausgaben des zweiten Jahres, weshalb sich diese jetzt auf $\frac{11}{12}x$ *M* belaufen; hierzu die Steuern im Betrage von $\frac{3}{4}y$ *M* macht $\frac{11}{12}x + \frac{3}{4}y$. Da er nun noch 417 *M* übrig behielt, so war der sämtliche Ertrag des Gutes in diesem Jahre $\frac{11}{12}x + \frac{3}{4}y + 912 + 417$. Es ist also

(2) $\frac{11}{12}x + \frac{3}{4}y + 1329 = \frac{99}{80}(x + y + 840)$.

Hieraus ergiebt sich $x = 720$ und $y = 120$ *M* und der Ertrag des Gutes ist $720 + 120 + 840 = 1680$ *M*.

47. Der eine Körper, den wir mit A bezeichnen wollen, lege in 1 Sekunde x *m* und der andere, B, y *m* in 1 Sekunde zurück, so hat der Körper A nach m Sekunden, wo das Zusammentreffen beider stattfindet, mx *m* und der Körper B my *m* zurückgelegt. Da der Weg, den beide zusammen gemacht haben, d *m* beträgt, so ist also

$$(1)\ mx+my=d \text{ oder } x+y=\frac{d}{m}.$$

Bewegen sich beide Körper aber mit denselben Geschwindigkeiten hintereinander, so muß, soll das Zusammentreffen möglich sein, die Geschwindigkeit des einen größer, als die des andern sein, da die Körper, im Falle dieselben bei einer Entfernung von d *m* sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegten, nie zusammentreffen könnten. Soll demnach das Zusammentreffen nach n Sekunden stattfinden, so gilt es im vorliegenden Falle gleich, ob A sich schneller fortbewege, als B, oder umgekehrt. Nimmt man an, die Geschwindigkeit von A sei größer und er laufe hinter B, so hat A in der Zeit n, nx *m* und B ny *m* gemacht. Der von A durchlaufene Weg ist aber um d *m* größer, als der von B abgemachte, weil beide Körper am Anfange ihrer Bewegung d *m* von einander entfernt waren, daher ist

$$(2)\ nx=ny+d, \text{ oder } nx-ny=d, \text{ oder } x-y=\frac{d}{n},$$

folglich $x=\frac{d(m+n)}{2mn}=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ *m* der Körper A und

$y=\frac{d(n-m)}{2mn}=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ *m* der Körper B.

48. Der erste von A nach B zurückgehende Körper lege in 1 Sekunde x *m* und der zweite von B nach A mit geringerer Geschwindigkeit gehende Körper mache in 1 Sekunde y *m*. Geht der zweite Körper 13 Sekunden später als der erste ab, so hat dieser vor dessen Abgange schon 13x *m* gemacht. 10 Minuten nach dem Abgange des zweiten treffen beide Körper zusammen; alsdann hat der erste (13+10)x=23x *m* und der zweite 10y *m* gemacht; und weil beide zusammen 323 *m* zurückgelegt haben, so ist:

$$(1)\ 23x+10y=323.$$

45 Sekunden nach Abgang des zweiten, also 45+13=58 Sekunden nach Abgang des ersten Körpers treffen beide zum zweitenmale zusammen; alsdann hat der erste 58x *m* und der zweite 45y *m* gemacht. Der erste mit größerer Geschwindigkeit gehende Körper hat nun aber beim zweiten Zusammentreffen mit dem zweiten Körper, vom Anfange seiner Bewegung an, nicht allein den ganzen Weg gemacht von A nach B, sondern auch noch den Weg von B nach A, den der zweite gemacht. Sein zurückgelegter Weg ist also um 323 *m* größer, als der vom zweiten Körper zurückgelegte Weg. Es ist demnach:

$$(2)\ 58x-45y=323,$$

folglich x=11 *m* und y=7 *m*.

Zweite Auflösung. A ——— D ——— B
Der von A nach B gehende Körper treffe nach 23 Sekunden mit dem von B nach A gehenden etwa in D zusammen und nehmen wir an AD=x und DB=y *m*, so legte der erste in 1 Sekunde $\frac{x}{23}$ und der zweite, der zur Abmachung des Weges BD 10 Sekunden gebrauchte, $\frac{y}{10}$ *m* zurück. In 58 Sekunden hat dann der erste $58 \times \frac{x}{23}$ und der zweite in 45 Sekunden $45 \times \frac{y}{10}$ *m* gemacht. Es ist daher

$$(1)\ x+y=323;\ (2)\ \tfrac{58}{23}x-\tfrac{45}{10}y=323.$$

Hieraus folgt x=253 und y=70 *m*; also machte der erste in jeder Sek. 253 : 23=11 *m* und der zweite 70 : 10=7 *m*.

Dritte Auflösung. AD sei wieder=x und DB=y *m*. Um y *m* zu machen, braucht der zweite Körper 10 Sek., um also den ganzen Weg von B nach A=323 *m* abzumachen, hat er $\frac{323}{y} \times 10$ Sek. nötig. Der erste Körper gebraucht $\frac{323}{x} \times 23$ Sek., um den Weg von A nach B zu machen. Nun ist der zweite Körper 45 Sek. lang unterwegs, legt also in dieser Zeit so oftmal den Weg von AB zurück, als $\frac{323}{y} \times 10$ in 45 Sek. enthalten sind, das macht $\frac{45}{323.10}y$mal und der erste legt in 58 Sek. den Weg AB $\frac{58}{323.23}x$mal zurück. Da dieser den Weg einmal mehr gemacht, als der zweite Körper, so ist:

$$(1)\ x+y=323;\ (2)\ \frac{58}{323.23}x-\frac{45}{323.10}y=1,$$

folglich x=253, y=70 *m*. Der erste Körper legt also den Weg AB in $\frac{323}{253} \times 23=29\frac{4}{11}$ Sekunden zurück; folglich in jeder Sekunde $323 : 29\frac{4}{11}=11$ *m*; der zweite gebraucht zum ganzen Wege $\frac{323}{70} \times 10=46\frac{1}{7}$ Sek. und macht daher in 1 Sek. $323 : 46\frac{1}{7}=7$ *m*.

49. Bezeichnet man die Strecke, die der zweite Körper mehr als den Weg von B nach A abgemacht hat, mit x, so hat er beim zweiten Zusammentreffen d+x und der erste Körper 2d+x *m* zurückgelegt; dieser legt dann in 1 Sekunde $\frac{2d+x}{n+t}$ und jener $\frac{d+x}{n}$ *m* zurück. Beim ersten Zusammen-

treffen hat dann der erste $\frac{t+m}{t+n}(2d+x)$ und der zweite $\frac{m}{n}(d+x)$ *m* gemacht, folglich ist:

$$\frac{m+t}{n+t}(2d+x)+\frac{m}{n}(d+x)=d \text{ oder}$$

$$[2mn+t(m+n)]x=dn(n-t)-dm(3n+t); \text{ folglich}$$

$$x=\frac{dn(n-t)-dm(3n+t)}{2mn+t(m+n)};$$ deshalb hat der erste Körper in 1 Sekunde: $\left(2d+\frac{dn(n-t)-dm(3n+t)}{2mn+t(m+n)}\right):(n+t)=\frac{d(m+n)}{2mn+t(m+n)}$ und der zweite $\frac{d(n-m)}{2mn+t(m+n)}$ gemacht.

50. Verläßt der zweite Körper den Ort B t Sekunden früher als der erste, so ist mit Bezug auf die Auflösung in 48 und 49

$$(1)\ (m-t)x+my=d;\ (2)\ (n-t)x-ny=d,$$

folglich $x=\frac{d(m+n)}{2mn-t(m+n)}$ *m* legt der erste Körper in 1 Sekunde zurück und hieraus $y=\frac{d(n-m)}{2mn-t(m+n)}$ *m* legt der zweite Körper in 1 Sekunde zurück.

51. A lege in jeder Stunde x *km* und B y *km* zurück. A hat schon $5\frac{3}{4}$x *km* gemacht, ehe B zu gehen anfängt. Treffen sie nun in $6\frac{1}{8}$ Std. nach Abgang des B zusammen, so hat A $(6\frac{1}{8}+5\frac{3}{4})x=11\frac{7}{8}x$ *km* gemacht, während B nur $6\frac{1}{8}$ *km* zurücklegte. Da der von beiden zurückgelegte Weg $86\frac{1}{4}$ *km* beträgt, so ist

$$(1)\ 11\tfrac{7}{8}x+6\tfrac{1}{8}y=86\tfrac{1}{4}.$$

Geht aber B $5\frac{3}{4}$ Std. früher ab, als A, so macht B in dieser Zeit $5\frac{3}{4}$x *km*. Sie treffen in $5\frac{5}{8}$ Std. nach Abgang des A zusammen, also hat B $(5\frac{5}{8}+5\frac{3}{4})y=11\frac{3}{8}y$ *km* gemacht, während A nur $5\frac{5}{8}$x *km* machte. Da der zurückgelegte Weg derselbe bleibt, so ist

$$(2)\ 11\tfrac{3}{8}y+5\tfrac{5}{8}x=86\tfrac{1}{4}.$$

Hieraus ergiebt sich $x=4\frac{1}{2}$ *km*, die A in jeder Stunde und $y=5\frac{5}{14}$ *km*, die B in jeder Stunde zurücklegte.

52. B lege in jeder Sekunde x *m* und C y *m* zurück. Beim Zusammentreffen hat B (t+m)x und C my *m* gemacht; im zweiten Falle hat B nx und C (u+n)y *m* gemacht. Da sie in jedem Falle zusammen d *m* gemacht haben, so ist:

$$(1)\ (t+m)x+my=d;\ (2)\ nx+(u+n)y=d,$$

folglich $x = \frac{d(u+n-m)}{t(u+n)+mu}$ *m* legt B in 1 Sekunde und $y = \frac{d(t+m-n)}{t(u+n)+mu}$ *m* C in 1 Sek. zurück.

53. Die erste Schleuse schicke x *cbm* und die zweite y *cbm* Wasser in 1 Stunde dem Teiche zu, so hat die erste in 10 Stunden 10x und die zweite in 14 Stunden 14y *cbm* Wasser ausgeschüttet. Da auf diese Weise der Teich, der 9900 *cbm* faßt, angefüllt wird, so ist:

$$(1)\ 10x+14y=9900.$$

Ebenso wird der Teich angefüllt, wenn die erste Schleuse 18x *cbm* Wasser liefert, während durch die zweite Schleuse 12y *cbm* Wasser in den Teich fließen. Es ist daher

$$(2)\ 18x+12y=9900;$$

folglich x=150 und y=600 *cbm*. Beide Schleusen liefern in 1 Stunde 750 *cbm*; folglich müssen sie zur Füllung des Teiches 9900:750=$13\frac{1}{5}$ Stunden lang zusammen fließen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Öffnet man die erste Schleuse 10 und die zweite 14 Std., so wird der Teich voll; eben dasselbe ist der Fall, wenn man die erste 18 Std. und die zweite 12 Std. öffnet. Daraus folgt, daß die erste in 18—10=8 Std. ebensoviel Wasser giebt, als die zweite in 14—12=2 Std. oder durch die zweite Schleuse fließt in 1 Std. ebensoviel Wasser, als durch die erste in 4 Std. Um nun den Teich zu füllen, müßte die erste 10 und die zweite 14 Std. geöffnet sein; wollte man ihn also durch die erste Schleuse allein füllen, so müßte sie 4×14+10=66 Std. lang geöffnet werden. In dieser Zeit fließen 9900 *cbm* Wasser in den Teich; also in 1 Std. 9900:66=150 *cbm*; folglich fließen durch die zweite Schleuse 4×150=600 *cbm*.

54. In derselben Zeit, in welcher A $2\frac{1}{6}$ des Weges macht, macht B nur $1\frac{5}{6}$ des Weges, also verhalten sich die zurückgelegten Wege beider wie $2\frac{1}{6}:1\frac{5}{6}=13:11$; folglich die Geschwindigkeiten wie 11:13. Nun sei die Länge der Bahn x *m*, so hat beim ersten Zusammentreffen der erste x+90 *m* und der zweite x—90 *m* abgemacht. Demnach verhält sich

$$(x+90):(x-90)=13:11,$$

folglich x=1080 *m*.

A gewinnt dem B über dem doppelten Wege 3 Min. ab, also über dem einfachen Wege $1\frac{1}{2}$ Min. Gebraucht A nun über dem Wege y Min., so gebraucht B y+$1\frac{1}{2}$ Min. Demnach verhält sich

$$y:(y+1\tfrac{1}{2})=11:13;$$

folglich y=$8\frac{1}{4}$ Min., mithin war die Dauer des Wettlaufes 2×$8\frac{1}{4}$=$16\frac{1}{2}$ Min., also die Dauer im ganzen $16\frac{1}{2}$+3=$19\frac{1}{2}$ Minuten.

Zweite Auflösung. A mache in y Min. den doppelten Weg, also 2x *m*, so macht er in 1 Min. $\frac{2x}{y}$ *m*. B macht aber in y+3 Min. 2x *m*, also in 1 Min. $\frac{2x}{y+3}$ *m*. Beim Zusammentreffen hatte A x+90 *m* gemacht in $(x+90):\frac{2x}{y}=\frac{y(x+90)}{2x}$ Minuten und B hatte x—90 *m* in $(x-90):\frac{2x}{y+3}=\frac{(y+3)(x-90)}{2x}$ Min. gemacht. Da sie beim Zusammentreffen gleichviel Minuten unterwegs waren, so ist:

$$(1)\quad \frac{y(x+90)}{2x}=\frac{(y+3)(x-90)}{2x}.$$

Wäre A zum zweitenmale vom Ausgangspunkte ausgelaufen, so hätte er beim zweiten Zusammentreffen $2\frac{1}{6}x$ *m* abgemacht, während der zweite erst $1\frac{5}{6}x$ gemacht hätte. Zu den $2\frac{1}{6}x$ *m* gebrauchte A nun $2\frac{1}{6}x:\frac{x}{\frac{1}{2}y}=\frac{13}{12}y$ Min. und B zu $1\frac{5}{6}x$ *m* $1\frac{5}{6}x:\frac{x}{\frac{1}{2}y+1\frac{1}{2}}=1\frac{5}{6}(\frac{1}{2}y+1\frac{1}{2})$ Min. Es ist daher:

$$(2)\quad \frac{13}{12}y=1\frac{5}{6}(\frac{1}{2}y+1\frac{1}{2}).$$

Hieraus folgt $y=16\frac{1}{2}$ Min. und daher $x=1080$ *m*.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die zurückgelegten Wege verhalten sich wie 13 : 11; daraus folgt, daß wenn der erste den ganzen Weg bis B, der zweite nur $\frac{11}{13}$ des Weges abgemacht hat. Da dieser nun $1\frac{1}{2}$ Minute an Zeit mehr gebraucht, als jener, so macht er in $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ Min. $\frac{2}{13}$ des Weges, also in 1 Min. $\frac{4}{39}$ des Weges; folglich gebraucht er zur Zurücklegung des ganzen Weges $1:\frac{4}{39}=\frac{39}{4}$ $=9\frac{3}{4}$ Min., demnach gebrauchte der erste $9\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=8\frac{1}{4}$ Min. zu dem ganzen Wege; also dauerte der Wettlauf $2\times8\frac{1}{4}=16\frac{1}{2}$ Minuten.

Als der erste am Pfahl ankam, hat der zweite noch $\frac{2}{13}$ des Weges zu machen. Der erste macht in $8\frac{1}{4}$ Min. den ganzen Weg, also in 1 Min. $\frac{4}{33}$ des Weges; der zweite macht den ganzen Weg in $9\frac{3}{4}$ Min., also in 1 Min. $\frac{4}{39}$ des Weges; beide machen also in 1 Min. $\frac{4}{33}+\frac{4}{39}=\frac{96}{429}$ des Weges ab. Sie haben nun $\frac{2}{13}=\frac{66}{429}$ des Weges bis zu ihrem Zusammentreffen abzumachen, was daher in $\frac{66}{429}:\frac{96}{429}=\frac{11}{16}$ Min. der Fall sein wird. In diesen $\frac{11}{16}$ Min. hat der erste nun 90 *m* gemacht; also in $\frac{1}{16}$ Min. $8\frac{2}{11}$ *m*, demnach in 1 Min. $16\times8\frac{2}{11}=130\frac{10}{11}$ *m*; folglich beträgt die Länge der Bahn

$$8\frac{1}{4}\times130\frac{10}{11}=1080\ m.$$

Oder: Es fragt sich, wie viel legt der erste auf dem

Rückwege von den $\frac{2}{13}$ des Weges zurück? Von je 13+11=24 Teilen legt er 13 zurück, also macht er von $\frac{2}{13}$ des Weges $(\frac{2}{13}:24)\times 12=\frac{2\times 13}{13\times 24}=\frac{1}{12}$ und da dies 90 *m* ausmacht, so ist die Länge der Bahn 12×90=1080 *m*.

55. Die eine Sorte Silber sei von dem Gehalte x und die andere von dem Gehalte y; dann enthalten 10 *kg* der ersten 10x und 5 *kg* der zweiten Sorte 5y Teile Silber; also sind in 10+5=15 *kg* 10x+5y Teile Silber. Die Mischung von 15 *kg* soll von dem Gehalte $687\frac{1}{2}$ sein, also $15\times 687\frac{1}{2}$ Teile Silber enthalten. Es ist daher:

$$(1)\quad 10x+5y=15\times 687\tfrac{1}{2}.$$

Vermittels derselben Schlüsse erhält man:

$$(2)\quad 7\tfrac{1}{2}x+1\tfrac{1}{2}y=9\times 625.$$

Hieraus ergiebt sich $x=562\frac{1}{2}$ und $y=937\frac{1}{2}$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Mischt man 2 *kg* der ersten Sorte mit 1 *kg* der zweiten Sorte, so enthält das Gemisch $3\times 687\frac{1}{2}=2062\frac{1}{2}$ Teile Silber. Mischt man aber 5 *kg* der ersten mit 1 *kg* der zweiten Sorte, so erhält man Silber von dem Gehalte 6×625=3750; folglich sind in 5−2=3 *kg* der ersten Sorte $3750-2062\frac{1}{2}=1687\frac{1}{2}$ Teile Silber enthalten, also in 1 *kg* $1687\frac{1}{2}:3=562\frac{1}{2}$; daher enthält 1 *kg* der zweiten Sorte $2062\frac{1}{2}-2\times 562\frac{1}{2}=937\frac{1}{2}$ Teile Silber.

56. Der eine Barren betrage x, der andere y *kg*, so ist:

$$(1)\quad x+y=60.$$

Im ersten Barren verhält sich das Silber zum Kupfer wie 9:1 oder wie $\frac{9}{10}:\frac{1}{10}$; also hat dasselbe einen Feingehalt von 900. Im zweiten Barren ist dieses Verhältnis wie 3:1 oder wie $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$, mithin hat dieses einen Feingehalt von 750. Daher ist:

$$(2)\quad 900x+750y=60\times 812\tfrac{1}{2},$$

folglich x=25, y=35 *kg*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Soll das Silber von dem Feingehalt von 900 zu Silber von dem Feingehalt von $812\frac{1}{2}$ gemischt werden, so ergiebt sich ein Verlust von $87\frac{1}{2}$. Das Silber aber vom Feingehalte 750 zu Silber vom Feingehalte $812\frac{1}{2}$ vermischt, giebt einen Ueberschuß von $62\frac{1}{2}$. Nun verhält sich der Verlust zum Ueberschuß wie $87\frac{1}{2}:62\frac{1}{2}$ =7:5. Soll daher der Verlust den Ueberschuß decken, so muß man zu 12 *kg* Gemisch so oft 5 *kg* vom Feingehalte von 900 nehmen, als 7 *kg* vom Feingehalte von 750. Demnach bestehen die 60=12.5 *kg* aus 5.5=25 *kg* vom Feingehalte von 900 und aus 5.7=35 *kg* vom Feingehalte 750.

57. Das Meter Tuch koste x *M* und das Zwanzigfrancstück

gelte y ℳ, so kosten 120 *m* 120x ℳ und da der Kaufmann diesen Kaufpreis mit 54y+317,10 ℳ bezahlt, so ist:

$$(1)\ 120x=54y+317,10.$$

Verkauft er 1 *m* mit 18 pCt. Gewinn, so löst er aus 1 *m*, das ihm x ℳ kostet, 1,18x ℳ, also aus 84 *m* 84×1,18x ℳ. Verkauft er von dem Reste von 35 *m* das Meter mit $12\frac{1}{2}$ pCt. Gewinn, so gewinnt er an jedem Meter $\frac{1}{8}$ des Einkaufspreises, löst also daraus $1\frac{1}{8}x$ ℳ; also aus 36 *m* $36\times1\frac{1}{8}x$ ℳ. Die 120 *m* verkauft er demnach zu dem Preise von $84\times1,18x+36\times1\frac{1}{8}x$ ℳ. Da der Erlös im ganzen 62 Zwanzigfrancstück = 62y ℳ und 382,5 ℳ beträgt, so ist:

$$(2)\ 84\times1,18x+36\times1\tfrac{1}{8}x=62y+382,5.$$

Aus (1) und (2) folgt x=10 ℳ, y=16,35 ℳ.

58. Die erste Ware, die er an B verkauft, koste x ℳ und die zweite y ℳ, so muß B für die erste, da der Verkäufer daran 8 pCt. gewinnt, $\frac{108}{100}x$ ℳ, und für die zweite, wobei sich ein Verlust von 12 pCt. ergiebt, $\frac{88}{100}y$ ℳ bezahlen. Der Verkäufer löst also aus den an B abgesetzten Waren $\frac{108x+88y}{100}$ ℳ. Da er auf diese Weise 20 ℳ mehr erhält, als ihm beide Waren gekostet, so ist:

$$(1)\ \frac{108x+88y}{100}=x+y+20.$$

Verkauft er an C dreimal so viel von der ersten und siebenmal so viel von der zweiten Ware, als er an B abgelassen, so kosten ihm die Waren 3x und 7y ℳ und er löst aus der ersten $\frac{108\times3}{100}x$ ℳ und aus der zweiten $\frac{88\times7}{100}y$ ℳ. Im ganzen muß C demnach $\frac{324x+616y}{100}$ ℳ bezahlen. An diesem Verkaufspreise ergiebt sich aber ein Schaden von 84 ℳ; mithin hätte er, wenn er schadlos bleiben sollte, $\left(\frac{324x+616y}{100}+84\right)$ ℳ erhalten müssen.

Es ist daher:

$$(2)\ \frac{324x+616y}{100}+84=3x+7y.$$

Es folgt hieraus x=700 ℳ und y=309 ℳ.

B mußte demnach für die erste Ware 108×7=756 ℳ und für die zweite Ware 88×3=264 ℳ bezahlen.

Zweite Auflösung. B habe für die erste Ware x ℳ, und für die zweite y ℳ bezahlt, so löste der Kaufmann (x+y) ℳ. An dem Verkaufspreise der ersten Ware gewinnt

er 8 pCt., also kostet sie $\frac{100}{108}$x ℳ; er verliert dagegen an dem Verkaufspreise der zweiten Ware 12 pCt.; also kostet sie ihm $\frac{100}{88}$y ℳ. Beide Partien zusammen kosten ihm also $(\frac{100}{108}x+\frac{100}{88}y)$ ℳ. Da er im ganzen 20 ℳ gewinnt, so ist:

$$(1)\quad \frac{100}{108}x+\frac{100}{88}y+20=x+y.$$

Die an C abgesetzten Waren kosten dem Verkäufer $\frac{3\times 100}{108}x$ ℳ und $\frac{7\times 100}{88}y$ ℳ und er erhält dafür $(3x+7y)$ ℳ. Da der Verkaufspreis jedoch 84 ℳ weniger beträgt, als der Einkaufspreis der Ware, so ist:

$$(2)\quad \frac{300}{108}x+\frac{700}{88}y=3x+7y+84.$$

Hieraus ergiebt sich $y=264$ ℳ und $x=756$ ℳ.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Durch das Einfache dessen, was der Kaufmann an B verkauft, erwächst ihm ein Nutzen von 20 ℳ; also hätte ihm, wenn er von jeder Ware an C für das 3fache verkaufte, ein Nutzen von $3\times 20=60$ ℳ erwachsen müssen. Nun hat er aber für den 7fachen Betrag von der zweiten Ware an C verkauft, also das 4fache mehr und dadurch einen Schaden erlitten von 84 ℳ. Der 4fache Preis der zweiten Ware hat also nicht nur die 60 ℳ Nutzen absorbiert, sondern auch noch den Schaden von 84 ℳ herbeigeführt, also im ganzen eine Einbuße von $60+84=144$ ℳ verursacht. An je 100 ℳ Einkaufspreis der zweiten Ware büßt er im Verkaufe 12 ℳ ein, folglich stellen die 144 ℳ Einbuße ein Kapital von $\frac{144}{12}\times 100=1200$ ℳ dar, welches das 4fache von dem ausmacht, was er von der zweiten Ware an C absetzte; demnach betrug das Siebenfache $1\frac{3}{4}\times 1200=2100$ ℳ; also das Einfache 300 ℳ. So viel kostet ihm demnach die zweite Ware, die er an B absetzte. Nun hatte er an je 100 ℳ, die ihm die erste Ware kostete, einen Gewinn von 8 ℳ, und an je 100 ℳ, welche die zweite kostet, einen Schaden von 12 ℳ. Da ihm nun durch die 300 ℳ für die zweite Ware ein Schaden von $3\times 12=36$ ℳ erwächst, er aber bei dem mit B gemachten Geschäfte 20 ℳ Gewinn hatte, so mußte ihm der Verkauf der ersten Ware $36+20=56$ ℳ Gewinn einbringen, welche ein Kapital von $\frac{56}{8}\times 100=700$ ℳ ausmachen. B zahlte also für die erste Ware $700+56=756$ ℳ und für die zweite $300-36=264$.

59. A habe x *Fl* und B y *Fl* Kapital zum gemeinschaftlichen Handel hergegeben. Hat A sein Geld 4 Monate und B 5 Monate in der Handlung gehabt, so hat A mit 4x *Fl* und B mit 5y *Fl* einen Monat lang gehandelt. Mit $(4x+5y)$ *Fl* gewinnen sie 3458 *Fl*, also mit 1 *Fl* $\frac{3458}{4x+5y}$ *Fl*.

Schließt man bei den folgenden Einlagen und dem Gewinne ebenso, so ergiebt sich, daß sie beim zweiten Handel mit 1 *Fl* $\frac{3591}{7x+4y}$ *Fl* und beim dritten Handel mit 1 *Fl* $\frac{7651}{7\frac{3}{4}(x+500)+11y}$ *Fl* gewannen. Weil bei allen drei Geschäften der Gewinn verhältnismäßig gleich groß ist, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{3458}{4x+5y}=\frac{3591}{7x+4y};$$

$$(2)\quad \frac{7651}{7\frac{3}{4}(x+500)+11y}=\frac{3458}{4x+5y}.$$

Hieraus folgt x=3100 *Fl* Einlage des A und y=7400 *Fl* Einlage des B.

Zweite Auflösung. A habe in 4 Monaten x *Fl* und B in 5 M. y *Fl* gewonnen, so ist, da sie zusammen in dieser Zeit 3458 *Fl* gewonnen haben,

$$(1)\quad x+y=3458.$$

In 4 M. gewinnt A x, also in 7 M. $1\frac{3}{4}$x und B in 5 M. y, also in 4 M. $\frac{4}{5}$y *Fl*, und weil sie in dieser Zeit 3591 *Fl* gewonnen haben, so ist:

$$(2)\quad 1\tfrac{3}{4}x+\tfrac{4}{5}y=3591.$$

Aus (1) und (2) ergiebt sich x=868 *Fl* und y=2590 *Fl*.

Demnach gewinnt A in 1 M. 868 : 4=217 *Fl* und B 2590 : 5=518 *Fl*. In $7\frac{3}{4}$ M. gewann also A $7\frac{3}{4}\times217=1681\frac{3}{4}$ *Fl*, und B in 11 M. $11\times518=5698$ *Fl*, also zusammen gewannen sie in der angegebenen Zeit $1681\frac{3}{4}+5698=7379\frac{3}{4}$ *Fl*; mithin gewann A mit 500 *Fl* $7651-7379\frac{3}{4}=271\frac{1}{4}$ *Fl* in $7\frac{3}{4}$ Monat, also in 1 Monat $271\frac{1}{4}:7\frac{3}{4}=35$ *Fl*; folglich betrug sein Kapital $\frac{217}{35}\times500=3100$ *Fl* und da B in gleichem Verhältnisse verdiente, wie A, so betrug das Kapital des B $\frac{518}{35}\times500=7400$ *Fl*.

60. In dem hinzugesetzten Metallgemische von 200 *kg* seien x Teile Zink, y Teile Kupfer und z Teile Zinn, so ist:

$$(1)\quad x+y+z=200.$$

Wird dieses Gemisch von 200 *kg* zu einem andern von 300 *kg* gesetzt, welches aus 2 Teilen Zink, 3 Teilen Kupfer und 4 Teilen Zinn besteht, folglich $66\frac{2}{3}$ *kg* Zink, 100 *kg* Kupfer und $133\frac{1}{3}$ *kg* Zinn enthält, so sind in der hierdurch entstandenen Legierung $(x+66\frac{2}{3})$ *kg* Zink, (y+100) *kg* Kupfer und $(z+133\frac{1}{3})$ *kg* Zinn; und weil dieselben sich verhalten wie 3 : 4 : 5, so ist:

$$(x+66\tfrac{2}{3}):(y+100):(z+133\tfrac{1}{3})=3:4:5.$$

Hieraus erhält man:

$(x+66\frac{2}{3}):(y+100)=3:4$, oder (2) $4x-3y=33\frac{1}{3}$.
$(y+100):(z+133\frac{1}{3})=4:5$, oder (3) $5y-4z=33\frac{1}{3}$.

Hieraus folgt $x=58\frac{1}{3}$ Teile Zink; $y=66\frac{2}{3}$ Teile Kupfer und $z=75$ Teile Zinn.

Die hinzugekommenen Metalle verhalten sich demnach zu einander wie: $58\frac{1}{3}:66\frac{2}{3}:75=7:8:9$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. 2 Teile Zink +3 Teile Kupfer +4 Teile Zinn =9 Teile. Diese sind in 300 *kg* $=33\frac{1}{3}$mal enthalten, folglich bestehen die 300 *kg* Gemisch aus $2\times33\frac{1}{3}=66\frac{2}{3}$ *kg* Zink, $3\times33\frac{1}{3}=100$ *kg* Kupfer und $4\times33\frac{1}{3}=133\frac{1}{3}$ *kg* Zinn. In $300+200=500$ *kg* sind 3 Teile Zink +4 Teile Kupfer +5 Teile Zinn =12 Teile. Diese sind in 500 *kg* $41\frac{2}{3}$mal enthalten; folglich bestehen die 500 *kg* Gemisch aus $3\times41\frac{2}{3}=125$ *kg* Zink, $4\times41\frac{2}{3}=166\frac{2}{3}$ *kg* Kupfer und $5\times41\frac{2}{3}=208\frac{1}{3}$ *kg* Zinn. Mithin sind hinzugekommen $125-66\frac{2}{3}=58\frac{1}{3}$ *kg* Zink, $166\frac{2}{3}-100=66\frac{2}{3}$ *kg* Kupfer und $208\frac{1}{3}-133\frac{1}{3}=75$ *kg* Zinn und diese hinzugekommenen Metalle stehen in dem Verhältnisse

$$58\tfrac{1}{3}:66\tfrac{2}{3}:75, \text{ oder } 7:8:9.$$

61. Das Faß enthalte x Quart, und 1 *l* sei $=y$ pr. Quart, so ist, da das volle Faß 465 Quart und $532\frac{1}{2}$ *l* enthält,

$$(1)\quad 465+532\tfrac{1}{2}y=x.$$

Da ferner ein Sechstel des Fasses durch 31 Quart und 142 *l* angefüllt wird, so ist:

$$(2)\quad 31+142y=\tfrac{1}{6}x.$$

Hieraus erhält man $y=\frac{62}{71}$ pr. Quart. Es stehen also Quart und Liter in dem Verhältnisse wie 71:62. Substituiert man den für y gefundenen Wert, so erhält man $x=930$ Quart.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Wenn 31 pr. Quart und 142 *l* den sechsten Teil des Fasses füllen, so füllen $6\times31=186$ pr. Quart und $6\times142=852$ *l* das ganze Faß. Da nun auch 465 Quart und $532\frac{1}{2}$ *l* dasselbe füllen, so müssen auch $852-532\frac{1}{2}=319\frac{1}{2}$ *l* soviel betragen, als $465-186=279$ Quart, folglich 1 *l* $279:319\frac{1}{2}=\frac{62}{71}$ Quart, und das Faß enthält

$$186+852\times\tfrac{62}{71}=186+744=930 \text{ Quart.}$$

62. Das Schiff lege aufwärts in der Zeiteinheit x Meilen, und abwärts in der Zeiteinheit y Meilen zurück, so hat es a Meilen in $\frac{a}{x}$ Zeiteinheiten und b Meilen in $\frac{b}{y}$ Zeiteinheiten abgemacht. Da es nun a Meilen aufwärts und b Meilen abwärts in t Zeiteinheiten gemacht, so ist:

$$(1)\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=t. \quad \text{Ebenso findet man (2)} \quad \frac{a'}{x}+\frac{b'}{x}=t'.$$

$$\text{Hieraus folgt } x=\frac{a'b-ab'}{bt'-b't} \text{ und } y=\frac{a'b-ab'}{a't-at'}.$$

Es lege nun das Schiff in der Zeiteinheit in einem

ruhigen Wasser allein durch die Kraft seiner Maschine x′ Meilen, und ohne Maschine, blos durch den Strom getrieben, y′ Meilen zurück, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}x=y'-y'\\ y=x'+y'\end{array}\right\}\text{ oder } x'=\tfrac{1}{2}(x+y) \text{ und } y'=\tfrac{1}{2}(y-x).$$

Setzt man hierin die Werte für x und y, so ist:

$$x'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a'b-ab'}{bt'-b't}+\frac{a'b-ab'}{a't-at'}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(a't-at')+(bt'-b't)}{(a't-at')(bt'-b't)}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b-a)t'-(b'-a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}$$

$$y'=\tfrac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b+a)t'-(b'+a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}.$$

Zweite Auflösung. Das Schiff lege durch die Kraft der Maschine im ruhigen Wasser in der Zeiteinheit x Meilen zurück, und der Strom treibe das Schiff in der Zeiteinheit um y Meilen vorwärts. Im wirklich bewegten Wasser wirken Maschine und Wasserkraft zusammen; also legt das Schiff im Strome in der Zeiteinheit abwärts x+y und in der Zeiteinheit aufwärts x—y Meilen zurück. Da das Schiff nun aufwärts in der Zeiteinheit x—y Meilen macht, so macht es 1 Meile in $\frac{1}{x-y}$ Zeit, also a Meilen in $\frac{a}{x-y}$ Zeit aufwärts. Das Schiff bewegt sich auf und ab in der Zeit t; wenn es also in $\frac{a}{x-y}$ Zeit aufwärts fährt, so braucht es $\left(t-\frac{a}{x-y}\right)$ Zeit bei der Herabfahrt. Fährt aber das Schiff abwärts, so legt es in der Zeiteinheit x+y Meilen zurück; folglich in $\left(t-\frac{a}{x-y}\right)$ Zeit $(x+y)\left(t-\frac{a}{x-y}\right)$ Meilen. Der abwärts zurückgelegte Weg beträgt also $(x+y)\left(t-\frac{a}{x-y}\right)$ Meilen, welche nach der Aufgabe b Meilen gleich sind.

Es ist daher

$$(1)\quad (x+y)\left(t-\frac{a}{x-y}\right)=b.$$

Auf dieselbe Weise findet man ebenfalls:

$$(2)\quad (x+y)\left(t'-\frac{a'}{x-y}\right)=b'.$$

Dividiere (1) durch (2) und entwickele die erhaltene Gleichung, so hat man:

$$(3)\quad x-y=\frac{a'b-ab'}{bt'-b't}.$$

Setze diesen Wert für x—y in (1) und entwickele diese Gleichung, so ist:

$$(4)\quad x+y=\frac{a'b-ab'}{a't-a't}.$$

Aus (3) und (4), worin Summe und Differenz der Unbekannten gegeben ist, erhält man:

$$x=\tfrac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b-a)t'-(b'-a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}$$

$$y=\tfrac{1}{2}(a'b-ab')\frac{(b+a)t'-(b'+a')t}{(a't-at')(bt'-b't)}.$$

63. Der Garten sei x *m* lang und y *m* breit. Giebt man jedem der sechs gleichen Teile, worin der ganze Garten geteilt ist, zur Länge $\frac{1}{3}$ der Länge und zur Breite die Hälfte der Breite des ganzen Gartens, so haben die zwei zusammenstoßenden Seiten jedes Teiles eine Größe von $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)$ *m*; folglich der Umfang jedes Teiles $=2(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)$ und da dieser nach der Aufgabe 216 *m* beträgt, so ist:

$$(1)\quad 2(\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{2}y)=216.$$

Nimmt man aber zur Länge die Hälfte der Länge und zur Breite $\frac{1}{3}$ der Breite des Gartens, so beträgt der Umfang jedes der sechs Teile $2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)$ *m*, und weil derselbe in diesem Falle 224 *m* groß ist, so ist:

$$(2)\quad 2(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}y)=224.$$

Hieraus erhält man

$$x=144 \text{ und } y=120\ m.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Man denke sich die Länge und Breite des Gartens in 6 gleiche Teile geteilt. Nimmt man zu jedem Teile, worin die Fläche des Gartens geteilt werden soll, zur Länge $\frac{2}{6}$ der Länge und zur Breite $\frac{3}{6}$ der Breite des Gartens, so beträgt der halbe Umfang 216:2 =108 *m*. Nimmt man aber zu jedem Teile zur Länge $\frac{3}{6}$ der Länge und zur Breite $\frac{2}{6}$ der Breite des Gartens, so beträgt der halbe Umfang 224 : 2=112 *m*. Dadurch also, daß man im zweiten Falle jedem Teile $\frac{1}{6}$ der Länge des Gartens mehr zur Länge gegeben hat, ist der halbe Umfang um 112—108=4 *m* länger geworden, woraus folgt, daß $\frac{1}{6}$ der Länge des Gartens $\frac{1}{6}$ der Breite desselben um 4 *m* übersteigt; folglich beträgt die ganze Länge des Gartens 6×4=24 *m* mehr als die Breite; ebenso folgt daraus, daß $\frac{5}{6}$ der Länge soviel ausmacht, als die ganze Breite. Da nun $\frac{1}{6}$ der Länge 24 *m* ist, so ist die ganze Länge 6×24= 144 *m* und die Breite 5×24=120 *m*.

64. Nach der vorhergehenden Auflösung ist:

$$2\left(\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y\right)=m \text{ oder (1) } \frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y=\frac{m}{2}$$

$$2\left(\frac{1}{b}x+\frac{1}{a}y\right)=n \text{ oder (2) } \frac{1}{b}x+\frac{1}{a}y=\frac{n}{2}.$$

Addiert man beide Gleichungen, so hat man:

$$\frac{a+b}{ab}x+\frac{a+b}{ab}y=\frac{m+n}{2} \text{ oder (3) } \frac{1}{ab}x+\frac{1}{ab}y=\frac{m+n}{2(a+b)}.$$

Subtrahiert man (1) von (2), so ist:

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)x+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)y=\frac{n-m}{2} \text{ oder}$$

$$(4)\ \frac{1}{ab}x-\frac{1}{ab}y=\frac{n-m}{2(a-b)}.$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$x=\frac{ab(an-bm)}{2(a+b)(a-b)}=\frac{ab(an-bm)}{2(a^2-b^2)}$$

$$\text{und } y=\frac{ab(am-bn)}{2(a+b)(a-b)}=\frac{ab(am-bn)}{2(a^2-b^2)}.$$

65. Der Landwirt habe x Ochsen, und sein Futter reiche y Tage aus, so kommt 1 Ochs mit demselben Futtervorrate xy Tage aus. Verkauft er 75 Ochsen, so kommen die übrigen $x-75$ Ochsen $y+20$ Tage, also 1 Ochs $(x-75)(y+20)$ Tage aus. Es ist daher:

$$(x-75)(y+20)=xy, \text{ oder (1) } 4x-15y=300.$$

Kauft er dagegen 100 Ochsen hinzu, so kommen die $x+100$ Ochsen nur $y-15$ Tage, also 1 Ochs $(x+100)(y-15)$ Tage aus: mithin ist

$$(x+100)(y-15)=xy, \text{ oder (2) } 20y-3x=300.$$

Hieraus ergiebt sich, daß $y=60$ Tage und $x=300$ Ochsen.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Schafft man 75 Ochsen ab, so reicht der Vorrat 20 Tage länger aus; kauft man zu den vorhandenen noch 100 Ochsen hinzu, so reicht derselbe 15 Tage weniger aus. Nun verhalten sich die abzuschaffenden Ochsen zu den anzuschaffenden wie 75 : 100 oder wie 3 : 4, und die bezüglichen Zeiten wie 20 : 15 oder 4 : 3, d. h. durch die 100 Ochsen wird aus $\frac{3}{3}$ der Anzahl der Ochsen $\frac{4}{3}$ derselben, also $\frac{1}{3}$ der Ochsen mehr, welches 100 ausmacht; also sind $3\times100=300$ Ochsen vorhanden. Während man ferner bei der Abschaffung der 75 Ochsen $\frac{4}{4}$ der Zeit ausreicht, reicht man bei der Anschaffung von 100 Ochsen nur $\frac{3}{4}$ der Zeit, also $\frac{1}{4}$ der Zeit weniger aus. Da dasselbe 15 Tage beträgt, so reicht der vorhandene Vorrat auch $4\times15=$ 60 Tage aus.

66. Die Anzahl der Arbeiter sei x und der Lohn eines jeden

betrage y ℳ, so verdienen x Arbeiter xy ℳ. Kommen 7 Arbeiter hinzu und erhält jeder 25 ₰ mehr, so beträgt der verdiente Lohn $(x+7)(y+0{,}25)$ ℳ. Da in diesem Falle der Lohn um 18,65 ℳ größer ist, so haben wir: $(x+7)(y+0{,}25)=xy+18{,}65$ oder (1) $0{,}25x+7y=16{,}90$. Wären aber 4 Arbeiter weniger und erhielte jeder 0,15 ℳ weniger, so haben x—4 Arbeiter $(x-4)(y-0{,}15)$ ℳ verdient. Weil ihnen aber in diesem Falle 9,20 ℳ weniger zu Teil wird, so ist:

$(x-4)(y-0{,}15)=xy-9{,}20$ oder (2) $0{,}15x+4y=9{,}80$. Folglich $x=20$ Arbeiter, $y=1{,}70$ ℳ als Lohn.

67. Die erste Röhre gebe in 1 Minute x *l*; so giebt die zweite $(x-4)$ *l*. Ferner sei die Zeit, in welcher beide Röhren zusammenfließen, y Minuten. Wird die erste Röhre 1 Stunde = 60 Minuten eher geöffnet, als die zweite, so fließen $(60+y)x$ *l* in den Wasserbehälter, während die zweite den Behälter um $(x-4)y$ *l* ausleert. Da nun 1760 *l* mehr ein- als auslaufen, so ist:

$(60+y)x=(x-4)y+1760$, oder (1) $15x+y=440$.

Wird hingegen die zweite Röhre 60 Minuten früher geöffnet als die erste, so leert sie den Behälter um $(60+y)\times(x-4)$ *l*, während die erste ihn in y Minuten um xy *l* anfüllt. Weil nun aber der Behälter halb so viel verliert, als er im ersten Falle erhält, so müssen notwendig $\frac{1760}{2}=880$ *l* mehr aus- als eingelaufen sein; daher ist:

$(60+y)(x-4)=xy+880$, oder (2) $15x-y=280$.

Hieraus folgt $x=24$ *l*, welche die erste Röhre, und daher 20 *l*, welche die zweite Röhre giebt; ferner ist $y=80$ Min., die Zeit, in welcher beide Röhren zusammenfließen. Im ersten Falle war die erste Röhre $60+80=140$ Minuten $=2$ Stunden 20 Minuten geöffnet und die zweite 1 Stunde 20 Min.; umgekehrt im zweiten Falle.

Zweite Auflösung. Beide Röhren seien x Minuten zusammen geöffnet. Bestimmt man nun, wie viel Liter aus- und eingeflossen sind, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{(x+60)(1520-4x)}{60}-\frac{(1760-4x)x}{60}=880;$$

also $x=80$ Minuten und deshalb flossen durch die erste Röhre $\frac{1760-4\,.\,80}{60}=24$ *l* und durch die zweite $24-4=20$ *l* in jeder Minute u. s. w.

68. Es seien x *m* von y *m* Breite zum ersten Kleide erforderlich, so betrug die Fläche des Tuches xy *qm*. Zum zweiten Kleide hat er $(x+2)$ *m* à $(y-\frac{1}{3})$ *m* Breite nötig; also beträgt die Fläche des Tuches in diesem Falle $(x+2)(y-\frac{1}{3})$ *qm*.

Da in beiden Fällen die Kleider, die aus dem Tuche gemacht werden, eben groß sind, so ist auch zu jedem ebenviel erforderlich. Es ist daher:

$$(1)\ (x+2)(y-\tfrac{1}{3})=xy.$$

Zum dritten Kleide gebraucht man $2\frac{2}{3}$ *m* weniger, als zum zweiten, also hat man zu jenem $(x+2)-2\frac{2}{3}=(x-\frac{2}{3})$ *m* nötig, da das Tuch $\frac{1}{2}$ *m* breiter ist; seine Breite beträgt daher $(y-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}=y+\frac{1}{6}$ und mithin sein Flächeninhalt $(x-\frac{2}{3})(y+\frac{1}{6})$ *qm*. Daher ist:

$$(2)\ (x-\tfrac{2}{3})(y+\tfrac{1}{6})=xy.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt, daß $x=6$ *m* und $y=1\frac{1}{3}$ *m*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Zum zweiten Kleide gebraucht man 2 *m* mehr als zum ersten, und zum dritten $2\frac{2}{3}$ *m* weniger, als zum zweiten; wo man also im ersten Falle $\frac{3}{3}$ der *m* mehr gebraucht, hat man im zweiten Falle $\frac{4}{3}$ der *m* wenigernötig, woraus folgt, daß man zum dritten Kleide $\frac{1}{3}$ der *m* des zweiten Kleides weniger gebraucht; dies macht $2\frac{2}{3}$ *m*; folglich hat man zum zweiten Kleide $3\times2\frac{2}{3}=8$ *m* nötig; daher zum ersten $8-2=6$ *m* und zum dritten Kleide $8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$ *m*.

Das Tuch zum zweiten Kleide ist $\frac{1}{3}$ *m* schmäler als das zum ersten, und das Tuch des dritten Kleides $\frac{1}{2}$ *m* breiter, als das zum zweiten Kleide. Die Breite der beiden Tücher steht also in dem Verhältnisse wie $2:3$ oder wie $\frac{2}{3}:\frac{3}{3}$, d. h. zum zweiten Kleide fehlt $\frac{1}{3}$ der Breite des Tuches vom dritten Kleide; da dies $\frac{1}{2}$ beträgt, so ist die Breite des Tuches zum zweiten Kleide $2\times\frac{1}{2}=1$ *m* und zum dritten Kleide $3\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ und zum ersten $1\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=1\frac{1}{3}$ *m*.

69. Es seien x Arbeiter beschäftigt gewesen und jeder habe bei jedem Gange y *kg* Steine getragen, so tragen sie xy *kg* Steine alle zusammen in einem Gange. Sind 2 Arbeiter mehr und trägt jeder 2 *kg* mehr, so tragen $(x+2)$ Arbeiter bei jedem Gange $(x+2)(y+2)$ *kg*. Da im ersten Falle zur Fortschaffung der Steine 6 Stunden und im zweiten Falle nur 5 Stunden erforderlich sind, so haben die Arbeiter in diesem Falle $\frac{1}{6}$ der Zeit weniger notwendig, müssen daher in der angegebenen Zeit $\frac{1}{6}$ der Steine mehr tragen. Müssen demnach x Arbeiter einen ganzen Gang thun, um xy *kg* Steine zu tragen, so brauchen die $x+2$ Arbeiter nur $\frac{5}{6}$ Gang zu machen, um dieselbe Anzahl *kg* Steine zu tragen; mithin tragen x Arbeiter xy *kg* in derselben Zeit, in welcher die $x+2$ Arbeiter $\frac{5}{6}[(x+2)(y+2)]$ *kg* tragen und weil sie nun ebenviel *kg* tragen, so ist

$$\tfrac{5}{6}[(x+2)(y+2)]=xy \text{ oder } (1)\ 10x+10y+20=xy.$$

Sind 3 Arbeiter weniger und trägt jeder $2\frac{1}{2}$ *kg* bei jedem

Gange weniger, so tragen die (x—3) Arbeiter bei jedem Gange (x—3)(y—2½) *kg* Steine. Weil in diesem Falle aber 8 Stunden zur Fortschaffung erforderlich sind, so ist, da alsdann $\frac{1}{3}$ Zeit mehr erforderlich ist, als im ersten Falle,

$\frac{4}{3}[(x-3)(y-2\frac{1}{2})]=xy$ oder (2) $10x+12y-30=xy$.

Stellt man die beiden Werte für xy einander gleich, so findet man:

$2y=50$; folglich $y=25$ *kg* und also $x=18$ Arbeiter.

70. A sei von B x *km* entfernt. Um diesen Weg abzumachen, gebrauche der erste Wagen y Stunden, alsdann hat der zweite Wagen y+4 und der dritte $y+4-7=y-3$ Stunden nötig. Der erste Wagen macht in 1 Stunde $\frac{x}{y}$, der zweite $\frac{x}{y+4}$, der dritte $\frac{x}{y-3}$ *km*. Nun legt der zweite Wagen alle 4 Stunden 7½ *km*, also jede Stunde $1\frac{7}{8}$ *km* weniger zurück, als der erste Wagen, daher ist

$$(1)\ \frac{x}{y}=\frac{x}{y+4}+1\tfrac{7}{8}.$$

Der dritte Wagen legt alle 3 Stunden $13\frac{1}{8}$ *km*, also in jeder Stunde $4\frac{3}{8}$ *km* mehr zurück, als der zweite Wagen, daher ist

$$(2)\ \frac{x}{y-3}=\frac{x}{y+4}+4\tfrac{3}{8}.$$

Aus (1) und (2) folgt $x=90$, $y=12$. Der erste Wagen gebraucht also 12 Stunden, der zweite $12+4=16$, der dritte $12-3=9$ Stunden, um die Entfernung AB=90 *km* zurückzulegen.

Zweite Auflösung. Der erste Wagen mache in jeder Stunde x *km* und gebrauche zur Zurücklegung des Weges von A nach B y Stunden, so ist die Entfernung von A nach B $=xy$ *km*. Der zweite Wagen legt alle 4 Stunden 7½ *km* weniger zurück und gebraucht 4 Stunden mehr als der erste; er macht mithin in 1 Stunde $\left(x-\frac{7\frac{1}{2}}{4}\right)$ oder $(x-1\frac{7}{8})$ *km* und gebraucht y+4 Stunden, in welcher Zeit er zurücklegt $(x-1\frac{7}{8})(y+4)$ *km* = der Entfernung des Ortes A von B. Es ist also $(x-1\frac{7}{8})(y+4)=xy$ oder (1) $4x-1\frac{7}{8}y=7\frac{1}{2}$. Der dritte Wagen legt alle 3 Stunden $13\frac{1}{8}$ *km* mehr zurück und gebraucht zu dem Wege 7 Stunden weniger als der zweite; folglich macht er in 1 Stunde $x-1\frac{7}{8}+4\frac{3}{8}=x+2\frac{1}{2}$ *km* und gebraucht zu dem Wege $y+4-7=y-3$ Stunden; in dieser Zeit legt er zurück $(x+2\frac{1}{2})(y-3)=xy$ oder

(2) $2\frac{1}{2}y-3x=7\frac{1}{2}$.

Aus (1) und (2) folgt $x=7\frac{1}{2}$ *km*, die der erste Wagen

in jeder Stunde zurücklegt und $y=12$ Stunden, die er zur Zurücklegung des Weges gebraucht. Es ist also $12 \times 7\frac{1}{2} = 90$ *km* = der Entfernung des Ortes A nach dem Orte B. Der zweite Wagen gebraucht $12+4=16$ Stunden, der dritte $12-3=9$ Stunden.

71. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist, da ihre Differenz $=(x-y)$, amal größer ist, als ihre Summe$=(x+y)$:

$$(1)\ x-y=a(x+y) \text{ oder } x(1-a)=y(1+a),$$

und da ihr Produkt$=xy$ um bmal so groß ist, wie ihre Summe,

$$(2)\ xy=b(x+y) \text{ oder } x(y-b)=by.$$

Hieraus folgt $x=2b:(1-a)$ und $y=2b:(1+a)$.

72. Die Seite des größern Quadrats sei x *m* und die des kleinern y *m* groß, so ist, da der Ueberschuß der Seite des größern Quadrats über der des kleinern 118 *m* beträgt,

$$(1)\ x-y=118.$$

Da ferner der Ueberschuß der Quadrate selbst 26432 *qm* beträgt, so ist:

$$(2)\ x^2-y^2=26432 \text{ oder } (x+y)(x-y)=26432.$$

Dividiert man (2) durch (1), so erhält man:

$$(3)\ x+y=224.$$

Aus (1) und (3) folgt durch Addition und Subtraktion, daß $x=171$ und $y=53$. Der Inhalt des einen Quadrates ist also $x^2=(171)^2=29241$ *qm* und der des andern ist

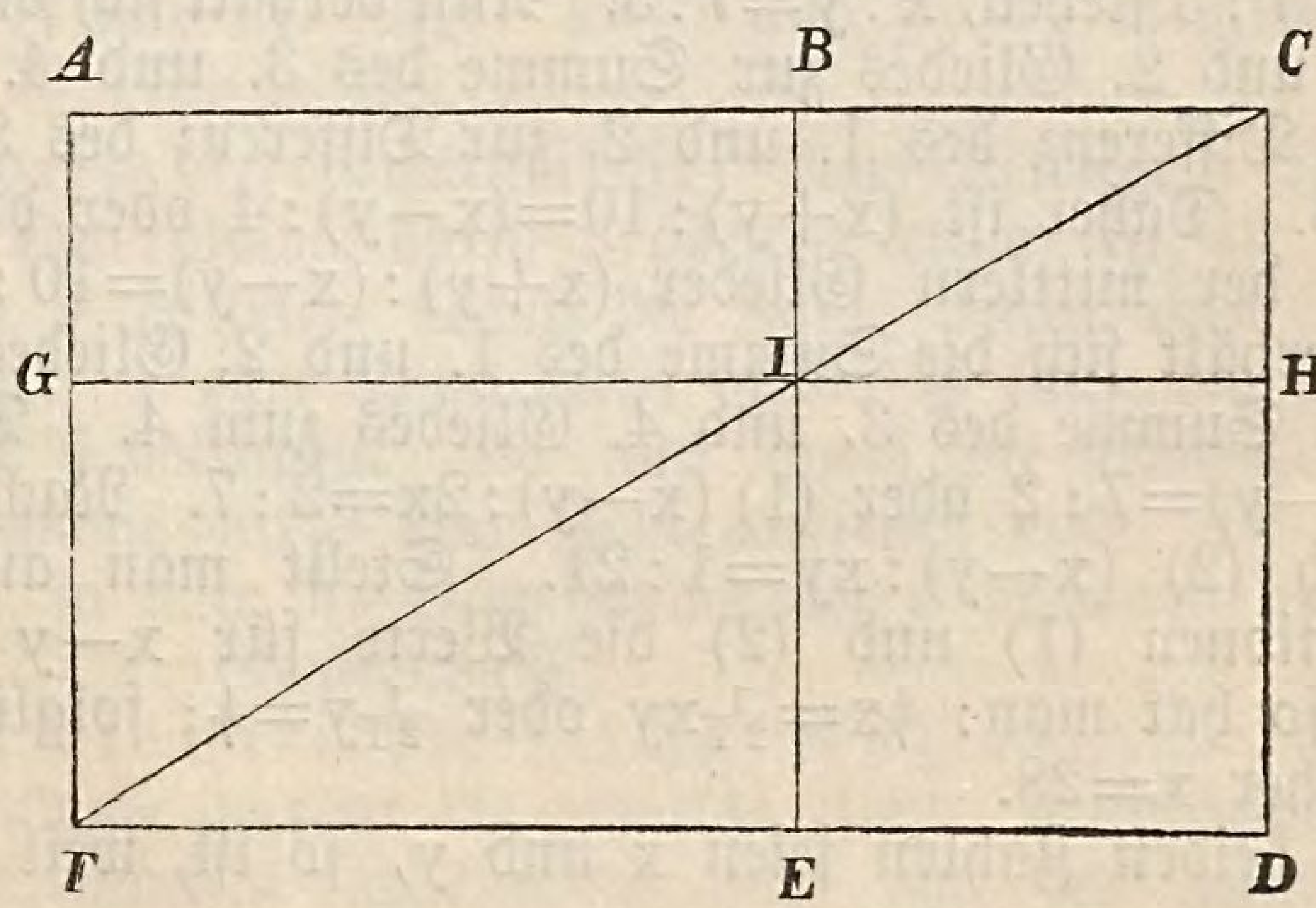
$$y^2=(53)^2=2809 \text{ qm}.$$

Zweite Auflösung. Ist die größere Seite$=x$ *m*, so ist die andere$=x-118$; folglich der Quadratinhalt des großen Quadrats$=x^2$ und der des kleinern $(x-118)^2$. Da nun das große Quadrat um 26432 *qm* größer ist, als das kleine, so ist:

$$x^2-(x-118)^2=26432;$$
$$x^2-x^2+236x-13924=26432;$$
$$236x=40356;\ x=171 \text{ und } x-118=53;$$

also hat das größere Quadrat $(171)^2$, das kleinere $(53)^2$.

Dritte (arithmetische) Auflösung.



Das größere Quadrat sei ACFD, in dessen Ecke C das kleinere Quadrat BCIH liegt. Verlängert man die Seiten dieses kleinern Quadrats bis zu den Seiten des größern, so wird das große Quadrat in die beiden Quadrate BCIH und GIFE und in die beiden Rechtecke ABIG und IHED geteilt. Zieht man nun noch die Diagonale CF, so sind aus Gründen der Geometrie die beiden Rechtecke ABIG und IHED, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich. Bestimmen wir nun zunächst den Inhalt des Quadrats GIEF. Da der Ueberschuß der Seite des größern Quadrats über der des kleinern, nämlich HD oder AB 118 *m* beträgt, so ist der Inhalt des Quadrats GIEF$=118^2=13924$ *qm*. Da nun der Ueberschuß der Quadrate 26432 *qm* beträgt, so betragen die beiden Rechtecke ABIG und IHED $26432-13924=12508$ *qm*, folglich jedes der beiden Rechtecke $12508:2=6254$ *qm*. Von jedem der beiden Rechtecke ist also eine Seite und der Inhalt bekannt; folglich beträgt die andere anstoßende Seite BI oder IH $6254:118=53$ *m*. Daher beträgt die Seite des kleinern Quadrats 53 und die des größern $53+118=171$; ihre Inhalte also $(53)^2$ und $(171)^2$.

73. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist, weil ihre Summe, $x+y$, ihre Differenz $x-y$ und ihr Produkt xy im Verhältnisse $5:1:18$ stehen:

$$(x+y):(x-y):xy=5:1:18.$$

Aus dieser fortlaufenden Proportion lassen sich folgende entwickeln:

$$(x+y):(x-y)=5:1 \text{ oder } 2x:(x+y)=6:5;$$

woraus folgt, daß (1) $x+y=\frac{5}{3}x$. Ferner ist $(x-y):xy=1:18$; woraus folgt, daß (2) $x-y=\frac{1}{18}xy$. Addiert man (1) und (2) und dividiert die erhaltene Gleichung durch x, so erhält man $y=6$ und daraus $x=9$.

74. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist, da sie im Verhältnis $7:3$ stehen, $x:y=7:3$. Nun verhält sich die Summe des 1. und 2. Gliedes zur Summe des 3. und 4. Gliedes, wie die Differenz des 1. und 2. zur Differenz des 3. und 4. Gliedes. Daher ist $(x+y):10=(x-y):4$ oder durch Versetzung der mittlern Glieder $(x+y):(x-y)=10:4=5:2$. Nun verhält sich die Summe des 1. und 2. Gliedes zum 2., wie die Summe des 3. und 4. Gliedes zum 4. Daher ist: $2x:(x-y)=7:2$ oder (1) $(x-y):2x=2:7$. Nach der Auf- ist auch (2) $(x-y):xy=1:21$. Stellt man aus beiden Proportionen (1) und (2) die Werte für $x-y$ einander gleich, so hat man: $\frac{4}{7}x=\frac{1}{21}xy$ oder $\frac{1}{21}y=\frac{4}{7}$; folglich $y=12$ und daher $x=28$.

75. α) Die beiden Zahlen seien x und y, so ist, weil ihre reci-

proke Differenz $=\frac{1}{x-y}$ nebst der reciproken Summe $=\frac{1}{x+y}$ gleich 3 ist (1) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=3$.

Vermindert man dagegen die reciproke Differenz derselben um ihre reciproke Summe, so ist diese Differenz gleich 1; man hat also: (2) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=1$.

Hieraus folgt $x=\frac{3}{4}$ und $y=\frac{1}{4}$.

β) Mit Beziehung auf die vorhergehende Auflösung hat man, wenn man $x-y=z$ und $x+y=v$ setzt:

$$(1)\ \frac{1}{z}+\frac{1}{v}=a;\ (2)\ \frac{1}{z}-\frac{1}{v}=b.$$

Hieraus erhält man $z=\frac{2}{a+b}$ und $v=\frac{2}{a-b}$. Es ist daher: (3) $x-y=\frac{2}{a+b}$; (4) $x+y=\frac{2}{a-b}$.

Aus der Addition und Subtraktion von (3) und (4) ergiebt sich:

$$x=2a:(a^2-b^2);\ y=2b:(a^2-b^2).$$

76. Der Zehner in der zweizifferigen Zahl seien x und der Einer y, so heißt die gesuchte Zahl $10x+y$ und ihre Quersumme $x+y$. Dividiert man die Zahl durch die Quersumme der Ziffern, so erhält man 7 zum Quotienten; es ist daher

$$(1)\ \frac{10x+y}{x+y}=7.$$

Subtrahiert man 27 von der Zahl $10x+y$, so erhält man: $10x+y-27$. Dadurch entsteht eine Zahl, deren Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben sind, also die Zahl $10y+x$. Es ist daher:

$$(2)\ 10x+y-27=10y+x.$$

Aus (1) und (2) folgt: $x=6$ und $y=3$; folglich heißt die Zahl $10\times6+3=63$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Jede Zahl, deren Quersumme durch 3 oder 9 teilbar ist, ist auch durch 3 oder 9 teilbar. Wenn die Zahl, durch ihre Quersumme dividiert, 7 zum Quotienten giebt, so kann die Quersumme 3 oder 9 betragen. Da nun durch die Multiplikation der Quersumme mit 7 eine Zahl entstehen muß, die größer als 27 ist, so kann die Quersumme nur 9 betragen, weshalb die Zahl $7\times9=63$ ausmacht.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Die 7fache Quersumme beträgt die gesuchte Zahl. Subtrahiere ich von der siebenfachen Quersumme oder von der gesuchten Zahl,

27, so entsteht eine Differenz, die eine Zahl ausmacht, deren Ziffern in umgekehrter Ordnung geschrieben sind, also auch wieder dieselbe Quersumme giebt und daher ebenfalls durch die Quersumme teilbar sein muß; es muß sich also auch 27 durch die Quersumme der Zahl teilen lassen. Die Quersumme der Zahl kann nun durchaus nicht von der Quersumme von 27 verschieden sein. Nun hat 27 zur Quersumme 9; folglich hat auch die gesuchte Zahl zur Quersumme 9 und sie heißt also $7 \times 9 = 63$.

77. Der Weg AB sei x *km*, der Weg BC sei y *km* und der von AC betrage z *km*, so ist, weil der Weg AB+BC 82 *km*, der Weg BC+AC 97 *km* und AC+AB 89 *km* beträgt:

$$(1)\ x+y=82;\ (2)\ y+z=97;\ (3)\ x+z=89;$$

folglich $x=37$, $y=45$ und $z=52$ *km*.

78. Der erste der drei Teile heiße x, der zweite y und der dritte z, so ist, weil diese Teile zusammengenommen 96 geben:

$$(1)\ x+y+z=96.$$

Weil der erste Teil, durch den zweiten dividiert, 2 zum Quotienten und 3 zum Reste giebt, so ist x um 3 größer als das Zweifache von y. Es ist daher:

$$x=2y+3 \text{ oder } (2)\ x-2y=3.$$

Weil endlich der zweite Teil durch den dritten dividiert, 4 zum Quotienten und 5 zum Reste giebt, so ist y um 5 größer als das Vierfache von z, mithin erhält man:

$$y=4z+5 \text{ oder } (3)\ y-4z=5.$$

Aus (1), (2), (3) folgt, daß $x=61$, $y=29$ und $z=6$.

Zweite Auflösung. Die Aufgabe läßt sich auch mit einer Unbekannten auflösen. Dividiert man den ersten Teil x durch den zweiten, so erhält man 2 zum Quotienten und 3 zum Reste; daraus folgt, daß der zweite Teil die Hälfte des um 3 verminderten ersten Teils beträgt, also $\frac{1}{2}(x-3)$. Dividiert man den zweiten Teil durch den dritten Teil der Zahl, so erhält man zum Quotienten 4 und zum Reste 5, woraus sich ergiebt, daß der dritte Teil aus dem Viertel des um 5 verminderten zweiten Teiles besteht, also

$$\tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}(x-3)-5]=\tfrac{1}{8}(x-13). \text{ Es ist daher:}$$

$$x+\tfrac{1}{2}(x-3)+\tfrac{1}{8}(x-13)=96,$$

woraus sich der Wert der drei Teile leicht finden läßt.

79. Der Vater sei x Jahre, der eine Sohn y Jahre und der andere Sohn z Jahre alt, so ist, weil der eine Sohn 4 Jahre älter ist, als der andere:

$$(1)\ y=z+4 \text{ oder } y-z=4.$$

Nach 2 Jahren ist der Vater x+2 Jahre, der eine Sohn y+2 und der andere Sohn z+2 Jahre alt; alsdann beträgt das Alter der beiden Söhne zusammen (y+z+4)

Jahre, und weil dies nur die Hälfte des Alters des Vaters ist, so ergiebt sich:

$$(2)\ x+2=2(y+z+4) \text{ oder } x-2(y+z)=6.$$

Vor 6 Jahren war der Vater $x-6$, der eine Sohn $y-6$ und der andere Sohn $z-6$ Jahre alt. Und weil der Vater damals 6mal so alt war, als seine beiden Söhne, so ist:

$$(3)\ x-6=6(y+z-12) \text{ oder } x-6(y+z)=-66.$$

Hieraus folgt $x=42$, $y=11$ und $z=7$.

Zweite Auflösung. Das Alter des Vaters betrage x, das des ältern Sohnes y, also das des jüngern $y-4$ Jahre. Nach 2 Jahren ist der Vater $x+2$ Jahre und die beiden Söhne $y+2+y-4+2=2y$ Jahre und weil diese nur halb so alt sind, als der Vater, so ist:

$$x+2=2\times 2y \text{ oder } (1)\ x-4y=-2.$$

Vor 6 Jahren war der Vater $x-6$ und die beiden Söhne $(y-6+y-10)=2y-16$ Jahre, und weil in diesem Falle der Vater 6mal so alt ist, als seine beiden Söhne, so ist:

$$x-6=6(2y-16) \text{ oder } (2)\ x-12y=-90;$$

folglich $y=11$ Jahre, Alter des ältern Sohnes und $y-4=7$ Jahre, Alter des jüngern Sohnes und hieraus $x=42$ Jahre, Alter des Vaters.

Dritte Auflösung. Der jüngere Sohn sei x Jahre alt, so ist der ältere $x+4$ Jahre. Nach 2 Jahren ist der erstere $x+2$ und der andere $x+6$, und da der Vater alsdann doppelt so alt ist, als seine beiden Söhne zusammen, so wird nach 2 Jahren des Vaters Alter $4(x+4)$, also sein jetziges Alter $4(x+4)-2=4x+14$ Jahre betragen. Vor 6 Jahren war der Vater $4x+14-6=4(x+2)$ und seine beiden Söhne $2(x-4)$ Jahre alt, und weil in diesem Falle der Vater 6mal so alt war, als seine Söhne, so ist:

$$\tfrac{1}{3}(x+2)=x-4; \text{ folglich } x=7,\ x+4=11 \text{ und}$$
$$4x+14=42 \text{ Jahre.}$$

80. α) Heißen die drei verlangten Zahlen x, y, z, so hat man:

$$(1)\ \frac{6}{x}+\frac{9}{y}+\frac{12}{z}=9;\ (2)\ \frac{9}{x}+\frac{12}{y}+\frac{6}{z}=10;$$
$$(3)\ \frac{12}{x}+\frac{6}{y}+\frac{9}{z}=10\tfrac{1}{4}.$$

Hieraus folgt: $x=2$, $y=3$, $z=4$.

β) Die 3 Zahlen seien x, y und z, so ist, weil dieselben in dem Verhältnisse $3:4:5$ stehen:

$$x:y:z=3:4:5. \text{ Hieraus erhält man:}$$
$$x:y=3:4; \text{ also } (1)\ 4x-3y=0;$$
$$y:z=4:5; \text{ also } (2)\ 5y-4z=0.$$

Weil ferner das Fünffache der ersten nebst dem Vierfachen

der zweiten und dem Dreifachen der dritten Zahl gleich 345 ist, so erhält man:

(3) $5x+4y+3z=345.$

Aus den 3 Gleichungen folgt, daß $x=22\frac{1}{2}$, $y=30$ und $z=37\frac{1}{2}$.

Zweite Auflösung. Die 3 Zahlen sollen in dem Verhältnisse 3 : 4 : 5 stehen. Heißt nun die erste Zahl x, so heißt die zweite $\frac{4}{3}x$ und die dritte $\frac{5}{3}x$. Es ist also:

$$5x+4\times\frac{4}{3}x+3\times\frac{5}{3}x=345;$$

also $x=22\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}\times22\frac{1}{2}=30$ und $\frac{5}{3}\times22\frac{1}{2}=37\frac{1}{2}$.

81. Die 2. Klasse brachte 136,50 ℳ und die 3. Klasse 122,20+136,50=258,70 mehr auf, als die 1. Klasse; folglich bringen die beiden letzten Klassen im ganzen 136,50+258,70=395,20 ℳ mehr als die 1. Klasse; sie bringen zusammen 898,30 ℳ auf; also hätten sie, wenn jede Klasse ebensoviel, als die 1. aufgebracht hätte, 898,30−395,20=503,10 ℳ aufbringen müssen; mithin brachte die 1. Klasse 503,10 : 3=167,70 ℳ ein; die 2. 167,70+136,50=304,20 ℳ; und die 3. 304,20+122,20=426,40 ℳ.

Nun seien x Billets in der 1., y Billets in der 2. und z Billets in der 3. Klasse ausgegeben worden, so ist, da in der 2. und 3. Klasse 402 Billets mehr genommen wurden, als in der 1. Klasse:

(1) $y+z=x+402.$

Nun war der Ertrag aus

x Billets	d. 1. Kl.	167,70 ℳ;	also	aus	1 Billet	167,70:x ℳ;
y „	„ 2. „	304,20 „;	„	„	1 „	304,20:y „;
z „	„ 3. „	426,40 „;	„	„	1 „	426,40:z „;

Da nun 1 Billet der 1. Kl. $1\frac{1}{2}$mal so viel kostet, als 1 Billet der 2. Kl. und 3mal so viel, als 1 Billet der 3. Kl., so haben wir ferner:

$$(2)\ \frac{167,70}{x}=1\tfrac{1}{2}\cdot\frac{304,20}{y};\quad(3)\ \frac{167,70}{x}=3\cdot\frac{426,40}{z}.$$

Daher $x=43$, $y=117$, $z=328$.

Zweite Auflösung. Es koste 1 Billet in der 3. Kl. x ℳ, so kostet 1 Billet in der 1. Kl. 3x und 1 Billet in der 2. Kl. 2x ℳ. Daher wurden in der 1. Kl. 167,70:3x; in der 2. Kl. 304,20 : 2x und in der 3. Kl. 426,40 : x Billets verkauft. Daher ist:

$$\frac{304,20}{2x}+\frac{426,40}{x}-\frac{167,70}{3x}=402.$$

Also $x=1,30$ ℳ, Preis für 1 Billet der 3. Kl.; mithin kostet 1 Billet der 2. Kl. 2 . 1,30=2,60 ℳ und der 1. Kl. 3 . 1,30 ℳ=3,90 ℳ; daher in der 1. Kl. 167,70 : 3,90=43, in

der 2. Kl. 304,20 : 2,60=117 und in der 3. Kl. 426,40 : 1,30=328 Billets verkauft worden.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Wie wir in der ersten Aufl. gefunden haben, war der Ertrag der Billets in der 1. Kl. 167,70 *M*; in der 2. Kl. 304,20 *M* und in der 3. Kl. 426,40 *M*. Nun kostet 1 Billet der 1. Kl. $1\frac{1}{2}$mal so viel, als ein solches in der 2. Kl. und 3mal so viel, als ein solches in der 3. Kl. Daraus folgt, daß, wenn in der 1. Kl. 1 *M* gelöst wurde, in der 2. nur $\frac{2}{3}$ *M* und in der 3. Kl. nur $\frac{1}{3}$ *M* gelöst wird. Hätte nun die 2. und 3. Kl. ihre Billets zu dem Preise der 1. Kl. verkauft, so hätte die 2. Kl. $1\frac{1}{2}$mal so viel und die 3. Kl. 3mal so viel einbringen müssen, als sie eingebracht hatte; jene hätte also $1\frac{1}{2}\times 304{,}20=456{,}30$ *M* und diese $3\times 426{,}40=1279{,}20$ *M*, also beide Klassen zusammen $456{,}30+1279{,}20=1735{,}50$ *M* aufbringen müssen. Nun sind in der 2. und 3. Kl. 402 Billets mehr als in der 1. Kl. verkauft worden; ziehen wir also den Betrag der Billets der 1. Kl. von 1735,50 *M* ab, so haben wir den Betrag aus den 402 Billets, die, wenn sie zum Preise der 1. Kl. wären verkauft worden, $1735{,}50-167{,}70=1567{,}80$ *M* eingebracht hätten; folglich kostet dann 1 Billet der 1. Kl. $1567{,}80 : 402=3{,}90$ *M*; daher 1 Billet der 2. Kl. $3{,}90 : 1{,}5=2{,}60$ *M* und 1 Billet der 3. Kl. $3{,}90 : 3=1{,}30$ *M*.
Demnach wurden in der 1. Kl. 167,70 : 3,90= 43 Billets
„ „ „ „ 2. „ 304,20 : 2,60=117 „
„ „ „ „ 3. „ 426,40 : 1,30=328 „
verkauft.

82. A habe x Nüsse, B y Nüsse und C z Nüsse. Giebt B dem A 5 Nüsse, so hat A (x+5) Nüsse, und B (y—5) Nüsse; und weil in diesem Falle die Nüsse des A die doppelte Anzahl der Nüsse des B betragen, so ist:

$$x+5=2(y-5), \text{ oder (1) } x-2y=-15.$$

Giebt C dem B 13 Nüsse, so hat B y+13 und C z—13 Nüsse, und weil nun die Anzahl der Nüsse des C dreimal kleiner ist, als die des B, so erhält man:

$$y+13=3(z-13), \text{ oder (2) } y-3z=-52.$$

Giebt endlich A dem C 3 Nüsse, so hat C sechsmal so viel, als A behält; danach ist

$$z+3=6(x-3), \text{ oder (3) } z-6x=-21; \text{ folglich}$$

$$x=7 \text{ für A, } y=11 \text{ für B, } z=21 \text{ für C.}$$

Zweite Auflösung. Hat A x Nüsse und erhält von B 5 Nüsse, so hat er x+5, das ist das Doppelte der Nüsse des B, also hat dieser $\frac{1}{2}(x+5)$; ehe er also an A die 5 Nüsse abgab, hatte B $\frac{1}{2}(x+5)+5=\frac{1}{2}(x+15)$. Giebt C dem B 13 Nüsse, so hat B $\frac{1}{2}(x+15)+13=\frac{1}{2}(x+41)$ und da er jetzt 3mal so viel hat, als C, so hat C $\frac{1}{6}(x+41)$; also hatte C,

ehe er an B die 13 Nüsse abgab, $\frac{1}{6}(x+41)+13=\frac{1}{6}(x+119)$. Giebt nun A dem C 3 Nüsse, so hat C $\frac{1}{6}(x+119)+3=\frac{1}{6}(x+137)$ und A hatte noch $(x-3)$. Auf diese Weise hat C sechsmal so viel als A, es ist daher:

$$\frac{1}{6}(x+137)=(x-3)6;$$

also $x=7$ Nüsse hat A; B hat $\frac{1}{2}(7+15)=11$; C hat $\frac{1}{6}(7+119)=21$ Nüsse.

83. Mars sei x, Ceres y und Juppiter z Millionen Meilen von der Sonne entfernt. Denkt man sich der Reihe nach zuerst Mars und Ceres, hierauf Mars und Juppiter und zuletzt Juppiter und Ceres noch einmal so weit von der Sonne sich entfernen, als sie von derselben abstehen, und den dritten Planeten sich jedesmal der Sonne um so viel Meilen nähern, als die beiden andern in Meilen sich entfernen, so ist

1) die Entfernung des Mars 2x Millionen Meilen von der Sonne, der Ceres 2y Mill. Meil. von der Sonne, des Juppiter dagegen, der sich um $(x+y)$ Mill. Meil. der Sonne nähert, $z-(x+y)$ Mill. Meil. von der Sonne.

2) Die Entfernung des Mars 4x Mill. Meilen von der Sonne, der Ceres, die sich um $(x+z-y)$ Mill. Meilen der Sonne nähert, $3y-(x+z)$ Mill. Meil. von der Sonne, des Juppiter $2[x-(x+y)]$ Mill. Meil. von der Sonne.

3) Die Entfernung der Ceres $2.[3y-(x+z)]$ Mill. Meil. von der Sonne, des Juppiter $4[z-(x+y]$ Mill. Meilen von der Sonne, des Mars, der sich um $3y-(x+z)+2[z-(x+y)]=y-(3x-z)$ Mill. Meil. der Sonne nähert, $4x-[y-(3x-z)]=7x-(y+z)$ Mill. Meil. von der Sonne. Da durch diese Veränderungen alle drei Planeten in die gleiche Entfernung von 64 Mill. Meilen von der Sonne kommen, so ist:

$$(1)\ 2[3y-(x+z)]=64;$$
$$(2)\ 4[z-(x+y)]=64;$$
$$(3)\ 7x-(y+z)=64;$$

folglich $x=32$ Millionen Meilen

ist Mars von der Sonne entfernt.

$y=x+24=32+24=56$ Mill. Meilen

ist die Ceres von der Sonne entfernt.

$z=x+y+16=32+56+16=104$ Mill. Meilen

ist Juppiter von der Sonne entfernt.

84. Die erste Zahl heiße x, die zweite y, die dritte z, so ist, weil ihre Summe 232 ausmacht:

$$(1)\ x+y+z=232.$$

Addiert man zur ersten Zahl x die Hälfte der Summe der beiden andern Zahlen, also $\frac{1}{2}(y+z)$, so erhält man $x+\frac{1}{2}(y+z)$. Zählt man zur zweiten Zahl y den dritten Teil von der Summe der beiden andern, also $\frac{1}{3}(x+z)$, so

entsteht die Zahl $y+\frac{1}{3}(x+z)$. Nimmt man zur dritten Zahl z den vierten Teil von der Summe der beiden übrigen, also $\frac{1}{4}(x+y)$, so erhält man die Zahl $z+\frac{1}{4}(x+y)$. Die drei auf diese Weise entstandenen Zahlen sollen nach der Aufgabe einander gleich sein; demnach ist:

$x+\frac{1}{2}(y+z)=y+\frac{1}{3}(x+z)$ oder (2) $4x-3y+z=0$;

$y+\frac{1}{3}(x+z)=z+\frac{1}{4}(x+y)$ oder (3) $x+9y-8z=0$.

Hieraus ergiebt sich $x=40$, $y=88$, $z=104$.

85. Der Dampfwagen lege in jeder Stunde x *km*, der Eilwagen y *km* zurück, und A sei von B z *km* entfernt. Der Eilwagen geht 2 Stunden früher ab; also hat er vor Abgang des Dampfwagens schon 2y *km* zurückgelegt. Treffen beide Wagen 6 Stunden nach Abfahrt des ersten zusammen, so hat der Dampfwagen 6x *km* und der Eilwagen $(2+6)y=8y$ *km* gemacht, und da sie zusammen den Weg z zurückgelegt haben, so ist:

$$(1)\ 6x+8y=z.$$

Legt jeder derselben $1\frac{3}{4}$ *km* mehr in der Stunde zurück, so macht der eine $x+1\frac{3}{4}$ *km* und der andere $y+1\frac{3}{4}$ *km* in einer Stunde; der erste also in $5\frac{1}{2}$ Stunden $5\frac{1}{2}(x+1\frac{3}{4})$ und der zweite in $5\frac{1}{2}+2=7\frac{1}{2}$ Stunden $7\frac{1}{2}(y+1\frac{3}{4})$ *km*, und weil beide zusammen z *km* abgemacht haben, so erhalten wir:

$$(2)\ 5\tfrac{1}{2}(x+1\tfrac{3}{4})+7\tfrac{1}{2}(y+1\tfrac{3}{4})=z.$$

Legt aber der eine $x-1\frac{3}{4}$ und der andere $y-1\frac{3}{4}$ *km* in der Stunde zurück, so hat der Dampfwagen, der 2 Stunden früher abfährt, beim Zusammentreffen mit dem Eilwagen $7\frac{1}{12}(x-1\frac{3}{4})$ und der Eilwagen $5\frac{1}{12}(y-1\frac{3}{4})$ *km* gemacht, und weil beide den Weg von A nach B=z zurückgelegt haben, so ist:

$$(3)\ 7\tfrac{1}{12}(x-1\tfrac{3}{4})+5\tfrac{1}{12}(y-1\tfrac{3}{4})=z.$$

Also $x=38\frac{1}{2}$ *km*, die der Dampfwagen jede Stunde macht; $y=7$ *km* legt der Eilwagen in einer Stunde zurück. Die Entfernung des Ortes A von B ist also $6\times 38\frac{1}{2}+8\times 7=287$ *km*.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Macht jeder $1\frac{3}{4}$ *km* mehr, so macht der Dampfwagen in $5\frac{1}{2}$ Stunden $5\frac{1}{2}\times 1\frac{3}{4}=\frac{77}{8}$ *km* und der Eilwagen in $7\frac{1}{2}$ Stunden $7\frac{1}{2}\times 1\frac{3}{4}=\frac{105}{8}$ *km*, also beide zusammen $\frac{77}{8}+\frac{105}{8}=\frac{91}{4}$ *km* mehr, als in der gleichen Zeit im ersten Falle. Jeder der beiden Wagen hat aber im zweiten Falle $\frac{1}{2}$ Stunde weniger an Zeit gebraucht, als im ersten Falle, dafür aber $\frac{91}{4}$ *km* mehr gemacht. Daraus folgt, daß, wenn beide $\frac{1}{2}$ Stunde fahren, sie zusammen $\frac{91}{4}$ *km* abmachen; folglich machen beide in 1 Stunde $\frac{91}{2}=45\frac{1}{2}$ *km*, also in 6 Stunden $6\times 45\frac{1}{2}=273$ *km*; demnach beträgt der Weg 273 *km* nebst den *km*, die der Eilwagen in 2 Stunden, die er früher abgefahren, gemacht hat. Legt jeder $1\frac{3}{4}$ *km* mehr zurück, so legen sie zusammen

in $5\frac{1}{2}$ Stunden $5\frac{1}{2}\times 49=269\frac{1}{2}$ *km* zurück. In diesem Falle haben aber beide Wagen $273-269\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ *km* weniger gemacht; das kommt aber daher, weil der Eilwagen $\frac{1}{2}$ Stunde weniger mit dem Dampfwagen unterwegs war; folglich gebrauchte er zu $3\frac{1}{2}$ *km* $\frac{1}{2}$ Stunde, zu 7 *km* 1 Stunde; mithin legte der Eilwagen in 1 Stunde 7 *km* zurück und der Dampfwagen $45\frac{1}{2}-7=38\frac{1}{2}$ *km*, weshalb A von B $273+2.7=287$ *km* entfernt war.

86. Angenommen die Metalle der hinzugesetzten Legierung ständen in dem Verhältnisse $x:y:z:u$. Vor der hinzugesetzten Legierung ist das Verhältnis $1:3:5:7$. Nach der Hinzusetzung der aus denselben Metallen bestehenden Legierung ändert sich das Verhältnis in das $3:4:5:6$ um. Es ist daher:

$$(x+1):(y+3):(z+5):(u+7)=3:4:5:6.$$

Wenden wir auf diese fortlaufende Proportion die §§. 229 und 241 Beisp. 36 und 37 an, so erhalten wir:

$$(1)\ \frac{(x+1)+(y+3)+(z+5)+(u+7)}{x+1}=\frac{3+4+5+6}{3}.$$

Die Quantität vor der Hinzusetzung besteht aus $1+3+5+7=16$ Teilen. Nun setzt man der Quantität nach das $2\frac{3}{8}$fache einer andern Legierung hinzu; mithin nimmt man von derselben $2\frac{3}{8}.16=38$ Teile. Es ist demnach:

$$(2)\ x+y+z+u=2\tfrac{3}{8}.16=38.$$

Setzt man aus (2) den Wert für $x+y+z+u$ in (1), so hat man:

$$\frac{38+16}{x+1}=\frac{3+4+5+6}{3} \text{ oder } \frac{54}{x+1}=\frac{18}{3}; \text{ also}$$

$$x+1=9; \text{ folglich } x=8.$$

Ebenso erhalten wir nach den vorher angezogenen §§.

$$\frac{54}{y+3}=\frac{18}{4}; \text{ daher } y+3=12; \text{ also } y=9.$$

$$\frac{54}{z+5}=\frac{18}{5}; \text{ daher } z+5=15; \text{ also } z=10.$$

$$\frac{54}{u+7}=\frac{18}{6}; \text{ daher } u+7=18; \text{ also } u=11.$$

Die hinzugekommenen Metalle stehen also in dem Verhältnisse $8:9:10:11$.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Quantität besteht vor der Hinzusetzung aus 16 Teilen; setzt man der Quantität nach das $2\frac{3}{8}$fache einer andern aus denselben Metallen bestehenden Legierung hinzu, so nimmt man von derselben $2\frac{3}{8}\times 16=38$ Teile; in der neuen Legierung sind also $38+16=54$ Teile. Die hierdurch entstandene Legierung enthält aber $3+4+5+6=18$ Teile. So oft nun 18 Teile in der neuen Legierung vorhanden sind, kommen auf das erste

Metall 3, auf das zweite 4, auf das dritte 5 und auf das vierte 6; es sind $54=3\times18$ Teile da; also stehen die 4 Metalle durch die hinzugesetzte Legierung in dem Verhältnisse $3\times3:3\times4:3\times5:3\times6=9:12:15:18$. Während nun die Metalle ursprünglich in dem Verhältnisse $1:3:5:7$ standen, stehen sie jetzt in dem Verhältnisse $9:12:15:18$; folglich ist das erste um $9-1=8$, das zweite um $12-3=9$, das dritte um $15-5=10$ und das vierte um $18-7=11$ Teile vermehrt worden; demnach stehen die hinzugesetzten Metalle in dem Verhältnisse $8:9:10:11$.

87. Es sei ein preuß. Pfd.$=x$ *kg*, ein engl. Pfd.$=y$ *kg*, so faßt der Behälter $(174+62x+622y)$ *kg*. Nach der Aufgabe ist also

(1) $93x+311y+145=\frac{7}{10}(62x+622y+174)$ und

(2) $155x+155\frac{1}{2}y+87=\frac{1}{2}(62x+622y+174)$.

Hieraus erhält man

(4) $496x-1244y=-232$ und

(5) $248x=311y$.

Hieraus ergiebt sich $x=\dfrac{29}{62}$ *kg*.

Es verhält sich also das alte preuß. Pfd. zum Kilogr., wie $29:62$. Weiter ist $y=\dfrac{116}{311}\,kg=\dfrac{116\,.\,62}{311\,.\,29}=\frac{248}{311}$ preuß. Pfd. Es verhält sich also das alte preuß. Pfd. zum engl. Troy-Pfd. wie $311:248$. Der Behälter faßt also:

$$\left(174+\frac{62\,.\,29}{62}+\frac{622\,.\,116}{311}\right)kg=435\ kg.$$

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die Hälfte des Behälters faßt $62:2=31$ preuß. Pfd.; $174:2=87$ *kg* und $622:2=311$ engl. Pfd. Troy-Gewicht. Auch faßt die Hälfte des Behälters nach der Aufgabe: 155 preuß. Pfd., 87 *kg* und $155\frac{1}{2}$ engl. Pfd., also in diesem Falle $155-31=124$ preuß. Pfund mehr, dagegen $311-155\frac{1}{2}=155\frac{1}{2}$ engl. Pfd. weniger, dagegen in beiden Fällen gleich viel *kg*. Es müssen daher 124 preuß. Pfd.$=155\frac{1}{2}$ engl. Pfd. oder 248 preuß. Pfd.$=$ 311 engl. Pfd. sein. Hiernach verhält sich das preuß. Pfd. zum engl. Pfd. wie $311:248$. Der ganze Behälter faßt somit $62+\frac{622}{311}\times248=558$ preuß. Pfd. und $174\,kg$; folglich $\frac{7}{10}$ desselben $\frac{7}{10}\times558=390{,}6$ preuß. Pfd. und $\frac{7}{10}\times174=$ $121{,}8$ *kg*. Nach der Aufgabe ist auch $\frac{7}{10}$ des Behälters $93+248=341$ preuß. Pfd. und $145\,kg$, folglich in diesem Falle $390{,}6-341=49{,}6$ preuß. Pfd. weniger, dagegen $145-121{,}8$ $=23{,}2\,kg$ mehr, daher sind $23{,}2\ kg=49{,}6$ preuß. Pfd. oder $29\ kg=62$ preuß. Pfd. Es verhält sich mithin das preuß. Pfd. zum Kilogramm wie $29:62$. Der Behälter faßt also

$$174+\frac{558\times29}{62}=435\ kg.$$

88. Der eine mit geringerer Geschwindigkeit gehende Körper mache in jeder Sekunde x *m*, der andere y *m* und die Entfernung der Punkte A und B sei z *m* groß. Sind beide Körper 15 Sekunden nach ihrem Abgange noch 35 *m* von einander entfernt, so hat der eine 15x *m* und der andere 15y *m* gemacht, und weil der von beiden zurückgelegte Weg 35 *m* weniger beträgt, als die Entfernung AB, so ist:

$$(1)\ 15x+15y=z-35.$$

Da sie 17 Sekunden nach ihrem Abgange die nämliche Entfernung von 35 *m* haben, so müssen sie außer dem ganzen Wege von A nach B auch noch diese 35 *m* zurückgelegt haben, also z+35 *m* und weil der eine Körper 17x und der andere 17y *m* abmacht, so ist:

$$(2)\ 17x+17y=z+35.$$

Bewegen sich beide Körper hinter einander statt gegen einander, so hat, da sie 21 Sekunden nach ihrem Abgange eine Entfernung von 35 *m* haben, der eine vorangehende 21x und der andere nachfolgende 21y *m* gemacht. Würde der nachfolgende den vorangehenden in 21 Sekunden eingeholt haben, so hätte er (z+21x) *m* machen müssen; da er aber um 35 *m* von ihm entfernt bleibt, so hat er nur z+21x—35 *m* zurückgelegt; danach ist:

$$(3)\ 21y=z+21x-35.$$

Stellt man aus diesen 3 Gleichungen die Werte für z einander gleich, so erhält man:

$$(4)\ 15x+15y+35=17x+17y-35;$$
$$(5)\ 15x+15y+35=21y-21x+35.$$

Hieraus folgt, daß x=5 *m* legt der eine Körper in jeder Sekunde und y=30 *m* der andere zurück. Die Entfernung der Punkte A und B beträgt daher

$$15\times5+15\times30+35=560\ m.$$

A D F E C B

Zweite (arithmetische) Auflösung. Der langsamer gehende von dem Punkte F auslaufende Körper werde mit K′ und der rascher gehende von B auslaufende werde mit K″ bezeichnet. 15 Sekunden nach ihrem Abgange haben sie eine Entfernung von 35 *m* und 2 Sekunden später haben sie dieselbe Entfernung von 35 *m*; folglich haben beide Körper in 1 Sekunde zusammen 35 *m* abgemacht. Daher haben beide in 15+1=16 Sekunden den ganzen Weg von F nach B gemacht, weshalb derselbe 16×35=560 *m* beträgt. Laufen die beiden Körper hinter- statt gegeneinander, und K′ bewege sich in der Richtung nach A und K″ nach derselben

Richtung hin, und K' habe nach 21 Sekunden den Punkt A erreicht, während K'' den Punkt D erreicht habe, dann hat K' den Weg AD+FD gemacht, dagegen K'' BF+FD; folglich haben dann beide zusammen (AD+FD)+(BF+DF) =2DF+AD+FB abgemacht. Da nun AD=35 und BF=560 *m*, also AD+FB=35+560=596 *m* ist, und sie nach 21 Sekunden 21×35=735 *m* zusammen zurückgelegt haben, so muß 2FD=735—596=140 *m* sein, also FD=70 *m*. Demnach hat K'' in 21 Sekunden 560+70=630 *m* gemacht, daher in 1 Sekunde 630:21=30 *m*; K' hat in 21 Sekunden 35+70=105 *m* gemacht, folglich in 1 Sekunde 105:21=5 *m*.

89. Die Röhre A fülle den Behälter in x, die Röhre B in y und die Röhre C in z Minuten, dann füllt A in 1 Minute $\frac{1}{x}$, B $\frac{1}{y}$ und C $\frac{1}{z}$ des Behälters. Daher ist

$$(1)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{35};\quad (2)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{42};\quad (3)\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{70}.$$

Die Summe dieser 3. Gl. ist $=(4)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30}$.

Subtrahiert man von (4) nacheinander die drei Gleichungen, so erhält man: $x=52\frac{1}{2}$, $y=105$, $z=210$ Minuten. Aus der Gleichung (4) folgt, daß alle 3 Röhren in 1 Minute $\frac{1}{30}$ des Behälters füllen; folglich haben sie zur Füllung des ganzen Behälters 30 Minuten nötig.

90. Der Behälter sei bis auf eine gewisse Höhe mit x *hl* angefüllt, und das, was an der vollständigen Füllung fehlt, betrage y *hl*, so würde die erste Röhre diese y *hl* in 7, die zweite in 5 und die dritte in $8\frac{3}{4}$ Stunden liefern. Läßt man die erste Röhre fließen und nimmt stündlich 28 *hl* heraus, so wird der Behälter in 40 Stunden leer. Während dieser Zeit lieferte die erste Röhre $\frac{40}{7}$y *hl*, wonach sich also im ganzen $(x+\frac{40}{7}y)$ *hl* Wasser in dem Behälter befanden, und da diese so viel betragen, als in den 40 Stunden ausflossen, so ist also:

$$(1)\ x+\tfrac{40}{7}y=40\times 28.$$

Öffnet man die zweite Röhre und nimmt stündlich 39 *hl* heraus, so wird der Behälter in 120 Stunden leer. Da die zweite Röhre den Behälter in 5 Stunden füllt, so füllte sie in 120 Stunden denselben 24mal; sie lieferte also in dieser Zeit 24y *hl*; es befanden sich demnach in dem Behälter im ganzen (x+24y) *hl* Wasser, und weil diese den herausgeflossenen 120×39 *hl* gleich sein müssen, so erhält man:

$$(2)\ x+24y=120\times 39.$$

Subtrahiert man (1) von (2) und bestimmt y, so findet man $y=194\frac{1}{16}$ *hl* und daraus $x=7\frac{1}{2}$ *hl*, die in dem Behälter

enthalten sind. Da die erste Röhre in 7 Stunden $194\frac{11}{16}$ *hl* liefert, so giebt sie in 1 Stunde $194\frac{11}{16} : 7 = 27\frac{13}{16}$ *hl* Wasser. Da die dritte Röhre den Behälter in $8\frac{3}{4}$ Stunden anfüllt, so liefert sie in einer Stunde $194\frac{11}{16} : 8\frac{3}{4} = 22\frac{1}{4}$ *hl*. Öffnet man demnach die dritte Röhre und nimmt stündlich 23 *hl* heraus, so nimmt man in einer Stunde $\frac{3}{4}$ *hl* mehr heraus; mithin wird der Behälter in $7\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 10$ Stunden leer.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Die erste Röhre füllt den Behälter in 7 Stunden, also in 1 Stunde $\frac{1}{7}$ des Behälters; die zweite Röhre dagegen, welche ihn in 5 Stunden füllt, füllt in 1 Stunde $\frac{1}{5}$ des Behälters; folglich füllt diese $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$ des Behälters mehr, als jene; folglich hätte diese in den 40 Stunden $40 \times \frac{2}{35} = 2\frac{2}{7}$mal mehr den Behälter gefüllt und hatte deshalb nicht 40 Stunden nötig gehabt, sondern $5 \times 2\frac{2}{7} = 11\frac{3}{7}$ Stunden weniger als die erste; die zweite Röhre hätte also nur $40 - 11\frac{3}{7} = 28\frac{4}{7}$ Stunden zu fließen nötig gehabt, um den Behälter mit $40 \times 28 = 1120$ *hl* zu füllen. Fließt die zweite 120 Stunden, so erhält der Behälter $120 \times 39 = 4680$ *hl*; folglich flossen durch die zweite Röhre in $120 - 28\frac{4}{7} = 91\frac{3}{7}$ Stunden $4680 - 1120 = 3560$ *hl* in den Behälter; also in 1 Stunde $3560 : 91\frac{3}{7} = 38\frac{15}{16}$ *hl*. Da sie denselben in 5 Stunden füllte, so mußte sie dem Behälter in dieser Zeit $5 \times 38\frac{15}{16} = 195\frac{11}{16}$ *hl* zuführen. Dieselbe Anzahl *hl* führte die erste Röhre ihm in 7 Stunden zu, also in 1 Stunde $194\frac{11}{16} : 7 = 27\frac{13}{16}$ *hl*. In 40 Std. füllte sie den Behälter mit $40 \times 27\frac{13}{16} = 1112\frac{1}{2}$ *hl*; da nun in dieser Zeit 1120 *hl* ausgeflossen, so mußte der Behälter $1120 - 1112\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ *hl* Wasser enthalten.

91. In der gesuchten Zahl seien der Hunderte x, der Zehner y, der Einer z, so ist, da ihre Quersumme 6 ausmacht:

$$(1)\ x + y + z = 6.$$

Die erste Ziffer linker Hand soll $\frac{1}{5}$ der durch die Zehner und Einer gebildeten Zahl betragen; es ist daher

$$(2)\ x = \tfrac{1}{5}(10y + z).$$

Die letzte Ziffer rechter Hand der verlangten Zahl beträgt die Hälfte der durch die Hunderter und Zehner gebildeten Zahl; es ist also

$$(3)\ z = \tfrac{1}{2}(10x + y).$$

Hieraus folgt $x = 1$, $y = 0$, $z = 5$; die Zahl heißt also 105.

Arithmetische Auflösung der eingeklammerten Zahlen. Die Quersumme der Zahl beträgt 3. Die Ziffer der Hunderter soll $\frac{1}{2}$ der durch die Zehner und Einer gebildeten Zahl sein, also muß diese Zahl durch 2 teilbar sein. Nun ist eine Zahl durch 2 teilbar, wenn die Einer der Zahl eine gerade Zahl oder 0 sind. Also muß auch die gesuchte Zahl eine gerade Zahl oder 0 zu Einern haben. Nun kann sie aber

wegen der fernern Bestimmung, daß sie $\frac{1}{5}$ der durch die Zehner und Hunderter gebildeten Zahl gleich sei, nicht 0, muß also eine gerade Zahl sein. Da nun ihre Quersumme 3 ausmacht, so können der Einer nur 2 sein; daher betragen die Hunderter 1, die Zehner 0 und die Einer 2; die Zahl heißt also 102.

92. Die kleinere Zahl heiße x und die größere y; folglich das Produkt derselben xy. Ferner habe der erste Rechner bei der Summation der multiplizierten Zahlen z Einer zu addieren vergessen, so ist, da er zur Probe das erhaltene Produkt durch die kleinere Zahl x teilte und 971 zum Quotienten und 214 zum Reste erhielt, das richtige Produkt $971x+214+z$. Da dies dem Produkte der beiden Zahlen gleich sein muß, so ist:

$$(1)\quad 971x+214+z=xy.$$

Der zweite Rechner vergaß bei der Addition eine Zwei an der nächstfolgenden Stelle herüberzuziehen, und da jede Ziffer, die um eine Stelle mehr zur Linken steht, 10mal größer ist, als die zunächst ihr zur Rechten stehende, so vergaß er $2\times10z=20z$ Einer hinzuzuzählen. Weil er bei der Division des erhaltenen Produktes 965 zum Quotienten und 198 zum Reste erhielt, so betrug das von ihm gefundene Produkt $965x+198$, und weil dies um 20z zu klein ist, so ist:

$$(2)\quad 965x+198+20z=xy.$$

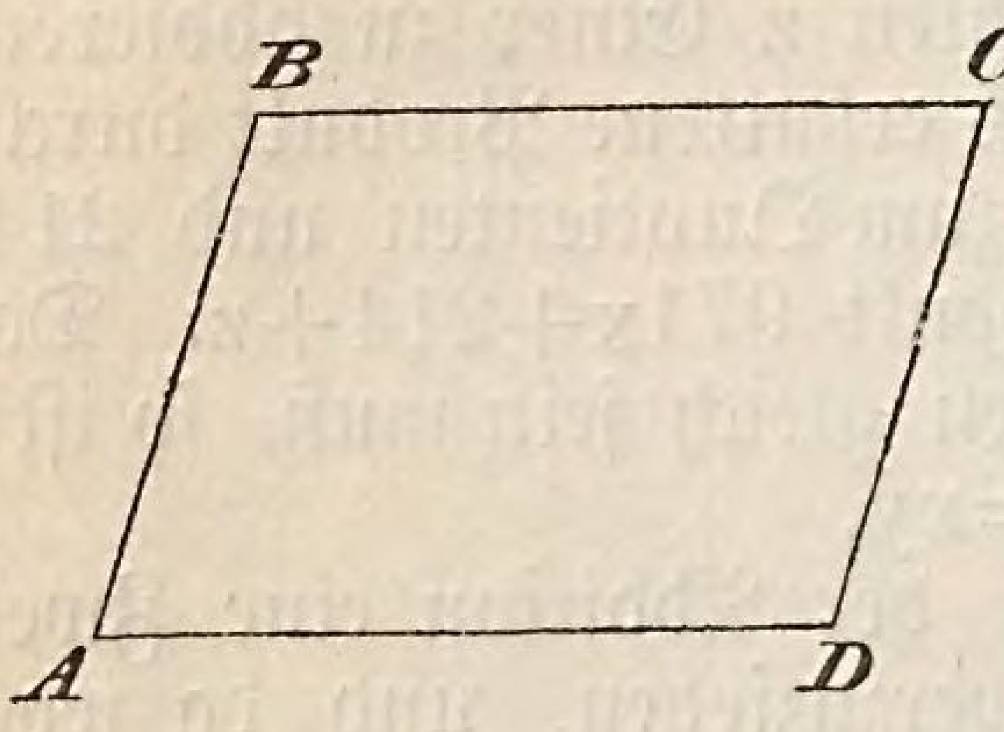
Der dritte fehlte bei der Summation um eine Eins auf der nächstfolgenden Stelle; also vergaß er $10\times10z=100z$ Einer hinzuzuzählen. Da er bei der Probe 940 zum Quotienten und 48 zum Reste erhielt, so war sein Produkt $940x+48$; und weil dasselbe um 100z vom richtigen Produkt verschieden war, so ist:

$$(3)\quad 940x+48+100z=xy.$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $x=314$, $y=972$ und $z=100$. Die beiden Zahlen sind also 314 und 972. Der erste fehlte bei den Hunderten, der zweite bei den Tausenden und der dritte bei den Zehntausenden.

Zweite (arithmetische) Auflösung. Aus den falschen Quotienten und Resten der 3 Knaben folgt, daß die Zahlen, die multipliziert werden sollten, beide dreistellig sind. Nun geben zwei dreistellige Zahlen, mit einander multipliziert, höchstens eine sechsstellige Zahl zum Produkt; dasselbe übersteigt also nicht die Hunderttausender. Nun sind bei der Summation der durch Multiplikation entstandenen Reihen der Einer immer weniger als 10; also konnte der erste Knabe bei den zu summierenden Zehnern keine Eins auslassen, weil keine von den Einern herkam. Also konnte auch bei den Zehnern der Fehler nicht stattfinden. Da nun jeder der beiden andern Knaben immer um eine Stelle mehr nach links

den Fehler beging, so konnte der dritte Knabe bloß bei den Zehntausenden fehlen, also der erste bloß bei den Hunderten. Somit war die Summe des ersten Knaben um 100, die des zweiten um 2000, die des dritten um 10000 zu klein. Der erste mußte deshalb als Quotient 971 und als Rest 214+100=314 erhalten, und dieser Rest muß notwendig gleich dem Divisor sein, weshalb also der richtige Quotient 971+1=972 ist. Daher heißen die Zahlen 314 und 972.



93. Die Entfernung AB sei x, BC=y, CD=z, AD=v *km*. Fahre ich von A über B und C nach D, so beträgt dieser Weg x+y+z *km*, wofür ich, weil für das *km* 0,10 ℳ Postgeld bezahlt wird, an Postgeld (x+y+z) . 0,10 ℳ bezahlen muß, und weil dasselbe 6,10 ℳ beträgt, so ist:

(1) (x+y+z) . 0,10=6,10.

Fahre ich von A über D und C nach B, so beträgt der abgemachte Weg y+z+v *km* und weil ich hierfür 5,50 ℳ Postgeld zahlen muß, so ist:

(2) (y+z+v) . 0,10=5,50.

Fahre ich von A über B nach C, so lege ich x+y *km* zurück und fahre ich von A über D nach C, so beträgt der Weg z+v *km*. Da ich für x+y *km* ebensoviel an Postgeld zahlen muß, als für y+v *km*, so ist auch:

(3) x+y=v+z.

Fahre ich endlich von B über A nach D=x+v *km*, so bezahle ich 0,40 ℳ weniger, als von B über C nach D=y+z *km*. Es ist daher:

(4) (x+v) . 0,10+0,40=(y+z) . 0,10.

Aus diesen 4 Gl. folgt: x=21, y=17, z=23, v=15.

94. A habe x, B y und C z Stück Vieh, so ist, da sie alle zusammen 138 Stück haben,

(1) x+y+z=138.

In Beziehung auf das, was jeder an Weidegeld für sein Vieh zu bezahlen hat, ist es einerlei, ob man denkt, A habe sein Vieh 5 Wochen lang auf die Weide getrieben, oder ob man denkt, A habe 5mal so viel Vieh, also 5x Stück eine Woche lang weiden lassen. Hiernach erhalten wir also:

A	treibt	5x	Stück	auf	die	erste	Weide 1	Woche
„	„	6x	„	„	„	zweite	„ 1	„
„	„	8x	„	„	„	dritte	„ 1	„
„	„	9x	„	„	„	vierte	„ 1	„

B	treibt	8y	Stück	auf	die	erste	Weide 1 Woche
"	"	12y	"	"	"	zweite	" 1 "
"	"	3y	"	"	"	dritte	" 1 "
"	"	5y	"	"	"	vierte	" 1 "
C	"	8z	"	"	"	erste	" 1 "
"	"	3z	"	"	"	zweite	" 1 "
"	"	10z	"	"	"	dritte	" 1 "
"	"	7z	"	"	"	vierte	" 1 "

Für (5x+8y+8z) Stück Vieh, die sie zusammen auf die erste Weide schicken, zahlen sie gemeinschaftlich 391,20 ℳ; also für 1 Stück $\frac{391,20}{5x+8y+8z}$ ℳ in einer Woche. Auf der zweiten Weide bezahlen sie wöchentlich für 1 Stück $\frac{349,20}{6x+12y+3z}$ ℳ und auf der dritten $\frac{414,80}{8x+3y+10z}$ ℳ. Weil nun auf jeder Weide gleich viel für die Woche und für jedes Stück bezahlt wird, so ist:

$$(2)\quad \frac{391,20}{5x+8y+8z}=\frac{349,20}{6x+12y+3z};$$

$$(3)\quad \frac{349,20}{6x+12y+3z}=\frac{414,80}{8x+3y+10z}.$$

Hieraus erhält man x=42 Stück Vieh für A, y=37 Stück für B und z=59 Stück für C.

Durch Substitution der Werte für x, y, z in (2) ergiebt sich, daß sie für 1 Stück in 1 Woche 40 ₰ bezahlen; folglich bezahlen sie für die vierte Weide, auf welcher 9×42+5×37+7×59=976 Stück 1 Woche lang geweidet, haben, 976×0,40=390,40 ℳ.

Zweite Auflösung. A gebe für sein Vieh in 1 Woche x ℳ, B y und C z ℳ, so erhält man nach den Bestimmungen der Aufgabe:

(1) 5x+8y+8z=391,20;
(2) 6x+12y+3z=349,20;
(3) 8x+3y+10z=414,80.

Aus diesen 3 Gl. folgt x=16,80, y=14,80, z=23,60 ℳ. Demnach bezahlte

A für die 4. Weide 9×16,80=151,20 ℳ;
B " " 4. " 5×14,80= 74,00 " ;
C " " 4. " 7×23,60=165,20 " ;

Sie bezahlen für die 4. Weide zusammen 390,40 ℳ.
Für alle 4 Weiden bezahlen sie daher zusammen:
391,20+349,20+414,80+390,40=1545,60 ℳ.

Nun hat jeder sein Vieh 28 Wochen lang auf die Weide getrieben und auf jeder Wiese gleich viel für die Woche und für jedes Stück bezahlt. Da sie nun für 138 Stück

1545,60 ℳ bezahlten, so gaben sie in 28 Wochen für 1 Stück 1545,60 : 138 = 11,20 ℳ; also in 1 Woche 11,20 : 28 = 0,40 ℳ. Nun hat A in 1 Woche für sein Vieh 16,80 ℳ bezahlt, folglich hatte er 16,80 : 0,40 = 42 Stück. B bezahlte für sein Vieh in 1 Woche 14,80 ℳ; also hatte er 14,80 : 0,40 = 37 Stück und C hatte 138 — (42 + 37) = 59 Stück.

95. Vor dem Spiele habe A x ℳ, B y ℳ, C z ℳ und D u ℳ gehabt. Sie spielen zusammen 4 Spiele und in jedem Spiele gewinnen 3 der Spielenden immer so viel, als sie nach dem vorhergehenden Spiele hatten. Beim ersten Spiele gewinnen A, B und C; also hatte nach dem ersten Spiele A 2x, B 2y, C 2z, D $u-(x+y+z)$.

Nach dem zweiten Spiele, in welchem C verliert, hatte A 4x, B 4y, C $2(z-x-y)-(u-x-y-z)=3z-(x+y+u)$, D $2(u-x-y-z)$.

Nach dem dritten Spiele, in welchem B verliert, hatte A 8x, B $4y-2(2x+u-x-y-z)-(3z-x-y-u)=7y-(x+z+u)$, C $2(3z-x-y-u)$, D $4(u-x-y-z)$. Nach dem vierten Spiele endlich, in welchem A verliert, hatte A $8x-(7y-x-z-u)-2(3z-x-y-u)-4(u-x-y-z)=15x-y-z-u$, B $2(7y-x-z-u)$, C $4(3z-x-y-u)$ und D $8(u-x-y-z)$.

Weil nun am Ende des vierten Spieles jeder 6,40 ℳ hat, so ist:

$$(1)\quad 15x-y-z-u=6{,}40;$$

(2) $2(7y-x-z-u)=6{,}40$ oder (3) $7y-x-z-u=3{,}20$;
(4) $4(3z-x-y-u)=6{,}40$ oder (5) $3z-x-y-u=1{,}60$;
(6) $8(u-x-y-z)=6{,}40$ oder (7) $u-x-y-z=0{,}80$.

Hieraus folgt $x=2$ ℳ, $y=3{,}60$ ℳ, $z=6{,}80$ ℳ, $u=13{,}20$ ℳ.

Zweite Auflösung. Vor dem Spiele habe A x, B y, C z, D u ℳ gehabt. Es sei ferner die Summe, welche alle 4 vor dem Spiele hatten = s, oder $x+y+x+u=s$. Da D u ℳ hat, so haben die drei andern $(s-u)$ ℳ und da A, B und C gewinnen, so verliert D $(s-u)$ ℳ. Es bleibt ihm daher am Ende des ersten Spieles noch $u-(s-u)=2u-s$ und A hat 2x, B 2y, C 2z. Da C 2z ℳ hat, so haben A, B und D $s-2z$ und C verliert daher $s-2z$; behält also noch $2z-(s-2z)=4z-s$ übrig. Am Ende des zweiten Spieles hat also A 4x, B 4y, C $4z-s$, D $4u-2s$. Da B 4y ℳ hat, so haben die übrigen $s-4y$; dies verliert B; folglich bleibt ihm noch $4y-(s-4y)=8y-s$ übrig. Am Ende des dritten Spieles hat also A 8x, B $8y-s$, C $8z-2s$, D $8u-4s$. Da A 8x ℳ hat, so haben die übrigen $s-8x$; nach deren Verlust dem A noch $8x-(s-8x)=16x-s$ übrig bleibt. Am Ende des vierten Spieles hat also A $16x-s$,

B 16y—2s, C 16z—4s, D 16u—8s. Da jeder nach dem Spiele gleichviel hatte, nämlich 6,40 ℳ, so hatten sie vor dem Spiele zusammen 4×6,40=25,60 ℳ=s. Es ist demnach:

16x—1×25,60=6,40; folglich x= 2 ℳ A;
16y—2×25,60=6,40; „ y= 3,60 „ B;
16z—4×25,60=6,40; „ z= 6,80 „ C;
16u—8×25,60=6,40; „ u=13,20 „ D.

Dritte (arithmetische) Auflösung. Da jeder Gewinnende bei jedem Spiele so viel gewann, als er hatte, so mußte er nach jedem Spiele das Doppelte von dem haben, was er vor dem Spiele hatte. Da nach dem vierten Spiele jeder 6,40 ℳ hatte und während des Spieles kein Geld hinzugekommen war, so hatten sie sowohl vor als nach dem Spiele zusammen 25,60 ℳ, und weil beim vierten Spiele A, beim dritten B, beim zweiten C, und beim ersten D der Verlierende ist, so hatte vor dem vierten Spiele
D 6,40 : 2=3,20; C 6,40 : 2=3,20; B 6,40 : 2=3,20, A 6,40 +3 . 3,20=16 ℳ; vor dem dritten Spiele
D 3,20 : 2=1,60; C 3,20 : 2=1,60; A 16 : 2=8; B 3,20 +8+2 . 1,60=14,40 ℳ; vor dem zweiten Spiele
D 1,60 : 2=0,80: B 14,40 : 2=7,20; A 8 : 2=4; C=1,60 +0,80+7,20+4=13,60 ℳ; vor dem ersten Spiele
A 4 : 2=2; B 7,20 : 2=3,60; C 13,60 : 2=6,80;
D 0,80+2+3,60+6,80=13,20 ℳ.

Vierte (arithmetische) Auflösung. Da jeder jedesmal an die andern soviel verliert, als diese haben, so verliert er immer die Hälfte von deren Summe und jeder der andern hat vorher gerade die Hälfte von seinem Gelde. D hat zuerst verloren, dann aber sein Geld dreimal verdoppelt bekommen, oder das achtmalige erhalten, welches jetzt 6,40 ℳ beträgt; sein Rest nach dem Verluste war also 6,40 : 8=0,80 ℳ. Da sie zusammen 4×6,40=25,60 ℳ haben, D jetzt aber 0,80 ℳ hat, so hat er an die andern verloren die Hälfte von (25,60—0,80)=12,40 ℳ; folglich hatte er 12,40+0,80=13,20 ℳ.

C verliert beim zweiten Spiele, folglich hatte er, da er im dritten und vierten Spiele gewann, zuletzt das vierfache Geld dessen, was ihm nach dem Verluste übrig geblieben war; er behielt also am Ende des zweiten Spieles noch 6,40 : 4=1,60 ℳ. Nun hatte er die Hälfte von (25,60—1,60) =24,00=12 ℳ verloren; folglich hatte er vor dem Verluste 12,0+1,60=13,60 und anfangs also 13,60 : 2=6,80 ℳ.

B hatte beim letzten Spiele sein Geld verdoppelt erhalten, also hatte er nach dem Verluste 6,40 : 2=3,20 ℳ. Vor dem Verluste betrug also sein Geld

$\frac{1}{2}(25{,}60-3{,}20)+3{,}20=\frac{1}{2}\times 22{,}40+3{,}20=$
$11{,}20+3{,}20=14{,}40.$
Dies ist aber das Vierfache seines Geldes; folglich hatte er anfangs 14,40 : 4=3,60 ℳ.

A hatte zuletzt $=\frac{1}{2}(3\times 6{,}40)=\frac{1}{2}\times 19{,}20=9{,}60$ ℳ verloren; er hatte also vor dem Verluste 9,60+6,40=16,00 ℳ, welches Geld er durch dreimalige Verdoppelung erhalten hatte; mithin betrug dasselbe das Achtfache von seinem ursprünglichen Gelde; also hatte er 16 : 8=2 ℳ.

96. Vor der Verteilung haben sich im Korbe A x, B y, C z, D u, E v, F w, G t Äpfel befunden. Setzt man nun die Anzahl aller in den sieben Körben sich befindenden Äpfel gleich s, so daß also x+y+z+u+v+w+t=s, so erhält man nach den in der zweiten Auflösung der vorhergehenden Aufgabe angestellten Betrachtungen nach der 1. Verteilung aus dem 1. Korbe in die übrigen:

A 2x—s, B 2y, C 2z, D 2u, E 2v, F 2w und G 2t.

Nach der 2. Verteilung aus B in die übrigen:

A 4x—2s, B 4y—s, C 4z, D 4u, E 4v, F 4w, G 4t.

Nach der 3. Verteilung aus C in die übrigen:

A 8x—4s, B 8y—2s, C 8z—s, D 8u, E 8v, F 8w, G 8t.

Nach der 4. Verteilung aus D in die übrigen:

A 16x—8s, B 16y—4s, C 16z—2s, D 16u—s, E 16 v, F 16w, G 16t.

Nach der 5. Verteilung aus E in die übrigen:

A 32x—16s, B 32y—8s, C 32z—4s, D 32u—2s, E 32v—s, F 32w, G 32t.

Nach der 6. Verteilung aus F in die übrigen:

A 64x—32s, B 64y—16s, C 64z—8s, D 64u—4s, E 64v—2s, F 64w—s, G 64t.

Endlich nach der 7. Verteilung aus G in die übrigen:

A 128x—64s, B 128y—32s, C 128z—16s, D 128u—8s, E 128v—4s, F 128w—2s, G 128t—s.

Da nach der letzten Verteilung in jedem Korbe gleich viel ist, nämlich 128 Äpfel, und während der verschiedenen Verteilungen keine neuen Äpfel hinzugekommen waren, so war in sämtlichen Körben vor der Verteilung 7×28=896=s. Danach ist:

128x —64×896=128;	folglich	x=449	Äpfel A;
128y —32×896=128;	„	y=225	„ B;
128z —16×896=128;	„	z=113	„ C;
128u — 8×896=128;	„	u= 57	„ D;
128v — 4×896=128;	„	v= 29	„ E;
128w— 2×896=128;	„	w= 15	„ F;
128t — 1×896=128;	„	t= 8	„ G;

Zweite (arithmetische) Auflösung. Aus jedem Korbe

werden den anderen so viel Äpfel mitgeteilt, als sie bereits haben, und nach siebenmaliger Operation befinden sich in allen Körben gleichviel Äpfel, nämlich 128. Ehe also die Verteilung aus G geschieht, befindet sich in jedem der übrigen Körbe nur die Hälfte von dem, was vorher darin war. Ebenso verhält es sich bei den folgenden Operationen.

	A	B	C	D	E	F	G
Zugelegt hatte	128	128	128	128	128	128	128
Ehe die Verteilung aus G geschah, hatte	64	64	64	64	64	64	512
" " " " F " "	32	32	32	32	32	480	256
" " " " E " "	16	16	16	16	464	240	128
" " " " D " "	8	8	8	456	232	120	64
" " " " C " "	4	4	452	228	116	60	32
" " " " B " "	2	450	226	114	58	30	16
" " " " A " "	449	225	113	57	29	15	8

Dritte Auflösung. Die in der ersten Auflösung für A, B, C, D, E, F, G gefundenen Endausdrücke lassen sich auch auf folgende Weise darstellen:

$$A\ 2^7x-2^6s,\ B\ 2^7y-2^5s,\ C\ 2^7z-2^4s,\ D\ 2^7u-2^3s,$$
$$E\ 2^7v-2^2s,\ F\ 2^7w-2^1s,\ G\ 2^7t-2^0s.$$

Hier ist nun ein Gesetz sichtbar. Die Summe der Äpfel aller sieben Körbe ist s, und da zuletzt gleichviel in jedem Korbe sein soll, so muß s ein Vielfaches von der Anzahl der Körbe sein, in unserer Aufgabe also ein Siebenfaches, nämlich $s=7\times128=7\times2^7$. Wenn also n Körbe wären, so hätten wir hiernach $s=n\,.\,2^n$. Im siebenten Korbe befand sich am Ende der Verteilung $2^7t-2^0s=\frac{s}{7}$; im sechsten $2^7w-2^1s=\frac{s}{7}$ u. s. w. Wären nun n Körbe, die wir mit $k_n,\ k_{n-1},\ k_{n-2}\ldots k_3,\ k_2,\ k_1$, bezeichnen, und hätten anfangs $x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2}\ldots x_3,\ x_2,\ x_1$ enthalten, so ergeben sich leicht folgende Formeln für das, was in jedem dieser Körbe nach beendigter Operation sein muß, und aus diesen Formeln ergiebt sich dann sofort die Anzahl der Äpfel, die am Anfange in jedem Korbe wären. Am Ende der Operation hat:

$$k_1\ 2^nx_1-2^0s=\frac{s}{n};\ \text{folglich}\ x_1=(n+1)\frac{s}{n\,.\,2^n}=n+1,\ \text{weil}$$
$$s=n\,.\,2^n\ \text{ist.}$$

$k_2\ 2^n x_2 - 2^1 s = \frac{s}{n}$; folglich $x_2 = (2n+1)\frac{s}{n\,.\,2^n} = 2n+1.$

$k_3\ 2^n x_3 - 2^2 s = \frac{s}{n}$; folglich $x_3 = (4n+1)\frac{s}{n\,.\,2^n} = 4n+1.$

$k_4\ 2^n x_4 - 2^3 s = \frac{s}{n}$; folglich $x_4 = (8n+1)\frac{s}{n\,.\,2^n} = 8n+1.$

$k_5\ 2^n x_5 - 2^4 s = \frac{s}{n}$; folglich $x_5 = 16n+1.$

$k_6\ 2^n x_6 - 2^5 s = \frac{s}{n}$; folglich $x_6 = 32n+1.$

: : : : : :

: : : : : :

$k_n,\ 2^n x_n - 2^{n-1}\,.\,s = \frac{s}{n}$; folglich $x_n = 2^{n-1}\,.\,n+1.$

Die Formeln geben also sofort die gesuchten Zahlen auf die einfachste und leichteste Weise. In unserer Aufgabe ist $n=7$; folglich waren anfangs in

G oder k_1, $t = x_1 = 7+1 = 8$ Äpfel,
F „ k_2, $w = x_2 = 2\times7+1 = 15$ Äpfel,
E „ k_3, $v = x_3 = 4\times7+1 = 29$ „
D „ k_4, $u = x_4 = 8\times7+1 = 57$ „
C „ k_5, $z = x_5 = 16\times7+1 = 113$ „
B „ k_6, $y = x_6 = 32\times7+1 = 225$ „
A „ k_7, $x = x_7 = 64\times7+1 = 449$ „

97. Die erste Zahl heiße x, die zweite y, die dritte z, die pte u, die (n—2)te v, die (n—1)te w und die nte heiße t, die Anzahl aller Zahlen sei $=s$, so daß also

$$x+y+z+u+v+w+t=s.$$

Giebt die erste Zahl soviel ab an alle übrigen, als jede groß ist, so beträgt nach den in den beiden vorhergehenden Auflösungen entwickelten Gründen, da bei n Zahlen dieses Abgeben auch nmal geschieht, am Ende

die erste Zahl $2^n x - 2^{n-1} s$;
die zweite Zahl $2^n y - 2^{n-2} s$;
die dritte Zahl $2^n z - 2^{n-3} s$;
: : : :
: : : :
die pte Zahl $2^n u - 2^{n-p} s$;
: : : :
: : : :
die (n—2)te Zahl $2^n v - 2^2 s$;
die (n—1)te Zahl $2^n w - 2^1 s$;
die nte Zahl $2^n t - 2^0 s$.

Da auf diese Weise zuletzt n Zahlen entstehen, die alle $=a$ sind, und also $s = n\times a$ beträgt, so ist:

$2^n x - 2^{n-1} na = a$, oder $2^n x = 2^{n-1} na + a$;

folglich $x = \frac{2^{n-1} . na + a}{2^n} = \frac{2^{n-1} . n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n y - 2^{n-2} \times na = a$; folglich $y = \frac{2^{n-2} . n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n z - 2^{n-3} \times na = a$; folglich $z = \frac{2^{n-3} . n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n u - 2^{n-p} \times na = a$; folglich $u = \frac{2^{n-p} . n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n v - 2^2 \times na = a$; folglich $v = \frac{2^2 n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n w - 2^1 \times na = a$; folglich $w = \frac{2n + 1}{2^n} \times a$.

$2^n t - 2^0 na = a$; folglich $t = \frac{n + 1}{2^n} \times a$.

Zweite Auflösung. Bezeichnet man die Zahlen mit $z_n, z_{n-1}, z_{n-2} \ldots z_3, z_2, z_1$ und die anfängliche Größe jeder Zahl mit $x_n, x_{n-1}, x_{n-2} \ldots x_3, x_2, x_1$, so beträgt nach der

	z_n	z_{n-1}	....	z_3	z_2	z_1
1. Operation	$2x_n - s$,	$2x_{n-1}$	....	$2x_3$,	$2x_2$,	$2x_1$;
2. „	$4x_n - 2s$,	$4x_{n-1} - s$	....	$4x_3$,	$4x_2$,	$4x_1$;
3. „	$8x_n - 4s$,	$8x_{n-1} - 2s$	...	$8x_3$,	$8x_2$,	$8x_1$;
4. „	$16x_n - 8s$,	$16x_{n-1} - 4s$	...	$16x_3$,	$16x_2$,	$16x_1$;
:	:	:		:	:	:
:	:	:		:	:	:
n^{ten} „	$2^n x_n - 2^{n-1} s$,	$2^n x_{n-1} - 2^{n-2} s$	..	$2^n x_3 - 2^2 s$,	$2^n x_2 - 2s$,	$2^n x_1 - s$.

Nach den n Operationen beträgt also:

die Zahl z_1 $2^n x_1 - s = \frac{s}{n}$; folglich $x_1 = (n+1)\frac{s}{n \times 2^n} = (n+1)\frac{a}{2^n}$, weil $s = n \times a$.

die Zahl z_2 $2^n x_2 - 2s = \frac{s}{n}$; folglich $x_2 = (2n+1)\frac{a}{2^n} = [2(n+1)-1]\frac{a}{2^n} = 2x_1 - 1$;

die Zahl z_3 $2^n x_3 - 4s = \frac{s}{n}$; folglich $x_3 = (4n+1)\frac{a}{2^n} = [2(2n+1)-1]\frac{a}{2^n} = 2x_2 - 1$;

die Zahl z_4 $2^n x_4 - 8s = \frac{s}{n}$; folglich $x_4 = (8n+1)\frac{a}{2^n} = [2(4n+1)-1]\frac{a}{2^n} = 2x_3 - 1$;

die Zahl z_5 $2^n x_5 - 16s = \frac{s}{n}$; folglich $x_5 = (16n+1)\frac{a}{2^n} =$

$$[2(8n+1)-1]\frac{a}{2^n} = 2x_4 - 1;$$

: : : : :

: : : : :

die Zahl $z_{n-1} 2^n x_{n-1} - 2^{n-2}s = \frac{s}{n}$; folglich $x_{n-1} = (2^{n-2}n+1)\frac{a}{2^n}$

die Zahl $z_n 2^n x_n - 2^{n-1}s = \frac{s}{n}$; folglich $x_n = (2^{n-1}.n+1)\frac{a}{2^n} =$

$$[2(2^{n-2}n+1)-1]\frac{a}{2^n} = 2x_{n-1} - 1.$$

Vermittels dieser Formeln kann man leicht im vorhergehenden Beispiele die Anzahl der Äpfel berechnen, die anfangs in jedem Korbe waren.

Hier ist $n=7$, $a=128$ und $2^n = 2^7 = 128$; folglich $a:2^n = 1$. Hiernach ist

$x_1 = 7 + 1 = 8;$
$x_2 = 2 \times 8 - 1 = 15;$
$x_3 = 2 \times 15 - 1 = 29;$
$x_4 = 2 \times 29 - 1 = 57;$
$x_5 = 2 \times 57 - 1 = 113;$
$x_6 = 2 \times 113 - 1 = 225;$
$x_7 = 2 \times 225 - 1 = 449.$

98. Heißen die beiden Dividenden x und y, so ist:

$$\frac{x}{3+4z} + \frac{y}{6+7z} = \frac{27+34z}{(3+4z)(6+7z)}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die Gleichung mit $(3+4z)(6+7z)$ multipliziert:

$$x(6+7z) + y(3+4z) = 27+34z, \text{ oder}$$
$$6x + 7zx + 3y + 4zy = 27 + 34z.$$

Nun müssen x und y reine Ziffern ohne z sein, da sonst 7zx und 4zy ein Quadrat von z ergeben würden. Daher lassen sich aus jener einen Gleichung folgende zwei herleiten:

(1) $6x + 3y = 27;$

(2) $7xz + 4yz = 34z$ oder $7x + 4y = 34,$

woraus sich ergiebt, daß

$x=2$ und $y=5$. Es ist also

$$\frac{27+34z}{(3+4z)(6+7z)} = \frac{2}{3+4z} + \frac{5}{6+7z}.$$

99. Die beiden Dividenden seien x und y, so ist:

$$\frac{x}{c-dz} + \frac{y}{e-fz} = \frac{a-bz}{(c-dz)(e-fz)} \text{ oder}$$

$$x(e-fz)+y(c-dz)=a-bz \text{ oder}$$
$$ex-fzx+cy-dzy=a-bz.$$

In x und y darf, damit diese Gleichung richtig sei, z nicht vorkommen, da man sonst z^2 erhalten würde; daher folgen aus dieser einen Gleichung folgende zwei andere:

$$(1)\ ex+cy=a;\ (2)\ fx+dy=b.$$

Hieraus folgt, daß

$$x=\frac{bc-ad}{cf-de} \text{ und } y=\frac{af-be}{cf-de}.$$

100. Heißen die drei gesuchten Dividenden z, y, v, so erhält man:

$$\frac{z}{8x-7}+\frac{y}{5x-4}+\frac{v}{2x-1}=\frac{306x^2-450x+162}{(8x-7)(5x-4)(2x-1)}$$

oder $z(5x-4)(2x-1)+y(8x-7)(2x-1)+$
$v(8x-7)(5x-4)=306x^2-450x+162$ oder
$z(10x^2-13x+4)+y(16x^2-22x+7)+$
$v(40x^2-67x+28)=306x^2-450x+162$, oder
$10x^2z-13xz+4z+16x^2y-22xy+7y+$
$40x^2v-67xv+28v=306x^2-450x+162.$

In z, y und v darf x nicht vorkommen, da man sonst x^3 erhalten würde; z, y und v müssen also reine Ziffern sein. Daher ergeben sich aus dieser Gleichung folgende drei:

$$(1)\ 4z+7y+28v=162$$
$$-13xz-22xy-67xv=-450x \text{ oder}$$
$$(2)\ 13z+22y+67v=450;$$
$$10x^2z+16x^2y+40x^2v=360x^2, \text{ oder}$$
$$(3)\ 10z+16y+40v=360.$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man: z=9, y=6 und v=3, weshalb die 3 Quotienten heißen:

$$\frac{9}{8x-7}+\frac{6}{5x-4}+\frac{3}{2x-1}.$$

II. Gleichungen vom zweiten Grade.

A. Mit einer unbekannten Größe.

1. Ueber die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

§. 339. Die Gleichungen vom zweiten Grade oder quadratische Gleichungen (d. h. solche, worin die unbekannten Größen in der zweiten Potenz vorkommen) zerfallen in reine und gemischte. Eine reine quadratische Gleichung ist eine solche, welche bloß die zweite Potenz der Unbekannten enthält; sie hat die Form $ax^2=b$. Hat sie jedoch diese Form nicht, so muß sie darauf gebracht werden. Hätte man nun die vorstehende Gleichung auf-

zulösen, so befreie man vorerst die zweite Potenz von x von ihrem Koeffizienten; man erhält dann $x^2=b:a$. Die Aufgabe reduziert sich also darauf, eine Zahl zu finden, die, ins Quadrat erhoben, die durch $b:a$ ausgedrückte Zahl zum Produkt giebt. Hierin besteht die Extraktion der Quadratwurzel. Wenn nun $b:a$ eine positive, ganze oder gebrochene Zahl ist, so kann man daraus nach den §§. 303 und 315 entweder genau oder näherungsweise die Quadratwurzel finden, und wenn $b:a$ eine algebraische Größe ist, so wendet man auf dieselbe das in den §§. 318 und 319 gezeigte Verfahren zur Extraktion der Quadratwurzel aus algebraischen Größen an. Das in beiden Fällen gefundene Resultat drückt alsdann einen Wert von x aus, welcher der Gleichung genügt.

Nun ist hierbei zu bemerken, daß m^2 nach §. 299 sowohl das Quadrat von $(+m)$, als auch von $(-m)$ sein kann; folglich muß das in Rede stehende Resultat sowohl mit dem Zeichen + als auch mit dem Zeichen — genommen werden, weshalb die Gleichung in der That zwei Auflösungen hat, welche durch

$$x=\pm\sqrt{b:a},$$

ausgedrückt werden. Denn setzt man jeden der beiden Werte $+\sqrt{b:a}$ und $-\sqrt{b:a}$ besonders in die gegebene Gleichung: $ax^2=b$, so erhält man:

$$a.(+\sqrt{b:a})^2=b, \text{ oder } a.(b:a)=b \text{ oder nach §. 72: } b=b;$$

und $a.(-\sqrt{b:a})^2=b$, oder $a.(b:a)=b$ oder wieder $b=b$. Ist aber $b:a$ eine negative Größe, so sind die beiden Werte von x imaginär (§. 299. c.) d. h. der Gleichung oder der Aufgabe, deren algebraischer Ausdruck sie ist, kann durch keine Zahl, weder genau noch näherungsweise Genüge geschehen.

Daß der Wurzelwert obiger Gleichung, nämlich $\sqrt{b:a}$ sowohl positiv als negativ ist, ergiebt sich auch noch aus folgender Betrachtung:

Da $b:a=\sqrt{(b:a)^2}$, so verwandelt sich die Gl.: $x^2=b:a$ oder $x^2-(b:a)=0$ in die folgende:

$$x^2-\sqrt{(b:a)^2}=0; \text{ oder nach §. 69, 2 in:}$$

$(x+\sqrt{b:a})(x-\sqrt{b:a})=0$. Dieser Gl. geschieht Genüge, wenn sowohl $x+\sqrt{b:a}=0$, als auch $x-\sqrt{b:a}=0$ gesetzt wird. Im ersten Falle ist:

$x_1=+\sqrt{b:a}$, im andern Falle $x_2=-\sqrt{b:a}$; daher also wieder:

$$x_1 \text{ und } x_2=\pm\sqrt{b:a}.$$

Die beiden Werte für x ergeben sich auch, wenn wir $b:a=n^2$ setzen. In diesem Falle verwandelt sich die Gl. $x^2-(b:a)=0$ in die folgende: $x^2-n^2=0$ oder $(x+n)(x-n)=0$, woraus sich ergiebt: $x_1=+n$ und $x_2=-n$. Es ist also

$$x_1 \text{ und } x_2=\pm n=\pm\sqrt{b:a}.$$

Hieraus folgt, daß jede reine Gleichung vom zweiten Grade zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte für die unbekannte Größe hat, welche beiden Werte die Wurzel dieser Gleichung genannt werden, und welche, statt x gesetzt, die Gleichung $x^2=(b:a)$ oder $x^2-(b:a)=0$ identisch machen.

2. Methoden, gemischte quadratische Gleichungen aufzulösen.

A. Durch Ergänzung des unvollständigen Quadrats in ein vollständiges.

§. 390. Ist eine quadratische Gleichung geordnet, also auf die Form

$$x^2 \pm px = \pm q \text{ oder } x^2 \pm px \pm q = 0$$

gebracht, so heißt sie eine *gemischte* quadratische Gleichung, weil die Unbekannte außer in der zweiten, auch noch in der ersten Potenz vorkommt. Bei ihrer Auflösung kommt es darauf an, sie auf eine vom ersten Grade zurückzuführen. Wäre der erste Teil derselben, nämlich $x^2 \pm px$ ein vollständiges Quadrat, so würde durch Ausziehen der Wurzel aus beiden Teilen der Gleichung dieselbe gelöst sein. Der erste Teil jeder quadratischen Gleichung, die auf die obige Form gebracht ist, läßt sich nun leicht in ein vollständiges Quadrat verwandeln, wenn man bedenkt, daß das Quadrat jeder zweiteiligen Größe aus dem Quadrate des ersten Teiles, vermehrt oder vermindert um das doppelte Produkt beider Teile und dem Quadrate des zweiten Teiles besteht, jenachdem eine Summe oder eine Differenz ins Quadrat erhoben werden soll. Betrachtet man die Gleichung $x^2 \pm px = q$, so erkennt man bald, daß der eine Teil derselben, nämlich $x^2 \pm px$ ein Teil des Quadrats von $(x \pm \frac{1}{2}p)$ ist und zwar, weil

$$(x \pm \tfrac{1}{2}p)^2 = x^2 \pm px + \tfrac{1}{4}p^2,$$

so ist $x^2 \pm px$ gleich dem Quadrate des ersten Teiles, vermehrt oder vermindert um das doppelte Produkt aus dem einen in den andern Teil. Wenn man also das Quadrat von $\frac{1}{2}p$ oder $\frac{1}{4}p^2$ zu $x^2 \pm px$ addiert, so wird der erste Teil der Gleichung das Quadrat von $x \pm \frac{1}{2}p$. Damit aber die Gleichheit nicht gestört wird, muß man auch zum zweiten Teile der Gleichung $\frac{1}{4}p^2$ addieren. Dadurch erhält man:

$$x^2 \pm px + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2 + q,$$

$$\text{oder } (x \pm \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 \pm q.$$

Zieht man jetzt aus beiden Teilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ist:

$$x \pm \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}; \text{ folglich } x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q}.$$

Zur Auflösung einer gemischten Gleichung des zweiten Grades durch Ergänzung des unvollständigen Qadrats kann daher folgende allgemeine Regel aufgestellt werden: Nachdem man die

gegebene Gleichung auf die Form $x^2 \pm px = \pm q$ zurückgeführt hat, addiere man zu beiden Teilen der Gleichung das Quadrat der Hälfte des Koeffizienten von x, ziehe aus beiden Teilen die Quadratwurzel, indem man der Wurzel im zweiten Teile das doppelte Zeichen $\pm$ vorsetzt und leite endlich aus dieser neuen Gleichung die beiden Werte von x ab.

Gegeben sei die Gleichung:

$$x - 26x + 168 = 0.$$

Man bringe das Absolutglied 168 auf die rechte Seite der Gl., so ist:

$$x^2 - 26x = -168.$$

Die Hälfte des Koeffizienten von x, nämlich $26:2=13$ erhebe man ins Quadrat und addiere dasselbe zu beiden Seiten der Gleichung. Es wird dadurch:

$$x^2 - 26x + 13^2 = 13^2 - 168.$$

Nun ist die linke Seite ein vollständiges Quadrat geworden und wir können daher derselben auch folgende Form geben:

$$(x-13)^2 = 1.$$

Ziehen wir jetzt aus beiden Teilen der Gl. die Quadratwurzel, so ist:

$$x - 13 = \pm 1.$$

Durch die verschiedenen Operationen haben wir also aus der gegebenen gemischten Gleichung vom zweiten Grade eine solche vom ersten abgeleitet. Bestimmen wir hierin die Werte für x, so finden wir

$$x = 13 \pm 1.$$

Gilt das obere Zeichen +, so wird $x_1 = 14$, gilt aber das untere —, so wird $x_2 = 12$.

Gegeben sei ferner die Gleichung

$$x^2 + 44x - 1632 = 0 \text{ oder geordnet}$$
$$x^2 + 44x = 1632.$$

Durch Ergänzung des Quadrats haben wir:

$$x^2 + 44x + 22^2 = 22^2 + 1632 \text{ oder}$$
$$(x+22)^2 = 2116; \text{ hieraus die Quadratwurzel giebt:}$$
$$x + 22 = \pm 46; \text{ daher}$$
$$x = -22 \pm 46; \text{ also } x_1 = 24,\ x = -68.$$

Die gemischten quadratischen Gl. werden durchschnittlich nach dieser Methode berechnet, weil sie die leichteste und einfachste von allen Methoden ist.

B. Durch Zurückführung einer gemischten quadratischen Gleichung auf eine reine, worin das zweite Glied fehlt.

Je nachdem das zweite Glied durch + oder — mit dem ersten verbunden ist, substituiere man für x entweder die Summe oder die Differenz zwischen y und dem halben Koeffizienten von x in

die Gleichung und berechne hiernach den Wert derselben; auf diese Weise entsteht eine neue quadratische Gleichung in y, worin aber das zweite Glied fehlt. Alsdann berechne man den Wert für y und setze den gefundenen Wert für y in die für x substituierte Summe oder Differenz ein, woraus sich schließlich der Wert für x ergiebt.

Gegeben sei die Gl: $x^2+ax+b=0$.

Da hier die beiden ersten Glieder durch x mit einander verbunden sind, setze man $x=y-\frac{1}{2}a$; alsdann erhalten wir:

$$(y-\tfrac{1}{2}a)^2+a(y-\tfrac{1}{2}a)+b=0;\text{ hieraus wird:}$$

$$y^2-\tfrac{1}{4}a^2+b=0;\text{ also } y^2=\tfrac{1}{4}a^2-b;\text{ daher}$$

$y=\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}$. Substituieren wir diesen Wert für y in $x=y-\frac{1}{2}a$,

so wird x_1 und $x_2=\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b}-\frac{1}{2}a$.

Wäre die Gl. $x^2-ax-b=0$ gegeben, so hat man $x=y+\frac{1}{2}a$; dann $(y+\frac{1}{2}a)^2-a(y+\frac{1}{2}a)-b=0$; hieraus ist:

$$y^2-\tfrac{1}{4}a^2-b=0;\text{ also } y^2=\tfrac{1}{4}a^2+b;\text{ daher}$$

$$y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+b}\text{ und mithin } x_1 \text{ und } x_2=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+b}+\tfrac{1}{2}a.$$

Man setze also in der Gleichung

$$x^2-16x+63=0$$

$x=y+8$, alsdann entsteht aus der Gl. in x folgende in y:

$$(y+8)^2-16(y+8)+63=0\text{ und hieraus}$$

$$y^2-1=0;\text{ also } y_1=1,\ y_2=-1.\text{ Daher}$$

$$x_1=1+8=9,\ x_2=-1+8=7.$$

C. Durch Zerlegung der gegebenen Gleichung in zwei binomische Faktoren.

Wenn a und b die Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind, so können ihre beiden binomischen Faktoren folgende vier, rücksichtlich der Zeichen verschiedene Formen haben:

(1) $(x+a)(x+b)=0$ oder $x^2+(a+b)x+ab=0$

(2) $(x+a)(x-b)=0$ „ $x^2+(a-b)x-ab=0$

(3) $(x-a)(x+b)=0$ „ $x^2-(a-b)x-ab=0$

(4) $(x-a)(x-b)=0$ „ $x^2-(a+b)x+ab=0$.

Aus der Entwickelung der binomischen Faktoren geht hervor, daß der Koeffizient des zweiten Gliedes einer quadratischen Gleichung die Summe und das Absolutglied das Produkt der beiden Wurzeln enthält. Hiernach ist in der Gleichung von der Form

$$x^2+mx+n=0$$

die Summe der Wurzeln$=m$ und ihr Produkt$=n$.

Alle Gleichungen von der ersten Form (1) haben zwei negative Wurzeln; alle Gleichungen von der zweiten Form (2) haben die größere Wurzel negativ, die kleinere positiv; alle Gleichungen von der dritten Form (3) haben die größere positiv, die kleinere negativ und alle Gleichungen von der vierten Form (4) haben

beide Wurzeln positiv. Hieraus geht hervor, daß die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeden Gleichung vom zweiten Grade aus den Zeichen des zweiten und dritten Gliedes zu erkennen ist. In wiefern dies der Fall ist, soll an 4 den obigen Formen entsprechenden Gleichungen nachgewiesen werden.

α) In der Gleichung $x^2+5x+6=0$ ist 5 die Summe und 6 das Produkt der Wurzeln. Jene besteht aus der Summe zweier Summanden, dieses aus dem Produkte zweier Faktoren. Weil beide Glieder positiv sind, so ist 6 aus $2 . 3$ und daher 5x aus aus $2x+3x$ entstanden. Hiernach ist:

$$x^2+5x+6=x^2+2x+3x+2 . 3=0 \text{ und hieraus}$$
$$x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)=0.$$

Setzen wir jeden binomischen Faktor gleich Null, so wird

$$x+2=0;\ x_1=-2;\ x+3=0;\ x_2=-3.$$

β) In der Gl. $x^2+x-6=0$ ist das Produkt der Wurzeln, nämlich 6, negativ, also müssen seine Faktoren entgegengesetzte Zeichen haben. Und weil das zweite Glied positiv ist, so muß der größere Faktor von -6 positiv und der kleinere negativ sein; weshalb -6 aus $3 . (-2)$ und daher das zweite Glied x aus $3x-2x$ entstanden ist. Es ist also:

$$x^2+x-6=x^2+3x-2x+3 . (-2)=x(x+3)-2(x+3)=0$$
$$\text{oder } (x-2)(x+3)=0; \text{ folglich } x_1=2,\ x_2=3.$$

γ) In der Gl. $x^2-5x-24=0$ ist das Produkt der Wurzeln negativ, und weil auch das zweite Glied negativ ist, so muß der größere Faktor des Produktes negativ und der kleinere positiv sein, weshalb -24 aus $3 . (-8)$ und daher $-5x$ aus $-8x+3x$ entstanden ist, mithin ist:

$$x^2-5x-24=x^2-8x+3x+3 . (-8)=x(x-8)+3(x-8)=0$$
$$=(x+3)(x-8); \text{ also } x_1=8,\ x_2=-3.$$

δ) In der Gl. $x^2-13x+30=0$ ist das Produkt der Wurzeln positiv und die Summe derselben negativ, weshalb die Faktoren des Produktes $+30$ beide negativ sein müssen und aus $(-3).(-10)$ entstanden sind, weshalb das zweite Glied $-13x$ aus $-3x-10x$ besteht; mithin ist:

$$x^2-13x+30=x^2-3x-10x+(-3) . (-10)=0$$
$$=x(x-3)-10(x-3)=(x-3)(x-10)=0;$$
$$\text{daher } x_1=10 \text{ und } x_2=3.$$

In den Gleichungen α, β, γ, δ sind alle Fälle erschöpft, die rücksichtlich der Zeichen, womit das zweite und dritte Glied behaftet sind, vorkommen können und alle Gleichungen sind von einer dieser vier Formen.

ε) Man auch noch auf folgende Weise verfahren, um die binomischen Faktoren einer Gleichung zu ermitteln.

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2-7x-78=0 \text{ oder } x^2-7x=78.$$

Nun forme man sowohl die linke als auch die rechte Seite um. Es ist nämlich $x^2-7x=x(x-7)$ und $78=13.6=13(13-7)$. Daher ist auch:

$$x(x-7)=13(13-7);$$

folglich ist offenbar $x_1=13$ der absolute oder positive Wert von x gefunden. Es muß also $x-13$ ein Faktor der Gleichung $x^2-7x-78=0$ sein. Dividieren wir also diese Gl. durch $x-13$, so erhalten wir den andern Faktor $x+6=0$; also $x_2=-6$.

ζ) Man kann auch die Wurzeln einer quadratischen Gleichung aus ihrer Summe und ihrem Produkte direkt berechnen, wenn man eine Gleichung vom zweiten Grade mit 2 Unbekannten zu Hülfe nimmt. Sind die Wurzeln einer quadratischen Gl. x_1 und x_2 und beträgt ihre Summe a und ihr Produkt b, so erhalten wir folgende Gl. vom zweiten Grade mit 2 Unbekannten.

$$(1)\ x_1+x_2=a;\ (2)\ x_1x_2=b.$$

Erhebe (1) ins Quadrat und multipliziere (2) mit 4, so wird

$$(3)\ x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=a^2;\ (4)\ 4x_1x_2=4b.$$

Subtrahiere (4) von (3), so wird

$$(5)\ (x_1-x_2)^2=a^2-4b.$$

Zieht man aus (5) die Quadratwurzel, so erhält man:

$$(6)\ x_1-x_2=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

In (1) und (6) haben wir die Summe und die Differenz der beiden Unbekannten, folglich erhält man durch Addition und Subtraktion derselben:

$$x_1=\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4b});\ x_2=\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{a^2-4b}).$$

Diese beiden Werte für x_1 und x_2 können im allgemeinen als die beiden Wurzeln einer jeden Gl. vom zweiten Grade mit einer Unbekannten betrachtet werden. Denn setzt man z. B. $a=11$, $b=24$, so ist die eine Wurzel der Gleichung

$$x^2-11x+24=0;$$

$$x_1=\tfrac{1}{2}(11+\sqrt{11^2-4\,.\,24})=8 \text{ und die andere}$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}(11-\sqrt{11^2-4\,.\,24})=3.$$

Es ist also: $x^2-11x+24=(x-8)(x-3)=0$.

---

3. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 69.

α) Reine quadratische Gleichungen (3—25).

§. 391. 3. Nach §. 389 ist hier $a=7$, $b=105903$; also $b:a=105903:7=15129$; daher $x=\pm\sqrt{15129}=\pm123$.

4. Da der Faktor von x^2, nämlich 16, eine vollständige Quadratzahl ist, so ist es nicht nötig, die Gleichung vor der Ausziehung der Wurzel aus beiden Teilen derselben durch 16

zu dividieren, also das Quadrat von x von seinem Koeffizienten zu befreien. Danach erhält man:

$$4x=\pm 1100;\ \text{folglich}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\frac{\pm 1100}{4}=\pm 275.$$

5. Nach §. 389 kann man die Gleichung $x^2-m=0$ als das Produkt von $(x-\sqrt{m})(x+\sqrt{m})=0$ darstellen, woraus folgt, daß

$$x-\sqrt{m}=0;\ \text{also}\ x_1=+\sqrt{m},\ \text{und}$$
$$x+\sqrt{m}=0;\ \text{also}\ x_2=-\sqrt{m};$$
$$\text{mithin}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\pm\sqrt{m}.$$

6. Ordnet man diese Gleichung, so ist:

$$x^2=4a^2-12ab+9b^2;\ \text{oder}\ x^2=(2a-3b)^2;$$
$$\text{folglich}\ x=\pm(2a-3b);\ \text{d. i.}$$
$$x_1=+(2a-3b)=2a-3b$$
$$x_2=-(2a-3b)=3b-2a.$$

7. Die Gleichung geordnet, giebt:

$$\frac{36x^2}{49}=9801;\ \text{daher}\ \sqrt{\frac{36x^2}{49}}=\pm\sqrt{9801};\ \text{also:}$$
$$\frac{6x}{7}=\pm 99;\ \text{folglich}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\frac{\pm 99\times 7}{6}=\pm 115\tfrac{1}{2}.$$

8. Ordnet und entwickelt man die Gleichung, so hat man:

$$\frac{50}{x^2}=8\ \text{oder}\ \frac{25}{x^2}=4;\ \text{folglich}\ \frac{5}{x}=\pm 2;\ \text{daher}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\pm 2\tfrac{1}{2}.$$

9. Vereinigt man die beiden Quotienten auf der linken Seite der Gleichung, so hat man:

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{a^2+1}{1-a^2}.\ \text{Hieraus folgt:}\ x^2=1;\ \text{also}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\pm 1.$$

10. α) Man schreibe dieses Beispiel als Proportion, nämlich:

$$(x-m):(x+m)=(n-x):(n+x).$$

Wendet man auf diese Proportion §. 228 an, so wird:

$$2x:2n=2m:2x,\ \text{oder nach §. 222:}$$
$$x:n=m:x;\ \text{daher}\ x^2=mn,\ x=\pm\sqrt{mn}.$$

β) Bildet man die Produktengleichung und ordnet, so erhält man $98x^2=8$, folglich $x=\pm\frac{2}{7}$.

11. Erhebe die beiden Teile dieser Gl. ins Quadrat, so wird:

$$\frac{5}{x^2}+49-2\sqrt{\left(\frac{5}{x^2}+49\right)\left(\frac{5}{x^2}-49\right)}+\frac{5}{x^2}-49=49,$$
$$\text{oder:}\ \frac{10}{x^2}-49=2\sqrt{\left(\frac{5}{x^2}+49\right)\left(\frac{5}{x^2}-49\right)}.$$

Quadriert man abermals beide Teile dieser Gleichung, so ist

$$\left(\frac{10}{x^2}-49\right)^2=4\left(\frac{5}{x^2}+49\right)\left(\frac{5}{x^2}-49\right).$$

Entwickelt man diese Gleichung und ordnet dieselbe, so ist:

$$12005x^2=980;\ \text{durch 5 geteilt, giebt:}$$

$2401x^2=196$; hieraus die Wurzel, liefert:
$49x=\pm 14$; folglich x_1 und $x_2=\pm\frac{2}{7}$.

12. Multipliziert man die Gleichung mit $\sqrt{x^2-17}$, so erhält man:
$$x\sqrt{x^2-17}+x^2-17=4, \text{ oder}$$
$$x\sqrt{x^2-17}=21-x^2; \text{ quadriert, giebt:}$$
$$x^2(x^2-17)=(21-x^2)^2. \text{ Hieraus erhält man:}$$
$$25x^2=441; \text{ also } 5x=\pm 21; \text{ folglich } x_1 \text{ und } x_2=\pm 4\tfrac{1}{5}.$$

13. Multipliziert man hier mit $2\sqrt{a+x^2}$, so hat man:
$$2x\sqrt{a+x^2}+2(a+x^2)=a^2+a, \text{ oder}$$
$$2x\sqrt{a+x^2}=a^2-a-2x^2; \text{ quadriert, giebt:}$$
$$4x^2(a+x^2)=(a^2-a-2x^2)^2, \text{ oder}$$
$$4a^2x^2=a^4-2a^3+a^2;$$
$$\text{also } 2ax=\pm\sqrt{a^4-2a^3+a^2}=\pm(a^2-a);$$
$$\text{folglich } x_1 \text{ und } x_2=\frac{\pm(a^2-a)}{2a}=\frac{\pm a(a-1)}{2a}=\pm\tfrac{1}{2}(a-1).$$

14. Man bringe beide Wurzelgrößen auf eine Seite des Gleichheitszeichens und quadriere beide Teile der Gleichung, so ist:
$$\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3+2\sqrt{\left(\frac{3m^2}{x^2}-2\right)\left(\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3\right)}+\frac{3m^2}{x^2}-2=(m+1)^2.$$
Ordnet man diese Gleichung und teilt sie durch 2, so ist:
$$\sqrt{\left(\frac{3m^2}{x^2}-2\right)\left(\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3\right)}=3-\frac{3m^2}{x^2}+m.$$
Quadriere abermals beide Teile dieser Gl., so wird:
$$\left(\frac{3m^2}{x^2}-2\right)\left(\frac{3m^2}{x^2}+m^2-3\right)=\left(3-\frac{3m^2}{x^2}+m\right)^2.$$
Entwickele diese Gl., ordne sie und teile sie durch 3, so wird:
$$(m^2+2m+1)x^2=m^4+2m^3+m^2, \text{ oder}$$
$$(m+1)^2x^2=m^2(m+1)^2; \text{ also:}$$
$$(m+1)x=\pm m(m+1); \text{ daher } x_1 \text{ und } x_2=\pm m.$$

15. Erhebt man beide Teile der Gleichung ins Quadrat, so ist:
$$a-\frac{b}{x^2}+2\sqrt{\left(a-\frac{b}{x^2}\right)\left(d-\frac{b}{x^2}\right)}+d-\frac{b}{x^2}=c^2, \text{ oder}$$
$$2\sqrt{\left(a-\frac{b}{x^2}\right)\left(d-\frac{b}{x^2}\right)}=\frac{2b}{x^2}+c^2-a-d.$$
Diese Gleichung, auf die zweite Potenz erhoben, giebt:
$$4\left(a-\frac{b}{x^2}\right)\left(d-\frac{b}{x^2}\right)=\left(\frac{2b}{x^2}+c^2-a-d\right)^2.$$
Hieraus erhält man:
$$4bc^2=x^2(2ad+2ac^2+2dc^2-a^2-c^4-d^2);$$

folglich x_1 und $x_2 = \pm\sqrt{\frac{4bc^2}{2ad+2ac^2+2dc^2-a^2-c^4-d^2}}$

$= \pm 2c\sqrt{\frac{b}{4c^2d-(c^2+d-a)^2}}$ oder auch

$= \pm 2c\sqrt{\frac{b}{4ac^2-(c^2+a-d)^2}}$.

16. Die Gleichung ins Quadrat erhoben, giebt:

$$\frac{560}{x^2}+29-2\sqrt{\left(\frac{560}{x^2}-34\right)\left(\frac{560}{x^2}+29\right)}+\frac{560}{x^2}-34=49,$$

oder $\frac{1120}{x^2}-54=2\sqrt{\left(\frac{560}{x^2}-34\right)\left(\frac{560}{x^2}+29\right)}$.

Quadriert man diese Gleichung abermals, so ist:

$$\left(\frac{1120}{x^2}-54\right)^2=4\left(\frac{560}{x^2}-34\right)\left(\frac{560}{x^2}+29\right).$$

Nimmt man die hier nur angedeutete Multiplikation wirklich vor, ordnet dann die Gleichung und teilt sie durch 6860, so erhält man: $x^2=16$; folglich x_1 und $x_2=\pm 4$.

17. Erhebt man beide Teile der Gleichung auf die sechste Potenz, so erhält man nach §. 285:

$$(0{,}125x^3-6x)^2=(0{,}25x^2-8)^3.$$

Hieraus erhält man durch Entwickelung und Ordnen: $12x^2=512$, oder durch 12 geteilt: $x^2=42{,}6666666667$; folglich x_1 und $x_2=\pm\sqrt{42{,}6666666667}$; $=\pm 6{,}53197\ldots$

18. Nach §. 262 ist jede Potenz mit negativen Exponenten dem reciproken Werte der Basis, potenziert mit dem positiven Exponenten gleich. Hiernach hat man:

$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x^2}\sqrt{3}$. Hieraus erhält man:

$2\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}$; also $4(1-x^2)=3$; daher $x^2=\frac{1}{4}$;

also x_1 und $x_2=\pm\frac{1}{2}$.

19. Verfährt man hier ebenso wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man:

$$x-\sqrt{2-x^2}+x+\sqrt{2-x^2}=$$

$x(x+\sqrt{2-x^2})(x-\sqrt{2-x^2})$, daher

$2x=2x^3-2x$ oder $2x(x^2-2)=0$;

folglich $x^2-2=0$; daher

x_1 und $x_2=\pm\sqrt{2}=\pm 1{,}4142135\ldots$ (§. 311).

Ferner ist $2x=0$, also $x_3=0$.

20. *a*) $x^2\sqrt[n]{m+x^2}+m\sqrt[n]{m+x^2}=mx^2\sqrt[n]{x^2}$, oder

$(m+x^2)\sqrt[n]{m+x^2}=mx^2\sqrt[n]{x^2}$, oder:

$$(m+x^2)(m+x^2)^{\frac{1}{n}}=mx^2\times x^{\frac{2}{n}} \text{ nach §. 294.}$$

Also ist $(m+x^2)^{\frac{n+1}{n}}=mx^{\frac{2n+2}{n}}=mx^{\frac{2[n+1]}{n}}$;

folglich auch $m+x^2=m^{\frac{n}{n+1}}x^2$, indem man auf beiden Seiten mit n potenziert, und die $(n+1)$te Wurzel auszieht.

Es ist daher

$$x^2(m^{\frac{n}{n+1}}-1)=m; \text{ also } x^2=m:(m^{\frac{n}{n+1}}-1); \text{ daher}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=\pm\sqrt{m:(m^{\frac{n}{n+1}}-1)}.$$

β) Unter Anwendung der §§. 285 und 289 Beispiel 8 erhält man hier:

$$\sqrt[(m+1)(m-1)]{m^{m+1}}\,.\sqrt[(m+1)(m-1)]{(x-m)^{m-1}}=\sqrt[(m+1)(m-1)]{m^{m-1}}\,.\sqrt[(m+1)(m-1)]{(x-m)^{m+1}}.$$

Erhebe diese Gleichung auf die $(m+1)(m-1)$te Potenz, so ist:

$$m^{m+1}.(x-m)^{m-1}=m^{m-1}.(x-m)^{m+1}.$$

Dividiere diese Gleichung durch $m^{m-1}.(x-m)^{m-1}$, so findet man: $m^2=(x-m)^2$; daher $x-m=\pm m$; folglich $x_1=2m$ und $x_2=0$.

21. Man drücke dieses Beispiel als Proportion aus, so wird: $(x+m-2n):(x+m-2n)=(n+2m-2x):(n-2m+2x)$.

Unter Anwendung von §. 228 erhält man hieraus:

$$2(x+m):2n=4n:4(x-m) \text{ oder}$$

$(x+m):n=n:(x-m)$; $x^2-m^2=n^2$; also $x=\pm\sqrt{m^2+n^2}$.

22. Zieht man aus beiden Teilen der Gleichung die Quadratwurzel, so ist:

$\frac{7}{8}(x-\frac{7}{9})=\pm\frac{5}{9}$; also $\frac{7}{8}x=\frac{49}{72}\pm\frac{5}{9}$; daher $x_1=1\frac{26}{63}$ und $x_2=\frac{1}{7}$.

23. Die gegebene Gleichung läßt sich in folgende umformen:

$$-\frac{2}{10-x}+10-x=\frac{2}{10-x} \text{ oder } 10-x=\frac{4}{10-x};$$

daher $(10-x)^2=2^2$; folglich $10-x=\pm2$; $x=10\mp2$; also $x_1=8$, $x_2=12$.

24. $a(a-b)-(x-a-b)^2=(a-b)b$; hieraus erhält man: $(x-a-b)^2=(a-b)^2$; also $x-a-b=\pm(a-b)$; also $x_1=2a$, $x_2=2b$.

25. α) Entwickelt man die hier gegebene Gleichung, so ist:

$$m^2(b+c+x)(b+c-x)=(x+b-c)(x-b+c); \text{ oder:}$$

$$x^2(m^2+1)=m^2(b+c)^2+(b-c)^2;$$

$$\text{folglich } x_1 \text{ und } x_2=\pm\sqrt{\frac{m^2(b+c)^2+(b-c)^2}{m^2+1}}.$$

β) Entwickelt man die Gleichung und ordnet sie, so hat man:

$$x^2=ab;\text{ folglich } x_1 \text{ und } x_2=\pm\sqrt{ab}.$$

b) Gemischte quadratische Gleichungen (27—136).

§. 392. 27. Ergänzt man das unvollständige Quadrat x^2+6x zu einem vollständigen, so erhält man x^2+6x+3^2. Addiert man also zu beiden Seiten der Gl. die Hälfte des Koeffizienten von x ins Quadrat, also $\left(\frac{6}{2}\right)^2=3^2$, so hat man:

$$x^2+6x+3^2=3^2+7,\text{ oder } (x+3)^2=4^2.$$

Zieht man aus beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel, so ist:

$$x+3=\pm 4;\text{ folglich } x_1 \text{ und } x_2=-3\pm 4,$$
$$\text{d. i. } x_1=1 \text{ und } x_2=-7.$$

28. Setzt man zur Fortschaffung des zweiten Gliedes $x=y+4$, so ist:

$$x^2-8x+12=(y+4)^2-8(y+4)+12=0.$$

Entwickelt man die Gl. in y, so erhält man:

$$y^2-4=0;\text{ daher } y^2=4;\text{ also } y_1 \text{ und } y_2=\pm 2 \text{ oder}$$
$$y_1=2,\ y_2=-2,\text{ daher } x_1=2+4=6,\ x_2=-2+4=2.$$

29. In der Gl. $x^2+10x+21=0$ ist nach C. α) das Absolutglied $21=3\,.\,7$, weshalb das zweite Glied $10x$ aus $3x+7x$ entstanden ist; daher

$$x^2+3x+7x+3\,.\,7=(x+3)(x+7)=0,$$
$$\text{also } x+3=0;\ x_1=-3;\ x+7=0;\ x_2=-7.$$

30. Kommt in einer gemischten quadratischen Gl. das unvollständige Quadrat verbunden mit anderen Größen vor, so bringe man diese zuerst auf die andere Seite, ehe man das Quadrat ergänzt. Addiert man also in der Gl. $x^2-mx=-n$ das Quadrat von $\frac{1}{2}m$ zu beiden Seiten der Gl., so wird:

$$x^2-mx+\tfrac{1}{4}m^2=\tfrac{1}{4}m^2-n \text{ oder}$$
$$(x-\tfrac{1}{2}m)^2=\tfrac{1}{4}m^2-n.$$

Zieht man hieraus die Quadratwurzel, so wird:

$$x-\tfrac{1}{2}m=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2-n},\text{ also}$$
$$x_1 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{2}m\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2-n}.$$

31. Die hier gegebene Gleichung ist von der Form C. (1), hat also zwei negative Wurzelwerte; daher ist mit Bezug auf 30

$$x_1 \text{ und } x_2=-\tfrac{1}{2}m\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2-n}.$$

32. Setze hier $x=y+\frac{1}{2}m$, so wird

$$(y+\tfrac{1}{2}m)^2-m(y+\tfrac{1}{2}m)-n=0;\text{ daraus}$$
$$y^2-\tfrac{1}{4}m^2-n=0;\ y^2=\tfrac{1}{4}m^2+n;\text{ daher}$$
$$y_1 \text{ und } y_2=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2+n};\text{ folglich}$$
$$x_1 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{2}m\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}m^2+n}.$$

33. Diese Gleichung liefert denselben Wert für x, den die vorige Gl. gegeben hat, mit dem Unterschiede, daß $\frac{1}{2}m$ negativ statt positiv zu nehmen ist, da hier das erste Glied durch + mit dem zweiten Gliede verbunden ist. Daher ist

$$x_1 \text{ und } x_2 = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}m^2 + n}.$$

34. Nach der Methode C. ε) erhalten wir:

$$x(x+10) = 24 = 2 . 12 = 2(2+10),$$

also $x_1 = 2$ und daher ist $x-2$ ein Faktor der gegebenen Gleichung.

Dividieren wir dieselbe durch $x-2$, so erhalten wir als zweiten Faktor $x+12$; daher $x+12=0$, $x_2=-12$.

35. Da hier auch das zweite Glied negativ ist, so folgt daraus, daß die in 34 für x gefundenen Werte mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen, weil in Gleichungen von der Form C. (3) die größere Wurzel positiv, die kleinere aber negativ ist; daher ist $x_1 = -2$ und $x_2 = 12$.

36. Lösen wir diese Gl. wieder nach C. ε) auf, so erhalten wir:

$$x(x+10) = -6 . 4 = -6(10-6) = 0,$$

also $x_1 = -6$; dividieren wir die gegebene Gl. durch $x+6$, so erhalten wir $x+4$, also $x+4=0$; $x_2=-4$. Diese Gl. muß zwei negative Werte liefern, weil sie von der Form C. (1) ist.

37. Diese Gl. ist von der Form C. (4), hat also zwei positive Wurzeln; um dieselben zu erhalten, brauchen wir nur die für x erhaltenen Werte in 36 positiv zu nehmen; daher

$$x_1 = 6, \ x_2 = 4.$$

38. Ordnen wir die Gleichung, so erhalten wir:

$$x^2 + 986x = 145080.$$

Ergänzen wir das Quadrat, so wird

$$x^2 + 986x + 493^2 = 493^2 + 145080 \text{ oder}$$

$$(x+493)^2 = 388129.$$

Ziehen wir aus beiden Teilen die Quadratwurzel, so ist:

$$x + 493 = \pm 623; \text{ daher}$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = \pm 623 - 493; \text{ d. i. } x_1 = 130, \ x_2 = -1116.$$

39. Da hier $x^2 - 986x + 145080 = 0$, so ist

$$x^2 - 806x - 180x + 180 \times 806 = 0, \text{ oder}$$

$$x(x-806) - 180(x-806) = 0; \text{ daher}$$

$$(x-806)(x-180) = 0; \text{ folglich:}$$

$$x - 806 = 0; \ x_1 = 806; \ x - 180 = 0; \ x_2 = 180.$$

40. Es ist hier $x^2 - 26x = 120$. Da nun

$$x(x-26) = 30 . 4 = 30(30-26),$$

so ist offenbar $x_1 = 30$ eine Wurzel der Gl. Dividieren wir also die Gl. durch den Faktor $x-30$, so erhalten wir den andern Faktor $x+4$; daher $x+4=0$, $x_2=-4$.

41. Da hier $x(x+26) = -(6 . 20) = -6(-6+26)$; so ist

$$x_1 = -6; \text{ also } x+6=0.$$

Nun ist $\frac{x^2+26x+120}{x+6}=x+20$; also ist ferner:

$x+20=0$; folglich $x_2=-20$.

42. Die Gleichung geordnet und das Quadrat vervollständigt, giebt: $x^2-9999x+\frac{1}{4}(9999)^2=\frac{1}{4}(9999)^2-10816010$, oder

$(x-\frac{1}{2}(9999))^2=\frac{1}{4}\times 56715961=\frac{1}{4}(7531)^2$.

Also ist $x-\frac{9999}{2}=\pm\frac{7531}{2}$; folglich $x_1=8765$ und $x_2=1234$.

43. Ordnet man die Gleichung, und schafft den Bruch aus derselben fort, so ist:

$$32x^2-2228x=-23205.$$

Wenn das Quadrat von x mit einem Koeffizienten behaftet ist, der keine Quadratzahl ist, so muß man dasselbe dadurch davon befreien, daß man die Gleichung durch eine Zahl dividiert, welche dem Koeffizienten von x^2 gleich ist.

Man teile daher die Gl. durch 32 und man erhält:

$x^2-\frac{2228}{32}x=-\frac{23205}{32}$; das Quadrat ergänzt, giebt;

$x^2-\frac{2228}{32}x+(\frac{1114}{32})^2=(\frac{1114}{32})^2-\frac{23205}{32}$ oder

$(x-\frac{1114}{32})^2=(\frac{706}{32})^2$; also $x-\frac{1114}{32}=\pm\frac{706}{32}$; daher

$x=\frac{1114\pm 706}{32}$; also $x_1=56\frac{7}{8}$, $x_2=12\frac{3}{4}$.

44. Ordnet man die Gleichung und macht sie zur Fortschaffung des Dezimalbruches 10mal größer, so ist:

$$100x^2-80270x=-8404782.$$

Da die zweite Potenz von x einen Koeffizienten hat, der eine vollständige Quadratzahl ist, so ist es nicht notwendig, denselben fortzuschaffen; denn es ist ersichtlich, daß der erste Teil der Gleichung, nämlich $100x^2-80270x$, ein Teil des Quadrats von $10x-4013\frac{1}{2}$ ist; denn

$(10x-4013\frac{1}{2})^2=100x^2-80270x+16108182\frac{1}{4}$.

Addiert man also auf beiden Seiten der Gleichung $(4013\frac{1}{2})^2$ hinzu, so ist

$100x^2-80270x+(4013\frac{1}{2})^2=(4013\frac{1}{2})^2-8404782$, oder $(10x-4013\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}(30813601)$. Hieraus die Wurzel liefert:

$10x-4013\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}.5551$; $x=(4013\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}.5551):10$;

daher $x_1=678\frac{9}{10}$ und $x_2=123\frac{4}{5}$.

45. Durch Ordnen der Gleichung erhalten wir: $700x^2+630000x=69923007$; dividiert durch 7, liefert:

$$100x^2+90000x=9989001.$$

Auf beiden Seiten $(4500)^2$ hinzuaddiert, giebt: $100x^2+90000x+(4500)^2=(4500)^2+9989001$, oder:

$(10x+4500)^2=30239001$; also $10x+4500=\pm 5499$;

folglich $x_1=99\frac{9}{10}$ und $x_2=-999\frac{9}{10}$.

46. Ist die Gleichung $px^2-qx=-r$ gegeben, so multipliziere man dieselbe mit 4p, und es wird:

$$4p^2x^2-4pqx=-4pr.$$

Addiere jetzt zu beiden Seiten dieser Gl. q^2, so ist:

$$4p^2x^2-4pqx+q^2=q^2-4pr, \text{ oder}$$

$$(2px-q)^2=q^2-4pr; \text{ daher}$$

$$2px-q=\pm\sqrt{q^2-4pr}; \text{ folglich}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=[q\pm\sqrt{q^2-4pr}]:2p.$$

Will man also eine gemischte quadratische Gleichung in eine reine verwandeln, so multipliziere man die gegebene gemischte Gleichung mit dem vierfachen Koeffizienten von x^2, addiere hierzu auf beiden Seiten das Quadrat des Koeffizienten von x^1 und ziehe alsdann aus beiden Teilen der Gleichung die Quadratwurzel. Diese Methode ist besonders dann zu empfehlen, wenn in der Gleichung $px^2-qx+r=0$ die Größen q und r durch p nicht teilbar sind und p von der Einheit verschieden ist.

47. In der Gleichung $px^2-qx+r=0$ sind die Wurzeln reell, wenn $q^2=4pr$ oder wenn $q^2>4pr$ ist; sie sind aber imaginär, wenn $q^2<4pr$, oder wenn q^2-4pr negativ ist.

48. Für den Fall, daß $q^2=4pr$ oder $q^2-4pr=0$ ist, sind die beiden reellen Wurzelwerte der Gleichung $px^2-qx+r=0$ einander gleich, oder es hat diese Gleichung nur einen Wurzelwert. Denn alsdann ist: $x=q:(2p)$.

49. Die Beantwortung der Frage, wann in der Gleichung $x^2-ax+b=0$ beide Wurzeln positiv u. s. w., ist im Handbuche selbst angegeben und bedarf daher hier keiner nähern Darstellung.

50. α) Aus der hier gegebenen Gleichung ergiebt sich nach gehöriger Ordnung: $2x^2+x=1$.

Diese Gleichung mit $4\times2=8$ multipliziert und dazu das Quadrat des Koeffizienten von x, nämlich 1^2 addiert, giebt:

$$16x^2+8x+1=1+8, \text{ oder } (4x+1)^2=9; \text{ daher}$$

$$4x+1=\pm3;\ x=(\pm3-1)4; \text{ also } x_1=\tfrac{1}{2} \text{ und } x_2=-1.$$

β) Diese Gleichung mit $n(n+1)$ multipliziert und hiernach geordnet, giebt

$$x^2+\frac{x}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}, \text{ hieraus folgt}$$

$$x=-\frac{1}{2n(n+1)}\pm\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{4n^2(n+1)^2}}.$$

$$\text{Es ist also } x_1=\frac{1}{n+1} \text{ und } x_2=-\frac{1}{n}.$$

51. Verfährt man hier, wie in Aufgabe 50 α), so erhält man: $(2x+1)^2=5$ und hieraus: $2x+1=\pm\sqrt{5}$; also $x=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{5}-1)$; $x_1=0{,}61803$, $x_2=-1{,}61803$. (§. 312.)

52. Setzt man, um aus der Gleichung $x^2-\frac{1}{7}x-\frac{1}{49}=0$ das zweite Glied fortzuschaffen, $x=y+\frac{1}{14}$, so hat man:

$(y+\frac{1}{14})^2-\frac{1}{7}(y+\frac{1}{14})-\frac{1}{49}=0$; daher
$y^2-\frac{5}{196}=0$; $y^2=\frac{5}{196}$; $y=\pm\frac{1}{14}\sqrt{5}$; also
$x=\pm\frac{1}{14}(\sqrt{5}+1)$, oder $x_1=0{,}23115$ und $x_2=-0{,}08829$.

53. Bringt man die Gleichung auf die allgemeine Form, so erhält man: $x^2-44444x=701060205$;
$(x-22222)^2=(22222)^2+701060205=1194877489$;
also ist $x-22222=\pm 34567$;
folglich $x_1=56789$ und $x_2=-12345$.

54. Ordnet man die Gleichung und teilt dieselbe durch 3, so ist:
$4x^2-\frac{1}{12}x=7$; $4x^2-\frac{1}{12}x+(\frac{1}{48})^2=(\frac{1}{48})^2+7$; oder
$(2x-\frac{1}{48})^2=(\frac{127}{48})^2$.
Also $2x-\frac{1}{48}=\pm\frac{127}{48}$; folglich $x_1=1\frac{1}{3}$ und $x_2=-1\frac{5}{16}$.

55. Multipliziere diese Gleichung mit (-1), ordne sie und dividiere sie durch 18, so ist:
$$x^2-\frac{57}{18}x-\frac{145}{18}=0.$$
In dieser Gleichung ist der Koeffizient von x, so wie das Absolutglied eine gebrochene Zahl. Nun kann man jedesmal eine solche Gleichung in eine andere verwandeln, worin diese Größen ganze Zahlen sind. Zu diesem Zwecke setze man $18x=y$, also $x=\frac{y}{18}$. Substituiere diesen Wert für x in obige Gleichung, so ist:
$\frac{y^2}{18^2}-\frac{57}{18^2}y-\frac{145}{18}=0$ oder mit 18^2 multipliziert:
$$y^2-57y-2610=0;$$
eine Gleichung, worin keine Brüche vorkommen. Nun löse man dieselbe für y auf, woraus sich dann der Wert für x bestimmen läßt. Da nun $-57y=-87y+30y$ und $2610=87\times 30$ ist, so hat man:
$$y^2-57y-2610=(y-87)(y+30)=0,$$
folglich $y_1=87$ und $y_2=-30$; daher:
$x_1=\frac{87}{18}=4\frac{5}{6}$ und $x_2=-\frac{30}{18}=-1\frac{2}{3}$.

56. Entwickele diese Gl., so wird:
$x^2-25x=84$. Nun ist $x(x-25)=28\times 3=28(28-25)$;
also $x_1=28$; daher $(x^2-25x-84):(x-28)=x+3$;
folglich $x_2=-3$.

57. Aus der gegebenen Gleichung ergiebt sich:
$x^2+25x=-84$, oder
$x(x+25)=-4\times 21=-4(-4+25)$; folglich
$x_1=-4$; daher ist
$(x^2+25x+84):(x+4)=x+21$; also $x_2=-21$.

58. Entwickele diese Gl., so hat man:
$4x^2-36x=-72$; durch 4 geteilt, giebt:
$x^2-9x=-18$, oder $x^2-9x+18=0$.

Diese Gleichung läßt sich auch auf folgende Weise schreiben: $x^2-6x-3x+3\times6=0$, oder $x(x-6)-3(x-6)=0$; daher $(x-6)(x-3)=0$; folglich $x_1=6$ und $x_2=3$.

59. $x^2+3{,}8259x=-3{,}3512972$;
$x^2+3{,}8259x+\frac{1}{4}(3{,}8259)^2=\frac{1}{4}(3{,}8259)^2-3{,}3512972$,
oder $[x+\frac{1}{2}(3{,}8259)]^2=\frac{1}{4}\times(1{,}23232201)$.
Also $x+1{,}91295=\pm0{,}55505$; $x=(-1{,}91295\pm55505)$,
folglich $x_1=-1{,}3579$ und $x_2=-2{,}468$.

60. Aus der hier gegebenen Gleichung erhält man:
$729x^2-1728x+1024=0$, oder $(27x-32)^2=0$.
Hier tritt also der in Beispiel 48 erwähnte Fall ein, wo $q^2=4pr$ ist, daher diese Gleichung nur einen reellen Wurzelwert hat; also ist: $27x=32$; folglich $x=1\frac{5}{27}$.

61. Ordnet man diese Gleichung, so erhält man:
$\frac{25}{144}x^2+\frac{10}{13}x+\frac{144}{169}=0$,
oder $(\frac{5}{12}x+\frac{12}{13})^2=0$; folglich $\frac{5}{12}x=-\frac{12}{13}$;
also $x=-2\frac{14}{65}$.

62. α) Dividiert man diese Gleichung durch 3 und multipliziert sie mit 4, so ist:
$x^2-12x=0$, oder $x(x-12)=0$; daher $x_1=12$ und $x_2=0$.
β) Hier hat man: $x^2-x=0$, oder $x(x-1)=0$;
folglich $x_1=1$ und $x_2=0$.

63. Dividiert man die Gleichung durch a und ordnet sie, so findet man: $x^2-(a+b)x=0$, oder $x[x-(a+b)]=0$; folglich
$x_1=a+b$ und $x_2=0$.

64. Entwickelt man die Gleichung, so erhält man:
$x^2-(2a+b)x+a(a+b)=0$.
Da das Absolutglied $a(a+b)$ das Produkt der Wurzeln ausmacht, deren Faktoren a und $a+b$ sind, welche addiert den Koeffizienten des zweiten Gliedes bilden, so ist, weil das zweite Glied negativ, das Absolutglied aber positiv ist, nach C. δ) $x_1=a+b$, $x_2=a$.

65. $x^2-2x+1^2=1^2-2$ oder $(x-1)^2=-1$; also $x-1=\pm\sqrt{-1}$;
daher $x_1=1+\sqrt{-1}$; $x_2=1-\sqrt{-1}$.

66. Multipliziere die Gl. mit 4x, so hat man:
$x^2-12x=-100$; daher
$(x-6)^2=6^2-100=-64$; also
$x-6=\pm\sqrt{-64}$; $x=6\pm8\sqrt{-1}$; $x_1=6+8\sqrt{-1}$;
$x_2=6-8\sqrt{-1}$.
Hier und in dem vorhergehenden Beispiele tritt also der in Beispiel 47 erwähnte Fall ein, wo $q^2<4pr$ ist, daher sind die Wurzeln dieser Gl. imaginär.

67. Hier ist $x+\frac{1}{x}=1$, oder $x^2-x=-1$; also

$(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{3}{4}$; daher

$x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1})=0{,}5\pm0{,}8660254\sqrt{-1}$ (§. 312).

68. Ordnet man die Gl. und ergänzt das Quadrat, so ist:

$(x-\sqrt{-1})^2=(\sqrt{-1})^2-1=-2$; also $x=(\sqrt{1}\pm\sqrt{2})\sqrt{-1}$;

folglich $x_1=\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$ und $x_2=\sqrt{-1}-\sqrt{-2}$.

69. Die Gleichung geordnet giebt: $x^2-2ax+a^2=b^2-2bc+c^2$. Nun ist $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ und $b^2-2bc+c^2=(b-c)^2$; daher ist: $(x-a)^2=(b-c)^2$; also $x-a=\pm(b-c)$; daher

$x_1=a+b-c$ und $x_2=a-b+c$.

70. Hier ist nach Methode C $x_1=a$, $x_2=b$.

71. Entwickele die hier gegebene Gleichung und dividiere sie durch mn, so ist:

$x^2-\frac{x(m+n)\sqrt{mn}}{mn}+1=0$. Setze $x=\frac{z}{mn}$, so wird:

$z^2-z(m+n)\sqrt{mn}+m^2n^2=0$; also:

$[z-\frac{1}{2}(m+n)\sqrt{mn}]^2=(m-n)^2mn$; daher:

$z=\frac{1}{2}(m+n)\sqrt{mn}\pm\frac{1}{2}(m-n)\sqrt{mn}$; folglich

$z_1=m\sqrt{mn}$ und $z_2=n\sqrt{mn}$; also:

$x_1=\sqrt{m:n}$ und $x_2=\sqrt{n:m}$.

72. Ordne diese Gleichung und ergänze das Quadrat, so ist:

$(x-\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2-b^2$.

Also ist $x-\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{a^2-b^2}$;

folglich x_1 und $x_2=\sqrt{a^2+b^2}\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

73. Multipliziere die hier gegebene Gleichung mit $(m+n)^2$, so hat man:

$x^2-4mnx-(m+n)^2(m-n)^2=0$.

Nun ist: $4mn=(m+n)^2-(m-n)^2$; folglich

$x_1=(m+n)^2$ und $x_2=-(m-n)^2$.

74. Da $a^2+b^2=a^2-ab+ab+b^2=a(a-b)+b(a+b)$ und

$(a^2-b^2)ab=(a-b)(a+b)ab=a(a-b)b(a+b)$,

so erhalten wir aus der hier gegebenen Gleichung folgende: $x^2-[a(a-b)+b(a+b)]x+a(a-b)b(a+b)=0$, welche sich umformen läßt in:

$x[x-a(a-b)]-b(a+b)x+a(a-b)b(a+b)=0$, oder

$x[x-a(a-b)]-b(a+b)[x-a(a-b)]=0$; daher

$[x-b(a+b)][x-a(a-b)]=0$; folglich

$x_1=(a-b)a$, $x_2=(a+b)b$.

75. Die Gleichung läßt sich umformen in:

$[x-b(b-a)][x-a(a+b)]=0$; woraus sich ergiebt, daß

$x_1=a(a+b)$ und $x_2=b(b-a)$.

76. α) Setzt man hier jeden Faktor der gegebenen Gleichung gleich 0, so hat man

$x-3\frac{1}{2}=0$; also $x_1=3\frac{1}{2}$ und $x+5\frac{1}{2}=0$; also $x_2=-5\frac{1}{2}$.

β) Da hier $3x-25=0$, so ist $x_1=8\frac{1}{3}$; da ferner $7x+29=0$, so ist $x_2=-4\frac{1}{7}$.

77. α) Erhebe diese Gleichung ins Quadrat, so ist:

$$1+4x+2\sqrt{1-16x^2}+1-4x=16x, \text{ oder}$$
$$\sqrt{1-16x^2}=(8x-1).$$

Hieraus folgt: $1-16x^2=(8x-1)^2$, oder $80x^2-16x=0$, oder $x^2-\frac{1}{5}x=0$; daher $x(x-\frac{1}{5})=0$; folglich $x_1=0$, und $x_2=\frac{1}{5}$.

β) Man quadriere diese Gleichung, so hat man:

$$2abx-2\sqrt{2abx(a^2-bx)}+a^2-bx=a^2+bx, \text{ oder}$$

$-\sqrt{2abx(a^2-bx)}=bx(1-a)$ und hieraus erhält man: $2abx(a^2-bx)=b^2x^2(1-a)^2$, oder $b^2x^2(1+a^2)-2a^3bx=0$, also $x^2-\frac{2a^3}{b(1+a^2)}x=0$; daraus folgt $x\left(x-\frac{2a^3}{b(1+a^2)}\right)=0$,

demnach ist $x_1=0$ und $x_2=\frac{2a^3}{b(1+a^2)}$.

78. Hier hat man $x-\sqrt{-7}=0$; folglich $x_1=\sqrt{-7}$ und ferner ist $x-\sqrt{-11}=0$; folglich $x_2=\sqrt{-11}$.

79. Entwickele die hier gegebene Gleichung, so wird: $x^2-(m+n)x+mn=0$; folglich nach C. (4) $x_1=m$, $x_2=n$.

80. Setze hier $p+mx\sqrt{-1}=0$, so ist $x_1=-\frac{p}{m\sqrt{-1}}$ oder wenn wir diesen Ausdruck mit $\sqrt{-1}$ multiplizieren im Zähler und Nenner, $x_1=\frac{p}{m}\sqrt{-1}$. Ferner ist $1+nx=0$; also $x_2=-\frac{1}{n}$.

81. Ergänze hier das Quadrat, so erhält man:

$$(x-\tfrac{5}{2})^2=\frac{-39+24\sqrt{-3}}{4}; \text{ folglich}$$
$$x=\tfrac{1}{2}(5\pm\sqrt{-39+24\sqrt{-3}}).$$

Formt man den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdruck nach §. 339 um, so hat man:

da $m=-39$, also $m^2=(-39)^2=1521$:

$\sqrt{n}=24\sqrt{-3}$; also $n=-1721$; daher

$m^2-n=1521+1721=3249$; folglich

$\sqrt{m^2-n}=\sqrt{3249}=57$; daher

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}=$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(-39)+\tfrac{1}{2}\,.\,57}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\,.\,(-39)-\tfrac{1}{2}\,.\,57}=$$
$$\sqrt{9}+\sqrt{-48}=3+4\sqrt{-3}.$$

Daher ist: $\sqrt{-39+24\sqrt{-3}}=3+4\sqrt{-3}$; folglich

$$x_1=\tfrac{1}{2}(5+3+4\sqrt{-3})=4+2\sqrt{-3} \text{ und}$$
$$x_2=\tfrac{1}{2}(5-3-4\sqrt{-3})=1-2\sqrt{-3}.$$

82. Verfährt man hier, wie in der vorhergehenden Aufgabe so findet man:

$$x=-\tfrac{1}{2}(5+2\sqrt{-1})\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{117+44\sqrt{-1}}.$$

Nach §. 339 ist nun:

$\sqrt{117+44\sqrt{-1}}=11+2\sqrt{-1}$. Setzt man diesen Wert in den für x gefundenen ein, so ist:

$$x_1=\tfrac{1}{2}(-5-2\sqrt{-1}+11+2\sqrt{-1})=3 \text{ und}$$
$$x_2=\tfrac{1}{2}(-5-2\sqrt{-1}-11-2\sqrt{-1})=-8-2\sqrt{-1}.$$

83 und 84. Verfährt man in diesen beiden Aufgaben, wie in den beiden vorhergehenden, so findet man in (83)

$$x_1=7+4\sqrt{-1} \text{ und } x_2=1-6\sqrt{-1} \text{ und in (84)}$$
$$x_1=1+\sqrt{-2}-\sqrt{-3} \text{ und } x_2=1-\sqrt{-2}+\sqrt{-3}.$$

85. Erhebe diese Gleichung ins Quadrat und ordne sie, so findet man $\sqrt{a^2-x^2}=a-b$; oder $a^2-x^2=a^2-2ab+b^2$; also $x^2=2ab-b^2$. Hieraus ergiebt sich $x=\pm\sqrt{2ab-b^2}=\pm\sqrt{b(2a-b)}$.

86. Entwickelt man die Gleichung, so erhält man:

$$\frac{4ax}{x^2-a^2}=\frac{4a(a+b)}{b(2a+b)} \text{ oder } \frac{x}{x^2-a^2}=\frac{a+b}{b(2a+b)}; \text{ woraus}$$
$$x^2(a+b)-x(2ab+b^2)=a^2(a+b)$$
$$\text{oder } x^2-x\frac{2ab+b^2}{a+b^2}=a^2; \text{ also } x=\frac{2ab+b^2}{2a+2b}$$
$$\pm\sqrt{\frac{4a^4+8a^3b+8a^2b^2+4ab^3+b^4}{(2a+2b)2}}$$
$$=\frac{2ab+b^2}{2a+2b}\pm\sqrt{\frac{(2a^2+2ab+b^2)^2}{(2a+2b)^2}}=\frac{2ab+b^2}{2a+2b}\pm\frac{2a^2+2ab+b^2}{2a+2b}.$$
$$\text{Mithin } x_1=a+b,\ x_2=-\frac{a^2}{a+b}.$$

87. Multipliziere diese Gleichung mit $(1-4x)(7x-25)(28x-193)$ und ordne sie, so ist:

$$534x^2-2871x=11208 \text{ oder durch 3 dividiert:}$$
$$178x^2-957x=3736.$$

Nach Beisp. 46 ist in der Gleichung $px^2-qx+r=0$ der Wurzelwert der Gleichung $(q\pm\sqrt{q^2-4pr}):2p$; mithin ist für jede Gleichung von der Form $px^2-qx-r=0$ derselbe $(q\pm\sqrt{q^2+4pr}):2p$; folglich ist, da unsere Gleichung von dieser Form ist:

$$x_1=(957\pm\sqrt{957^2+4\times178\times3736}:(2\times178)=8 \text{ und}$$
$$x_2=-2\tfrac{111}{178}.$$

88. α) Multipliziere hier mit (a^2-x^2) und ordne die Gleichung, so hat man: $x^2-2x+3=0$. Diese Gleichung ist von der Form: $x^2-mx+n=0$, also ist nach Beispiel 30:

$$x=\tfrac{1}{2}.2\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\times4-3}=1\pm\sqrt{-2}. \text{ Vgl. Nr. 47.}$$

β) Ergänzt man hier das Quadrat, so hat man:

$$\left((a-1)x+\frac{3a-1}{a-1}\right)^2=\left(\frac{2a}{a-1}\right)^2 a; \text{ folglich}$$

$$(a-1)x+\frac{3a-1}{a-1}=\pm\frac{2a\sqrt{a}}{a-1}; \text{ demnach ist}$$

$$x=\frac{1-3a\pm 2a\sqrt{a}}{(a-1)^2}.$$

89. Die hier gegebene Gleichung multipliziere mit $2(a+x)x$, so ist: $x^2+ax-2a^2=0$ oder $x^2+2ax-ax-2a\times a=0$; und hieraus ist $x(x+2a)-a(x+2a)=0$; daher $(x-a)(x+2a)=0$; folglich $x_1=a$ und $x_2=-2a$.

90. Schafft man hier die Brüche fort und ordnet die Gleichung, so hat man: $7x^2-5x=150$. Diese Gleichung multipliziert mit $4\times 7=28$ giebt: $196x^2-140x=4200$.

Hieraus hat man $(14x-5)^2=65^2$; folglich $14x=5\pm 65$; daher $x_1=5$ und $x_2=-4\frac{2}{7}$.

91. Man entwickele die Gl., so wird:

$$\sqrt{3a+x}(\sqrt{a}-\sqrt{3a-x})=\sqrt{3a-x}(\sqrt{a}+\sqrt{3a+x}) \text{ oder:}$$

$$\sqrt{3a^2+ax}=2\sqrt{9a^2-x^2}+\sqrt{3a^2-ax}.$$

Diese Gl. quadriert und hiernach gehörig reduziert, giebt

$$2x^2+ax-18a^2=2\sqrt{27a^4-3a^2x^2-9a^3x+ax^3}.$$

Diese Gl. wieder ins Quadrat erhoben und hiernach geordnet, liefert:

$$x^4-\tfrac{59}{4}a^2x^2=-54a^4, \text{ woraus } x^2=\tfrac{59}{8}a^2\pm\sqrt{-54a^4+\frac{3481a^4}{64}}=$$

$$\frac{59a^2}{8}\pm\frac{5a^2}{8}. \text{ Ist } x^2=\frac{64a^2}{8}=8a^2, \text{ so ist } x_1=\pm\sqrt{8a^2}=\pm 2\sqrt{2}.a;$$

$$\text{ist } x^2=\frac{54a^2}{8}=\tfrac{27}{4}a^2, \text{ so ist } x_2=\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{3}.a.$$

92. Die gegebene Gl. läßt sich umformen in $(2x-3)^2-(3x-2)^2=5(1-x^2)(3x-2)(2x-3)$ oder $30x^4-65x^3-5x^2+65x-25=0$ oder $(x^2-1)(30x^2-65x+25)=0$.

Hieraus ergiebt sich zunächst $x_1=+1$, $x_2=-1$. Ferner ist $30x^2-65x=-25$ oder $6x^2-13x=-5$, folglich $x=\frac{13}{12}\pm\frac{7}{12}$; also $x_3=\frac{5}{3}$; $x_4=\frac{1}{2}$.

93. Durch Entwickelung der Gl. erhält man:

$$(x^2-a^2)(ax+nx-an-n^2)=(x^2-a^2)(ax-m^2+mx-am) \text{ oder}$$

$$(x^2-a^2)(nx-mx-n^2+m^2-an+am)=0, \text{ also}$$

$$x^2-a^2=0, \text{ folglich } x_1=+a;\ x_2=-a.$$

Da weiter $nx-mx-n^2+m^2-an+am=0$, so ist

$$x(n-m)=(n+m)(n-m)+a(n-m),$$

$$\text{folglich } x_3=a+m+n.$$

94. Setzt man hier $p=(m-n)$, $q=n$ und $r=m$, so hat man nach Beispiel 46: $x=[n\pm\sqrt{n^2+4(m-n)m}]:[2(m-n)]$ oder

$x=[n\pm(n-2m)]:[2(m-n)]$; daher $x_1=m:(m-n)$ und $x_2=-1$.

95. Entwickelt man diese Gleichung, so hat man:

$$x^2-\frac{2a-3b}{2ab}x=\frac{13ab-4a^2-10b^2}{18a^2b^2}.$$ Hieraus erhält man

$$\left(x-\frac{2a-3b}{4ab}\right)^2=\left(\frac{2a-b}{12ab}\right)^2;$$ folglich

$$x=\frac{2a-3b}{4ab}\pm\frac{2a-b}{12ab}.$$ Hieraus folgt:

$$x_1=(4a-5b):(6ab);\ x_2=(a-2b):(3ab).$$

96. Multipliziert man diese Gleichung mit $(a-b)(2\sqrt{a}-x)$, so ist: $x^2-2x\sqrt{a}+a-b=0$. Da nun $2\sqrt{a}=\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ und $a-b=\sqrt{a}\times\sqrt{a}-\sqrt{b}\times\sqrt{b}$ ist, hat man:

$$x^2-x(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{a}\times\sqrt{a}-\sqrt{b}\times\sqrt{b}=0;$$ folglich

$$x(x-\sqrt{a}+\sqrt{b})-(x-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=0;$$ also ist:

$$(x-\sqrt{a}-\sqrt{b})(x-\sqrt{a}+\sqrt{b})=0;$$ folglich

$$x_1=\sqrt{a}+\sqrt{b} \text{ und } x_2=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

97. Entwickelt man diese Gleichung, ordnet sie und dividiert sie durch 15, so ist:

$$x^2-x(5a+3b-3c)=$$
$$3ab-27bc-6ac-4a^2+10b^2+18c^2.$$
$$x^2-x(5a+3b-3c)+\left(\frac{5a+3b-3c}{2}\right)^2=\left(\frac{5a+3b-3c}{2}\right)^2+$$
$$3ab-27bc-6ac-4a^2+10b^2+18c^2.$$

oder $[x-\frac{1}{2}(5a+3b-3c]^2=\frac{1}{4}(3a+7b-9c)^2$.

Demnach ist

$$x=\tfrac{1}{2}(5a+3b-3c)\pm\tfrac{1}{2}(3a+7b-9c);$$ daher

$$x_1=4a+5b-6c \text{ und } x_2=a-2b+3c.$$

98. Werden beide Teile der Gl. auf die sechste Potenz erhoben, so ist

$(8x^3+12x^2+18x+27)^2=(4x^2+4x+9)^3$. Hieraus erhält man $192x^4+64x^3+432x^2=0$ oder $16x^2(12x^2+4x+27)=0$. Setzt man $12x^2+4x+27=0$, so ist $(x+\frac{1}{6})^2=-\frac{80}{36}$, folglich x_1 und $x_2=\frac{1}{6}[-1\pm4\sqrt{-5}]$. Ferner ist $16x^2=0$, also $x_3=0$, $x_4=0$.

99. Da $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$, erhält man:

$$\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=0$$ oder $x^2+x+1=0$; es ist also:

$$(x+\tfrac{1}{2})^2=-\tfrac{3}{4};$$ folglich x_1 und $x_2=\frac{1}{2}[-1\pm\sqrt{-3}]$.

100. Die hier gegebene Gleichung wird durch die Substitution $x^n=z$ auf eine quadratische zurückgeführt. Man erhält dann:

$z^2+az=b$; woraus $z=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2+4b}{4}}$ und daher auch

$$x^n=\frac{1}{2}[-a\pm\sqrt{a^2+4b}];\text{ folglich}$$

$$x=\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}[-a\pm\sqrt{a^2+4b}]}=[\tfrac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2+4b})]^{\frac{1}{n}}.$$

101. Diese Gleichung geordnet, giebt:

$$x^4-625x^2+28224=0.\text{ Nun ist:}$$

$$x^4-576x^2-49x^2+49\times576=0\text{ oder}$$

$$x^2(x^2-576)-49(x^2-576)=0;\text{ also}$$

$(x^2-49)(x^2-576)=0$; folglich $x^2=576$; also x_1 und $x_2=\pm24$

Ferner ist: $x^2=49$; also x_3 und $x_4=\pm7$.

102. Diese Gleichung ist ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung in Beispiel 100. Da nun hier $n=2$, also $2n=4$, $a=(\frac{12}{13})^2$ und $b=(\frac{5}{13})^2$, so ist:

$$x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}[-(\tfrac{12}{13})^2\pm\sqrt{(\tfrac{12}{13})^2+4\times(\tfrac{5}{13})^2}]}\text{ also}$$

x_1 und $x_2=\pm\frac{5}{13}$ und x_3 und $x_4=\pm\sqrt{-\frac{169}{169}}=\pm\sqrt{-1}$.

103. Löst man diese Gleichung direkt auf, so erhält man:

$$x^2+\tfrac{1}{2}=\pm\tfrac{2047}{8450};\text{ folglich}$$

$$x^2=\pm\tfrac{2047}{8450}-\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1089}{4225}\text{ und }x^2=-\tfrac{3136}{4225};$$

daher x_1 und $x_2=\pm\frac{33}{65}\sqrt{-1}$ und x_3 und $x_4=\pm\frac{56}{65}\sqrt{-1}$.

104. α) Ordnet man die Gleichung, so hat man:

$$x^4-ax^2=-b^2\text{ oder }(x^2)^2-ax^2=-b^2;\text{ daher}$$

$(x^2-\frac{1}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2-b^2$; also $x^2=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$; hiernach ist:

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}}$. Formt man diese Antwort für x nach §. 339 um, so hat man, da

$$\tfrac{1}{2}a=m,\ \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b^2}=\sqrt{n};$$

$$\tfrac{1}{4}a^2=m^2,\ \tfrac{1}{4}a^2-b^2=n;$$

$$m^2-n=\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}a^2+b^2=b^2;$$

$$\sqrt{m^2-n}=\sqrt{b^2}=b;\text{ also}$$

$$m+\sqrt{m^2-n}=\tfrac{1}{2}a+b.$$

$$\tfrac{1}{2}(m+\sqrt{m^2-n})=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a+b)\text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(m-\sqrt{m^2-n})=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a-b);\text{ hieraus folgt:}$$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b^2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a+b)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a-b)}=$$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(a+2b)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(a-2b)}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a+2b}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a-2b}.$$

β) Setzt man hier $x^2=z-2ab$, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}x^4=z^2-4abz+4a^2b^2\\ 4acx^2=+4abz+8a^2b^2\end{array}\right\}\text{ folglich ist:}$$

$$x^4+4abx^2-(a^2-b^2)^2=z^2-4a^2b^2-(a^2-b^2)^2;$$

daraus ergiebt sich:

$$z^2=4a^2b^2+(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2;\text{ folglich}$$

$$z=\pm(a^2+b^2);\text{ deshalb ist}$$

$$x^2=\pm(a^2+b^2)-2ab=\pm(a-b)^2;$$

also: x_1 und $x_2=\pm\sqrt{\pm(a-b)^2}=\pm(a-b)$ und

x_3 und $x_4=\pm\sqrt{-(a+b)^2}=\pm(a+b)\sqrt{-1}$.

105. Nimmt man die nur angedeutete Multiplikation vor, so ist: $x^4 - x^2(2a^2 + 2b^2) = 2a^2b^2 - (a^4 + b^4 + 4m^2)$. Setze $x^2 = z$, so ist:

$$[z-(a^2+b^2)]^2=4(ab+m)(ab-m);\ \text{folglich}$$
$$z=a^2+b^2\pm2\sqrt{(ab+m)(ab-m)};\ \text{also ist auch}$$
$$x=\pm\sqrt{a^2+b^2\pm2\sqrt{(ab+m)(ab-m)}}.$$

106. Setze hier $2{,}5-x=y$, so ist:

$$(y^2-1{,}25)^2=(1{,}25)^2-0{,}5625=1,\ \text{also}$$
$$y^2=2{,}25\ \text{und}\ y^2=0{,}25,\ \text{daher}$$

y_1 und $y_2=\pm1{,}5$ und y_3 und $y_4=\pm0{,}5$. Hieraus hat man: $2{,}5-x=1{,}5$; folglich $x_1=1$; ferner $2{,}5-x=-1{,}5$; folglich $x_2=4$;
$2{,}5-x=0{,}5$; folglich $x_3=2$; ferner $2{,}5-x=-0{,}5$; folglich $x_4=3$.

107. Aus der hier gegebenen Gleichung folgt, daß

$$\sqrt{x^4-6x^2}=3\sqrt{-1}\ \text{oder}\ x^4-6x^2+9=0\ \text{oder}$$
$$(x^2-3)^2=0;\ \text{folglich}\ x^2=3\ \text{und daher}\ x_1\ \text{und}\ x_2=\pm\sqrt{3}.$$

108. Erhebt man $(x-4)$ ins Quadrat, so erhält man: $x^2-8x+16$; setze $x^2-8x=y$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$(y+11)^2+(y+16)=25\ \text{oder}\ (y+11)^2+(y+11)=20.$$

Setze $y+11=z$, so ist $z^2+z=20$; $z_1=4$, $z_2=-5$.
Daher ist $y+11=4$; also $y_1=-7$ und
$y+11=-5$; also $y_2=-16$. Mithin hat man:
$x^2-8x+7=0$ oder $x^2-7x-x+1\times7=0$; daraus folgt, daß

$$x(x-7)-1(x-7)=0\ \text{oder}\ (x-1)(x-7)=0$$

folgl. $x_1=7$ und $x_2=1$. Ferner ist:
$x^2-8x+16=0$ oder $(x-4)^2=0$: folglich x_3 und $x_4=4$.

109. Hier hat man: $x^6-28x^3+27=0$ oder

$$x^6-27x^3-x^3+1\times27=0.\ \text{Daher ist}$$
$$x^3(x^3-27)-1(x^3-27)=0;\ \text{oder}\ (x^3-1)(x^3-27)=0.$$

Zerlegt man die Faktoren dieses Produktes in ihre Primfaktoren, so erhält man:

$$(x^3-1)(x^3-27)=(x-1)(x-3)(x^2+x+1)(x^2+3x+9)=0.$$

Hieraus ergeben sich folgende Wurzelwerte für die gegebene Gleichung:

(1) $x-1=0$; $x_1=1$; (2) $x-3=0$; $x_2=3$.

(3) $x^2+x+1=0$; $\begin{cases} x_3=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \\ x_4=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) \end{cases}$

(4) $x^2+3x+9=0$; $\begin{cases} x_5=\frac{3}{2}(-1+\sqrt{-3}) \\ x_6=\frac{3}{2}(-1-\sqrt{-3}). \end{cases}$

110. Da $67x^4=81x^4+16x^4$ und $1296=81\times16$ ist, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:
$x^8-81x^4-16x^4+81\times16=0$; daraus erhält man:

$x^4(x^4-81)-16(x^4-81)=0$; folglich
$(x^4-16)(x^4-81)=0$; also
$x^4=16$; $x^2=\pm4$; $x=\pm\sqrt{\pm4}=\pm2\sqrt{\pm1}$.
$x^4=81$; $x^2=\pm9$; $x=\pm\sqrt{\pm9}=\pm3\sqrt{\pm1}$.

111. Erhebe beide Teile der Gleichung ins Quadrat, so ist:
$x-1=(x-1)^2$ oder $(x-1)^2-1(x-1)=0$; daher:
$(x-2)(x-1)=0$; folglich $x_1=2$ und $x_2=1$.

112. α) Setze hier $\sqrt{x}=z$, so ist $x=z^2$. Es ist daher:
$z^2+z=20$. Hieraus ergiebt sich:
$z_1=4$ und $z_2=-5$. Deshalb ist:
$\sqrt{x}=(+4)$; also $x_1=(+4)^2=16$ und
$\sqrt{x}=(-5)$; also $x_2=(-5)^2=25$.

β) Da $x=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}=-5\sqrt{x}+4\sqrt{x}$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:
$\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}-5\sqrt{x}+4\sqrt{x}-4\times5=0$; hieraus erhält man:
$\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)+4(\sqrt{x}-5)=0$ und hieraus
$(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-5)=0$;
daher $\sqrt{x}=5$; also $x_1=(+5)^2=25$,
und $\sqrt{x}=-4$: also $x_2=(-4)^2=16$.

113. α) Erhebe die hier gegebene Gleichung ins Quadrat, so ist
$x^4-x^2=-\frac{1}{8}$ oder $(x^2-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{8}$; folglich
$x^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=0{,}5\pm0{,}35356$; also
x_1 und $x_2=\pm\sqrt{0{,}85356}=\pm0{,}92388$ und
x_3 und $x_4=\pm\sqrt{0{,}14644}=\pm0{,}38268$.

β) Hier erhält man: $\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-6)=0$;
folglich (1) $\sqrt{x}=0$; daher $x_1=0$.
Ferner ist: $x+\sqrt{x}-6=0$ oder
$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)=0$; daher
(2) $\sqrt{x}-2=0$; $\sqrt{x}=2$; $x_2=4$;
(3) $\sqrt{x}+3=0$; $\sqrt{x}=-3$; $x_3=(-3)^2=9$.

114. α) Die gegebene Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$\sqrt[3]{(a+x)^2}+6\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$$

Dividiere diese Gleichung durch $\sqrt[3]{(a+x)(a-x)}$, so ist

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+6\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=5.$$

Setze $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=z$, so ist $\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{1}{z}$ Demnach hat man:

$z+6\cdot\frac{1}{z}=5$; hieraus erhält man:

$(z-3)(z-2)=0$; folglich $z_1=2$ und $z_2=3$; daher ist:

$\frac{a+x}{a-x}=2^3$; also $9x=7a$; folglich $x_1=\frac{7}{9}a$ und

$\frac{a+x}{a-x}=3^3$; $14x=13a$; folglich $x_2=\frac{13}{14}a$.

β) Um aus dem Divisor des Quotienten auf der linken Seite die Wurzelgröße fortzuschaffen, multipliziere man den Quotienten im Dividend und Divisor mit $(a+x)+\sqrt{a^2-x^2}$, so erhält man:

$$\frac{2(a+x)(a+\sqrt{a^2-x^2})}{2x(a+x)}=\frac{c}{x} \text{ oder } a+\sqrt{a^2-x^2}=c;$$

daher: $\sqrt{a^2-x^2}=c-a$; also:

$a^2-x^2=c^2-2ac+a^2$; mithin

$x^2=c(2a-c)$; folglich x_1 und $x_2=\pm\sqrt{c(2a-c)}$.

115. Man setze hier $\sqrt{x}=z$, so hat man:

$$z^2-(a+b)z-2a(a-b)=0;$$
$$z^2-z(2a-a+b)-2a(a-b)=0;$$
$$z(z+a-b)-2a(z+a-b)=0; \text{ also;}$$

$(z-2a)(z+a-b)=0$; folglich $z_1=b-a$ und $z_2=2a$.

Demnach ist:

$\sqrt{x}=b-a$; also $x_1=(b-a)^2$ und $\sqrt{x}=2a$; also $x_2=4a^2$.

116. Setzt man hier $\sqrt{x}=z$, so hat man:

$z^2-(a+b)z=2(a-b)^2-ab$; hieraus erhält man:

$z_1=2a-b$ und $z_2=b-a$. Hiernach ist

$\sqrt{x}=2a-b$; folglich $x_1=(2a-b)^2$ und

$\sqrt{x}=2b-a$; folglich $x_2=(2b-a)^2$.

117. Multipliziere diese Gleichung mit $(21-\sqrt{x})\sqrt{x}$, so hat man:

$9x+882=189\sqrt{x}$ oder

$x-21\sqrt{x}+98=0$. Nun ist:

$x=\sqrt{x}.\sqrt{x}$ und $-21\sqrt{x}=-7\sqrt{x}-14\sqrt{x}$;

Also ist: $\sqrt{x}.\sqrt{x}-7\sqrt{x}-14\sqrt{x}+14.7=0$; daher:

$(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}-14)=0$; folglich:

$\sqrt{x}-14=0$; also $x_1=14^2=196$ und

$\sqrt{x}-7=0$; also $x_2=7^2=49$.

118. Quadriert man beide Teile der Gleichung, so erhält man:

$$2\sqrt{(2x+2)(7+6x)}=63-x.$$

Erhebt man abermals diese Gleichung ins Quadrat, so ist:

$4(2x+2)(7+6x)=(63-x)^2$. Hieraus ergiebt sich

$$47x^2+230x=3913.$$

Diese Gleichung ist von der Form $px^2+qx-r=0$; also ist nach Beisp. 46:

$$x=[-230\pm\sqrt{230^2+4\times47\times3913}]:(2\times47)=$$
$$[-230\pm888]:94.$$

Hieraus erhält man $x_1=7$ und $x_2=-11\frac{42}{47}$.

119. Multiplizierе im Dividend und Divisor des Quotienten auf der linken Seite mit $x-\sqrt{x}$, so erhält man:

$$\frac{(x-\sqrt{x})^2}{x^2-x}=\frac{4}{x^2-x};\text{ daher}$$

$$(x-\sqrt{x})^2=4;\text{ mithin } x-\sqrt{x}=\pm 2;$$

Nehmen wir vorläufig $+2$ an, so ist:

$$x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2\times 1=0\text{ oder:}$$

$$\sqrt{x}.\sqrt{x}+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2\times 1=0;\text{ also:}$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}+1)=0;\text{ daher:}$$

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)=0.$$

Es ist also: $\sqrt{x}=2$; mithin $x_1=(+2)^2=4$; $\sqrt{x}=(-1)$: mithin $x_2=(-1)^2=1$. Ferner ist: $x-\sqrt{x}=-2$. Durch Substitution von $\sqrt{x}=z$ finden wir

$$z=\tfrac{1}{2}[1\pm\sqrt{-7}];\text{ daher ist:}$$

$$x_3\text{ und } x_4=[\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-7})]^2=\tfrac{1}{2}(-3\pm\sqrt{-7}).$$

120. Setze $\sqrt{25+x}=z$, so ist $x=z^2-25$. Daher verwandelt sich die hier gegebene Gleichung in folgende: $z^2+z=182$. Hieraus ergiebt sich $z_1=+13$ und $z_2=-14$. Daher ist: $x_1=(+13)^2-25=144$ und $x_2=(-14)^2-25=171$.

121. Setze $\sqrt{3(a^2+b^2)+x}=z$, so ist $x=z^2-3(a^2+b^2)$.

Es ist daher: $z^2+2z(a+b)=3(a^2+b^2)-10ab$.

Hieraus erhält man durch Ergänzung des Quadrats:

$$(z+a+b)^2=4(a-b)^2;\text{ mithin}$$

$$z_1=a-3b\text{ und } z_2=b-3a.\text{ Hiernach ist:}$$

$x_1=(a-3b)^2-3(a^2+b^2)=-2a^2-6ab+6b^2$ und

$x_2=(b-3a)^2-3(a^2+b^2)=-2b^2-6ab+6a^2$.

122. Setzt man $x^2-8x=z$, so erhält man statt der gegebenen Gleichung: $\sqrt{z+31}+z=-11$.

Setze ferner $\sqrt{z+31}=y$, so ist $z=y^2-31$. Es ist also: $y^2+y=20$, folglich $y_1=4$ und $y_2=-5$; mithin ist: $z_1=(+4)^2-31=-15$ und $z_2=(-5)^2-31=-6$.

Substituiert man diese Werte für z, so ist: $x^2-8x=-15$ oder $(x-4)^2=(+4)^2-15=1$;

$$\text{folglich } x_1=5\text{ und } x_2=3.$$

Ferner ist:

$$x^2-8x=-6\text{ oder } (x-4)^2=(+4)^2-6;$$

$$\text{folglich } x=4\pm\sqrt{(+4)^2-6}=4\pm\sqrt{10},\text{ oder}$$

$$x_3=7{,}16228\text{ und } x_4=0{,}83772.$$

123. Setzt man $\sqrt[4]{x}=z$, so ist $\sqrt{x}=z^2$. Es ist daher: $z^2+z=20$; woraus $z_1=4$ und $z_2=-5$. Es ist also:

$$\sqrt[4]{x}=+4;\text{ folglich } x_1=(+4)^4=256\text{ und}$$

$$\sqrt[4]{x}=-5;\text{ folglich } x_2=(-5)^4=625.$$

124. Die hier gegebene Gleichung kann auch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x^2-1}}=2x\sqrt{x^2-1}+0,25.$$

Quadriert man diese Gleichung, so ist:

$$x\sqrt{x^2-1}=4x^2(x^2-1)+x\sqrt{x^2-1}+\tfrac{1}{16}, \text{ oder}$$

$$x^4-x^2=-\tfrac{1}{64}.$$

$$(x^2)^2-x^2+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{64}=\tfrac{15}{64}.$$

Also $x^2=\frac{1}{8}[4+\sqrt{15}]$ und $x^2=\frac{1}{8}[4-\sqrt{15}]$;

folglich x_1 und $x_2=\pm\sqrt{\frac{1}{8}[4+\sqrt{15}]}=\pm0,99203$,

und x_3 und $x_4=\pm\sqrt{\frac{1}{8}[4-\sqrt{15}]}=\pm0,126006$.

125. Man setze $\sqrt[3]{x}=y$, so ist $\sqrt[3]{x^2}=y^2$. Hiernach ist: $7y^2+y=350$. Multipliziere diese Gleichung mit $4\times7=28$ und vervollständige das Quadrat, so ist: $(14y+1)^2=99^2$; hieraus folgt $y_1=7$ und $y_2=-7\frac{1}{7}$. Es ist daher:

$\sqrt[3]{x}=7$; folglich $x_1=7^3=343$ und

$\sqrt[3]{x}=-7\frac{1}{7}$; folglich $x_2=(-7\frac{1}{7})^3=-364\frac{148}{343}$.

126. Setze $\sqrt[3]{-x}=y$, so ist $\sqrt[3]{(-x)^2}=y^2$ und daher hat man: $y^2-y=n(n+1)$; hieraus folgt $y_1=-n$ und $y_2=n+1$; daher ist:

$\sqrt[3]{-x}=-n$; folglich $-x=-n^3$ und $x_1=n^3$; ferner ist:

$\sqrt[3]{-x}=n+1$; folglich $-x=(n+1)^3$ und $x_2=-(n+1)^3$.

127. Hier hat man unter Anwendung von §. 294:

$\sqrt[5]{x^8}+\sqrt[5]{x^{16}}=43053282$. Setze $\sqrt[5]{x^8}=y$, so wird:

$y^2+y=43053282$, also $y_1=6561=3^8$, $y_2=-6562$

Daher ist: $\sqrt[5]{x^8}=3^8$; $x^8=3^{8\cdot5}$; also $x_1=3^5=243$

und $x_2=(-6562)^{\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{-6562^5}=243,0231\sqrt{-1}$.

128. Setzt man $x^{-\frac{3}{8}}=y$, so erhält man:

$12y^2-y=\frac{1}{16}$; folglich $y_1=\frac{1}{8}$ und $y_2=-\frac{1}{24}$. Daher ist:

$x^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{8}$; $x^{\frac{3}{8}}=8=2^3$; $x^3=2^{3\cdot8}$; $x_1=2^8=256$

und $x^{-\frac{3}{8}}=-\frac{1}{24}$; also $x^{\frac{3}{8}}=-24$; daher $x_2=(-24)^{\frac{8}{3}}$

$=\sqrt[3]{110075314176}=4792,5$.

129. *a*) Erhebt man die hier gegebene Gleichung ins Quadrat und ordnet sie, so ist:

$$x^2-5x+6=-\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Diese Gleichung quadriert, giebt:

$$(x^2-5x+6)^2=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Entwickelt man diese Produkte und ordnet sie, so hat man:

$$x^2-5x+6=0 \text{ oder:}$$

$$(x-2)(x-3)=0; \text{ folglich } x_1=3 \text{ und } x_2=2.$$

β) Erhebe diese Gleichung ins Quadrat und ordne sie, so wird:

$$x^2-(a+c)x+ac=-\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-a+b-c)}.$$

Diese Gleichung wieder ins Quadrat erhoben giebt:

$$[x^2-(a+c)x+ac]^2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-a+b-c).$$

Diese Gleichung entwickelt und geordnet giebt:

$$x^2-(a+c)x+ac=0; \text{ hieraus hat man}$$

$$(x-a)(x-c)=0; \text{ folglich } x_1=a \text{ und } x_2=c.$$

130. α) Setzt man in dieser Gleichung $x+\sqrt{x}=y$, so wird: $y^4-y^2=20592$; folglich $y^2=144$ und $y^2=-143$; hieraus folgt, daß y_1 und $y_2=\pm 12$ und

$$y_3 \text{ und } y_4=\pm\sqrt{-143}.$$

Substituiert man die für y gefundenen Werte, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$(1)\ x+\sqrt{x}=12;\ (2)\ x+\sqrt{x}=-12;$$

$$(3)\ x+\sqrt{x}=\sqrt{-143};\ (4) x+\sqrt{x}=-\sqrt{-143}.$$

Nun setze man $\sqrt{x}=z$, so ist $x=z^2$ und man erhält statt der vorstehenden Gleichungen folgende:

$$(5)\ (z+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{49}{4};\ (6)\ (z+\tfrac{1}{2})^2=-\tfrac{47}{4};$$

$$(7)\ (z+\tfrac{1}{2})^2=0{,}25+\sqrt{-143};$$

$$(8)\ (z+\tfrac{1}{2})^2=0{,}25-\sqrt{-143}.$$

Aus (5) erhält man $z_1=3$ und $z_2=-4$;

„ (6) „ „ z_3 und $z_4=-0{,}5\pm\sqrt{-11{,}75}$;

„ (7) „ „ z_5 und $z_6=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+\sqrt{-143}}$;

„ (8) „ „ z_7 und $z_8=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-\sqrt{-143}}$.

Hiernach erhält man durch Substitution:

$$\sqrt{x}=+3; \text{ also } x_1=(+3)^2=9;$$

$$\sqrt{x}=(-4); \text{ also } x_2=(-4)^2=16;$$

$$\sqrt{x}=-0{,}5\pm\sqrt{-11{,}75}; \text{ also}$$

$$x_3 \text{ und } x_4=[-0{,}5\pm\sqrt{-11{,}75}]^2=-11{,}5\pm\sqrt{-11{,}75}$$

$$\sqrt{x}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+\sqrt{-143}};$$

$$\text{also } x_5 \text{ und } x_6=(-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+\sqrt{-143}})^2$$

$$=0{,}5+\sqrt{-143}\mp\sqrt{0{,}25+\sqrt{-143}};$$

$$\sqrt{x}=-0{,}5+\sqrt{0{,}25-\sqrt{-143}};$$

$$\text{also } x_7 \text{ und } x_8=(-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-\sqrt{-143}})^2$$

$$=0{,}5-\sqrt{-143}\mp\sqrt{0{,}25-\sqrt{-143}}.$$

β) Ergänzt man hier das Quadrat, indem man zu beiden Seiten der Gleichung $(\frac{1}{2}p)^2$ addiert, so hat man:

$$[(ax^{2m}+bx^m+c)^n+\tfrac{1}{2}p]^2=\tfrac{1}{4}p^2+q.$$

Hieraus die Quadratwurzel, giebt:

$$(ax^{2m}+bx^m+c)^n=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}.$$

Ziehe hieraus die nte Wurzel, so ist:

$$ax^{2m}+bx^m+c=\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}} \text{ oder}$$

$$x^{2m}+\frac{b}{a}x^m=-\frac{c}{a}+\frac{1}{a}\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}}.$$

Hieraus erhält man:

$$\left(x^m+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+\frac{1}{a}\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}}.$$

Hieraus die Quadratwurzel, giebt:

$$x^m=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+\frac{1}{a}\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}}}; \text{ folglich ist}$$

$$x=\sqrt[m]{-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+\frac{1}{a}\sqrt[n]{-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}}}}.$$

γ) Diese Gleichung ist von der nämlichen Form, wie die vorhergehende, daher ist:

$$[(x^{2m}+a^mx^m-a^{2m})^n+\tfrac{1}{2}a^{2mn}]^2=\tfrac{9}{4}a^{4mn}; \text{ also}$$

(1) $(x^{2m}+a^mx^m-a^{2m})^n=a^{2mn}$ \
(2) $(x^{2m}+a^mx^m-a^{2m})^n=-2a^{2mn}$ } Hieraus die nt Wurzel, giebt:

(3) $x^{2m}+a^mx^m=2a^{2m}$ und

(4) $x^{2m}+a^mx^m=a^{2m}(1+\sqrt[n]{-2})$.

Ergänze in (3) und (4) das Quadrat, so ist:

(5) $(x^m+\frac{1}{2}a^m)^2=\frac{9}{4}a^{2m}$ und aus: (4)

(6) $(x^m+\frac{1}{2}a^m)^2=a^{2m}(1\frac{1}{4}+\sqrt[n]{-2})$. Nun folgt aus (5), daß

(7) $x^m=-\frac{1}{2}a^m\pm\frac{3}{2}a^m=a^m$ und $=-2a^m$ und aus (6)

(8) $x^m=a^m\left(-\frac{1}{2}\pm\sqrt{1\frac{1}{4}+\sqrt[n]{-2}}\right)$; daher ist aus (7) und (8):

$$x_1=a,\ x_2=a\sqrt[m]{-2} \text{ und } x_3 \text{ und } x_4=a\sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{1\tfrac{1}{4}+\sqrt[n]{-2}}}.$$

131. α) Erhebe diese Gleichung auf die zweite Potenz, so wird:

$$(x+a)-3\sqrt[3]{x^2-a^2}\,.\,(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a})-(x-a)=m^3$$

$$\text{oder: } 3\sqrt[3]{x^2-a^2}\,.\,(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a})=2a-m^3.$$

Setze in diese Gleichung den Wert für $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}$ aus der gegebenen Gleichung, so ist:

$$3m\sqrt[3]{x^2-a^2}=2a-m^3 \text{ oder } \sqrt[3]{x^2-a^2}=\frac{2a-m^3}{3m}.$$

Erhebe diese Gleichung auf die dritte Potenz, so wird:

$$x^2-a^2=\left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3, \text{ folglich } x=\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3}.$$

β) Um hier den Wert für x zu finden, braucht man nur in den unter α) für x gefundenen Wert $a=\sqrt{2}$ und $m=\sqrt{2}$ zu setzen, so findet man x_1 und $x_2=\pm\sqrt{2}$.

132. Durch Entwickelung erhält man hier:

$$\sqrt[3]{(m-x)(n-x)}=\frac{m-n-p^3}{3p}; \text{ daher}$$

$$(m-x)(n-x)=\left(\frac{m-n-p^3}{3p}\right)^3; \text{ folglich}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{2}(m+n)\pm\sqrt{\left(\frac{m-n-p^3}{3p}\right)^3+\tfrac{1}{4}(m-n)^2}.$$

133. Erhebt man diese Gleichung auf die dritte Potenz, so erhält man:

$3\sqrt[3]{(m-x)(x-n}\,.\,[\sqrt[3]{m-x}+\sqrt[3]{x-n})=0$ oder durch Einsetzung des Wertes für $\sqrt[3]{m-x}+\sqrt[3]{x=n}$ aus der gegebenen Gleichung $3\sqrt[3]{(m-x)(x-n)}\,.\,\sqrt[3]{m-n}=0$; hieraus ergiebt sich $x^2-x(n+m)=-mn$, folglich $x_1=m$; $x_2=n$.

134. Erhebe diese Gleichung auf die dritte Potenz, so wird:

$$2a-3\sqrt[3]{(x^2+2x\sqrt{a}+a)(x^2+2x\sqrt{a}-a)}.[\sqrt[3]{x^2+2x\sqrt{a}+a}-\sqrt[3]{x^2+2x\sqrt{a}-a}]=2a,$$

woraus: $\sqrt[3]{(x^2+2x\sqrt{a}+a)(x^2+2x\sqrt{a}-a)}=0.$

Daher: $x^2+2x\sqrt{a}+a=0$, mithin $x_1=-\sqrt{a}$;

Ferner ist: $x^2+2x\sqrt{a}-a=0$, also x_2 und $x_3=-\sqrt{a}\pm\sqrt{2a}$.

135. α) Entwickelt man die Gl., so ist

$$x^3-x^2b-x^2a+xab-x^2c+xbc+xac-abc+abc=0$$

oder $x(x^2-xb-xa-xc+ab+bc+ac)=0$, folglich $x_1=0$.

Weiter ist $x^2-xa-xb-xc=-ab-bc-ac$ oder

$$x^2-x(a+b+c)=-ab-bc-ac, \text{ woraus}$$

$$x_2 \text{ und } x_3=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\pm\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2-ab-bc-ac}=$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac}.$$

β) Durch Entwickelung dieser Gleichung erhält man:

$$x^4+10ax^3+35a^2x^2+50a^3x+24a^4=b^4$$

oder $(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4=b^4$.

Folglich $x^2+5ax+5a^2=\pm\sqrt{a^4+b^4}$. Mithin

$$x=-\tfrac{5}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5a^2\pm4\sqrt{a^4+b^4}}.$$

136. α) Aus dieser Gl. erhält man durch Umformung:

$9(x-4)(x-3)-7(x-4)(x-3)=0$ oder

$(9-7)(x-4)(x-3)=0$, daher $x_1=4$ und $x_2=3$.

β) Formt man diese Gl. um, so hat man

$(a+1)(x-b)(c-x)-a(x-b)(x-c)=0$; hieraus

$[(a+1)(c-x)-a(x-c)](x-b)=0$ oder:

$(2a+1)(c-x)(x-b)=0$; daher

$x-b=0$; also $x_1=b$ und $c-x=0$; also $x_2=c$.

c) Exponentialgleichungen (137—153).

§. 393. 137. Setzt man der Abkürzung wegen $1{,}37129=a$, so ist:

$\sqrt[x]{a^{-10}}+\sqrt[x]{a^{-20}}=0{,}11$. Setze jetzt $\sqrt[x]{a^{-10}}=y$, so ist:

$y+y^2=0{,}11$; daher $y=0{,}1$; folglich ist:

$\sqrt[x]{a^{-10}}=0{,}1$, oder, mit x potenziert:

$a^{-10}=0{,}1^x$; daher $a^{10}=10^x$.

Da diese Potenzen einander gleich sind und überdies der Exponent der einen gleich der Basis der andern ist, so muß auch die Basis der einen dem Exponent der andern Potenz gleich sein, also:

$$x=a=1{,}37129.$$

138. Da nach § 261 jede Zahl zur Potenz 0 erhoben 1 beträgt, so kann in der hier gegebenen Gleichung $1=4^0$ gesetzt werden. Alsdann erhalten wir:

$$(4^{3-x})^{2-x}=4^0.$$

Sind nun die Basen zweier Potenzen einander gleich, so müssen auch ihre Exponenten einander gleich sein. Daher ist:

$(3-x)(2-x)=0$; folglich $x_1=3$ und $x_2=2$.

139. Setzt man hier $100=10^2$, so haben wir wieder zwei gleiche Potenzen, deren Grundzahlen einander gleich sind, folglich muß auch

$(5-x)(6-x)=2$ sein, daher $x_1=7$ und $x_2=4$.

140. Hier hat man: $a^{\frac{1}{x}}=a^x$; daher: $\frac{1}{x}=x$; folglich $x^2=1$; mithin $x_1=+1$ und $x_2=-1$.

141. Potenziere diese Gleichung mit x, so ist:

$0{,}707107^{(x+0{,}707107)x}=0{,}707107^1$; daher

$(x+0{,}707107)x=1$; es ist also:

$(x+0{,}3535535)^2=(1{,}060660)^2$;

folglich $x_1=0{,}707107$ und $x_2=-1{,}414214$.

142. Potenziere diese Gleichung mit $(x+1)$, so ist:

$$(3^{x+2})^{x+1}=2.$$

Löst man diese Gleichung vermittels Logarithmen auf, so erhält man:

$$(x+2)(x+1)\log 3=\log 2 \text{ oder } x^2+3x=\frac{\log 2-2\log 3}{\log 3}.$$

Ergänzt man das Quadrat, so wird:

$$(x+1{,}5)^2=\frac{\log 2-2\log 3}{\log 3}+(1{,}5)^2; \text{ folglich:}$$

$$x=-1{,}5\pm\sqrt{\frac{\log 2-2\log 3}{\log 3}+(1{,}5)^2}$$

$$=-1{,}5\pm\sqrt{\frac{0{,}3010300-0{,}9542426}{0{,}4771213}+2{,}25};$$

daher $x_1=-1{,}5+0{,}9385785=-0{,}5614215$ und

$x_2=-2{,}4385785$.

143. Erhebe diese Gleichung auf die xte Potenz, so ist:

$a^x \,.\, b^{xx}=c$ oder vermittels Logarithmen:

$x\log a+xx\log b=\log c$; daher:

$$x^2+\frac{\log a}{\log b}x=\frac{\log c}{\log b}; \text{ hieraus erhält man:}$$

$$\left(x+\frac{\log a}{2\log b}\right)^2=\frac{(\log a)^2+4\log b\,.\,\log c}{(2\log b)^2}$$

$$\text{folglich } x=\frac{-\log a\pm\sqrt{(\log a)^2+4\log b\,.\,\log c}}{2\log b}$$

144. Da $100\,.\,10^x=10^2\,.\,10^x=10^{x+2}$ und

$1000^5=(10\,.\,10\,.\,10)^5=(10^3)^5=10^{15}$,

so erhält man aus der gegebenen Gleichung folgende:

$10^{(x+2)}=\sqrt[x]{10^{15}}$. Potenziere diese Gleichung mit x, so ist:

$(10^{x+2})^x=10^{15}$. Daher ist:

$(x+2)x=15$ oder $(x-3)(x+5)=0$;

folglich $x_1=3$ und $x_2=-5$.

145. Vermittels Logarithmen erhalten wir hier;

$\log x^2=\log 10$ oder $\log x^2=1$; also

$\log x=\pm 1$; folglich $x=\text{num.log }(\pm 1)$.

Nun gehört zum Logarithmus $+1$ die Zahl 10; daher $x_1=10$ und $x_2=\text{num.log. }(-1)=0{,}1$. Siehe §. 344.

146. Hier hat man: $\log x^2+2\log x=\log 15{,}20153$ oder:

$\log x^2+2\log x=1{,}1818873$; daher:

$(\log x+1)^2=2{,}1818873$; folglich

$\log x=0{,}4771213$ und $\log x=-2{,}4771213$.

Daher ist x_1=num.log 0,4771213=3 und
x_2=num.log. (—2,4771213)=num.log. (0,5228787—3)
=3,33333 : 100=0,0033=circa $\frac{1}{300}$. Siehe §. 363 (25).

147. Vermittels Logarithmen hat man hier:

$$x\log 2+4\log 2+xx\log 3+4x\log 3=\log 5;$$
$$x^2\log 3+x(\log 2+4\log 3)=\log 5-4\log 2;$$
$$0{,}4771213x^2+2{,}2095152x=-0{,}5051500;$$
$$(x+2{,}3155)^2=4{,}30284025; \text{ folglich:}$$
$$x_1=(\pm 2{,}0743)-2{,}3155=-0{,}2412 \text{ und } x_2=-4{,}3898.$$

148. Durch Umformung der Gleichung nach §. 285 erhält man:

$$\sqrt[x(x+1)]{a^{x+1}b^x}=c \text{ oder } \sqrt[x(x+1)]{(ab)^x\,.\,a}=c.$$

Potenziere diese Gleichung mit x(x+1), so ist:

$$(ab)^x a=c^{x(x+1)} \text{ oder } c^{xx}c^x=(ab)^x\,.\,a \text{ und hieraus}$$
$$c^{xx}\,.\left(\frac{c}{ab}\right)^x=a \text{ oder vermittels Logarithmen:}$$
$$x^2\log c+x\log\frac{c}{ab}=\log a, \text{ und hieraus folgt, daß}$$
$$x=\left[-\log\frac{c}{ab}\pm\sqrt{\left(\log\frac{c}{ab}\right)^2+4\log a\,.\,\log c}\right]:(2\log c).$$

149. Die Zahlen 2401 und 117649 sind nach §. 330 Potenzen von 7 und zwar ist $2401=7^4$ und $117649=7^6$. Nach §. 255 erhält man aus dem gegebenen Beispiele:

$$7^{\frac{6}{x+2}}:7^{\frac{4}{x+3}}=7 \text{ und hieraus nach §. 219:}$$
$$7^{\frac{6}{x+2}-\frac{4}{x+3}}=7^1.$$

Nun haben gleiche Potenzen von gleichen Grundzahlen auch gleiche Exponenten; daher ist:

$$\frac{6}{x+2}-\frac{4}{x+3}=1; \text{ hieraus erhält man:}$$
$$(x-1)(x+4)=0; \text{ daher } x_1=1 \text{ und } x_2=-4.$$

150. α) Da $625=25^2$ und $15625=25^3$, so wie $0{,}04=25^{-1}$, so erhält man aus der gegebenen Gleichung folgende:

$$25^{\frac{2(x+1)}{x+2}}:25^{\frac{3(4x-3)}{5x-4}}=25^{-1} \text{ und hieraus:}$$
$$25^{\frac{2(x+1)}{x+2}-\frac{3(4x-3)}{5x-4}}=25^{-1}; \text{ daher ist:}$$
$$\frac{2(x+1)}{x+2}-\frac{3(4x-3)}{5x-4}=-1.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$(x-2)(x-\tfrac{1}{3})=0; \text{ also } x_1=2 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{3}$$

β) Entwickelt man die hier gegebene Gleichung, so erhält man:

$$(e^x)^2-2m(e^x)=1; \text{ daher:}$$
$$(e^x-m)^2=m^2+1; \text{ folglich}$$

$e^x = m \pm \sqrt{m^2+1}$ oder: $x \log e = \log[m \pm \sqrt{m^2+1}]$;

daher $x = \log[m \pm \sqrt{m^2+1}] : (\log e)$.

151. Potenziert man diese Gleichung mit $(x+2)(x+4)$, so erhält man:

$7^{x(x+5)+4} = 6{,}70375^{x(x+5)+6}$ oder

$7^{x(x+5)} . 7^4 = 6{,}70375^{x(x+5)} . 6{,}70375^6$ oder:

$(7 : 6{,}70375)^{x(x+5)} = 6{,}70375^6 . 7^{-4}$; daher:

$x(x+5)(\log 7 - \log 6{,}70375) = 6 \log 6{,}70375 - 4 \log 7$;

also: $x(x+5) = \frac{6 \log 6{,}70375 - 4 \log 7}{\log 7 - \log 6{,}70375}$

$= \frac{4{,}9579068 - 3{,}3803920}{0{,}8450980 - 0{,}8263178} = \frac{1{,}5775148}{0{,}0187802} = 84.$

Daher ist also:

$x^2 + 5x - 84 = 0$; oder $(x-7)(x+12) = 0$;

folglich $x_1 = 7$ und $x_2 = -12$.

152. Vermittels Logarithmen haben wir hier:

$0{,}289623 \log 10 = \log x^2$; da nun $\log 10 = 1$, so ist:

$\log x^2 = 0{,}289623$; also $\log x = \pm 0{,}53816$;

$x = \text{num.} \log(\pm 0{,}53816)$.

Nach §. 370—372 gehört zum Logarithmus $(+0{,}53816)$ die Zahl 3,4527 und

nach §. 373 Beispiel 14 δ) gehört zum Logarithmus $(-0{,}53816)$ $= 0{,}46184 - 1$ die Zahl 0,289623;

folglich ist $x_1 = 3{,}45276$ und $x_2 = 0{,}289623$.

153. α) (1) Wenden wir §. 220 auf die gegebene Gleichung an, so erhalten wir:

$(10000x)^{(\log x)^3} : (10000x)^{5 \log x} = 1.$

Diese Gleichung kann nur unter der Voraussetzung statt haben, daß sowohl $(\log x)^3$, als auch $5 \log x$ gleich Null ist; denn in diesem Falle erhalten wir:

$(10000x)^0 : (10000x)^0 = 1$ nach §. 229.

Ist nun $(\log x)^3 = 0$, so ist $x^3 = \text{num} . \log 0 = 1$; folglich $x_1 = 1$.

(2) Aus der gegebenen Gleichung erhalten wir auch unter Anwendung von Logarithmen:

$[(\log x)^3 - 5 \log x] \log 10^4 + [(\log x)^3 - 5 \log x] \log x = 0$;

oder $(\log 10^4 + \log x)[(\log x)^3 - 5 \log x] = 0$;

Es ist daher:

α) $\log 10^4 + \log x = 0$ oder $\log x + 4 = 0$;

$\log x = -4$; also $x_2 = \text{num} . \log(-4) = 0{,}0001$ nach §. 353 Beispiel 22.

β) $(\log x)^3 - 5 \log x = 0$; also $(\log x)^3 = 5 \log x$.

Dividieren wir diese Gleichung durch $\log x$, so haben wir:

$(\log x)^2 = 5$; folglich $\log x = \pm\sqrt{5} = \pm 2{,}2360679$;

daher $x_3 = \text{num.} \log(\pm 2{,}2360679) = 172{,}2138$ und

$x_4 = 0{,}0058068$.

β) Entwickelt man die gegebene Gleichung, so erhält man:

$(2^{x+1})^{x+2} . (3^x)^{x+2} . (4^x)^{x+1} = 1$ oder

$2^{xx+3x} . 3^{xx+2x} . 4^{xx+x} = 1 . 2^{-2}$; hieraus folgt:

$(2 . 3 . 4)^{xx} . (2^3 . 3^2 . 4)^x = 1 . 2^{-2}$ oder

$24^{xx} . 288^x = 1 . 2^{-2}$; also:

$x^2 \log 24 + x \log 288 = \log 1 - 2 \log 2$;

$1{,}38021x^2 + 2{,}45939x = -0{,}60206$; also

$(x + 0{,}8909)^2 = (0{,}8909)^2 - 0{,}43621$; daher

$x_1 = -0{,}292968$ und $x_2 = -1{,}488926$.

d) Die Wurzeln der quadratischen Gleichungen. (154—165.)

§. 394. Um zu zeigen, daß jede quadratische Gleichung nur zwei Wurzelwerte haben kann, nehme man an, die Größe a, für x eingesetzt, genüge der Gleichung des zweiten Grades

$$x^2 + px = q$$

und sei also der Wert für x, so muß x auch noch einen zweiten Wert haben. Substituiert man a für x, so erhält man:

$$a^2 + pa = q$$

und unter der Voraussetzung, daß a ein Wert für x ist, muß q notwendig $a^2 + pa$ gleich sein. Man kann daher diesen Ausdruck für q setzen, und aus der gegebenen Gleichung entsteht dann folgende:

$$x^2 + px = a^2 + pa, \text{ oder } x^2 + px - a^2 - pa = 0.$$

Nun läßt sich $x^2 + px - a^2 - pa$ durch $x - a$ teilen und giebt einen genauen Quotient, nämlich $x + a + p$. Hiernach hat man:

$$x^2 + px - a^2 - pa = (x - a)(x + a + p) = x^2 + px - q = 0.$$

Nun ist einleuchtend, daß ein Produkt Null wird, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Demnach wird nicht blos $x^2 + px - a^2 - pa$ zu Null, wenn $x = a$, was $x - a = 0$ giebt, sondern auch, wenn $x + a + p = 0$, woraus sich ergiebt, daß $x = -a - p$. Hieraus folgt, daß wenn a einer von den Werten für x ist, $(-a - p)$ notwendig der andere Wert sein muß. Dieses Resultat stimmt auch mit den beiden in der Formel

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}$$

erhaltenen Werten für x überein; denn nimmt man für a einen von diesen beiden Werten, nämlich $-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, so findet man $(-a - p) = +\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - p = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, welches in der That die zweite Wurzel der Gleichung ist. Hieraus sieht man, daß die Gleichung

$$x^2 + px = q, \text{ oder } x^2 + px - q = 0$$

nur zwei Wurzeln haben kann. Denn angenommen, sie habe noch eine dritte Wurzel, die etwa b heiße, so würde daraus folgen, daß $x - b$ zu den Faktoren von $x^2 + px - q$ oder von $(x - a)(x + a + p)$ gehören müsse. Nun sind aber die binomischen Faktoren $(x - a)$ und $(x + a + p)$ relative Primzahlen, haben also keinen gemein=

schaftlichen Faktor; folglich kann auch ihr Produkt keinen andern Faktor, als sie selbst haben; mithin kann auch (—b) nichts anders sein, als (—a), oder (+a+p).

154. Sind a und b die Wurzeln der Gleichung

$$x^2-px+q=0,$$ so ist

nach §. 390. C

α) $a+b=p$; β) $ab=q$;

γ) $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=p^2-q$;

δ) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=p^3-3pq=p(p^2-3q)$;

ε) $a^4+a^2b^2+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+3a^2b^2=$
$p^4-4p^2q+3q^2=(p^2-q)(p^2-3q)$.

155. α) Setzt man 123=x und 789=b, so muß die Gl., da beide Wurzeln positiv sind, nach §. 390. C. (4) folgende Form haben:

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=0.$$

Substituiert man die für a und b angenommenen Werte, so heißt die Gleichung also:

$$x^2-(123+789)x+123\times789=0, \text{ oder}$$
$$x^2-912x+97047=0.$$

β) Da die Gleichung eine positive und eine negative Wurzel hat, so muß sie die Form (3) im §. 390. C. haben. Da nun $a=56\frac{7}{8}$ und $b=-12\frac{3}{4}$ ist, so heißt die Gleichung, welche die Wurzeln $-12\frac{3}{4}$ und $56\frac{7}{8}$ hat:

$$x^2-(56\tfrac{7}{8}-12\tfrac{3}{4})x-12\tfrac{3}{4}\times56\tfrac{7}{8}=0, \text{ oder}$$
$$x^2-44\tfrac{1}{8}x-725\tfrac{5}{32}=0.$$

156. α) Da beide Wurzeln positiv sind, so hat man nach der im §. 390. C. entwickelten Form (4), und da $a=a-2b$ und $b=3a-4b$ ist:

$$x^2-[(a-2b)+(3a-4b)]x+(a-2b)(3a-4b)=0, \text{ oder}$$
$$x^2-(4a-6b)x+3a^2-10ab+8b^2=0.$$

β) Da hier $a=(+\sqrt{-1})$ und $b=(-\sqrt{-1})$, also die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat, so ist sie von der Form

$$x^2+n=0, \text{ oder } x^2\pm0x+n=0;$$

folglich heißt die Gleichung $x^2+1=0$.

157. α) Hier ist $a=ab\sqrt{a:b}$ und $b=-ab\sqrt{a:b}$; demnach ist

$$x^2-[ab\sqrt{a:b}-ab\sqrt{a:b}]x-[ab\sqrt{a:b}\times ab\sqrt{a:b}]=0,$$
oder: $x^2-0x-a^3b=0$, oder $x^2-a^3b=0$.

β) Wenn in dem aus der Gleichung $x^2\pm px+q=0$ erhaltenen Wert für

$$x=\mp\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

$\frac{1}{4}p^2=q$ ist, so wird $\frac{1}{4}p^2-q=0$ und die beiden Werte für x sind einander gleich oder reduzieren sich auf den einzigen Wert $(\mp\frac{1}{2}p)$. Substituiert man $\frac{1}{4}p^2$ für q in die obige Gleichung, so wird $x^2\pm pq=-\frac{1}{4}p^2$, oder $(x\pm\frac{1}{2}p)^2=0$.

Nimmt man q=0, so reduzieren sich die beiden Wurzeln auf $x=-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p$, oder x=0 und auf $x=-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}p$, oder

$x=-p$. Die Gleichung ist alsdann von der Form $x^2+px=0$ oder $x(x+p)=0$, worin man sowohl $x=0$, als auch $x+p=0$ setzen kann, woraus folgt, daß $x=-p$ ist.

Sucht man also eine Gleichung, worin beide Wurzeln der Zahl 13 gleich sind, so werden die beiden Faktoren $(x-13)(x-13)$ sein und die Gleichung selbst also heißen:

$$(x-13)(x-13)=0, \text{ oder } x^2-26x-169=0.$$

158. Hier hat man ebenfalls, da die Wurzeln einander gleich sind, also $a=b=a+b\pm c\sqrt{-1}$ entweder

$$[x-(a+b+c\sqrt{-1})][x-(a+b-c\sqrt{-1})]=0, \text{ oder}$$

$$x^2-x[a+b-c\sqrt{-1}+a+b+c\sqrt{-1}]+$$
$$(a+b-c\sqrt{-1})(a+b+c\sqrt{-1})=0.$$

Entwickelt man beide Formen, so hat man:

$$x^2-2(a+b)x+(a+b)^2+c^2=0.$$

159. α) Löst man diese Gleichung auf, so findet man, daß eine Wurzel derselben $\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ ist; folglich ist die Gleichung durch $x-(\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q})$ teilbar. Nimmt man diese Teilung wirklich vor, so erhält man als Quotienten $x-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$; folglich heißen die beiden Faktoren:

$$[x-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}][x-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}].$$

β) Bestimmen wir aus dem Koeffizienten des zweiten Gliedes und dem Absolutglied nach §. 390. C. ζ) die beiden Wurzeln dieser Gleichung, indem wir in die dort gefundenen Werte für x_1 und x_2 $a=6$, $b=8\frac{7}{16}$ einsetzen. Wir erhalten dann:

$$x_1=\tfrac{1}{2}(6+\sqrt{6^2-4\,.\,8\tfrac{7}{16}})=\tfrac{1}{2}(6+\tfrac{3}{2})=3\tfrac{3}{4},$$
$$x_2=\tfrac{1}{2}(6-\sqrt{6^2-4\,.\,8\tfrac{7}{16}})=\tfrac{1}{2}(6-\tfrac{3}{2})=2\tfrac{1}{4}.$$

Demnach besteht die Gleichung aus dem Produkte der beiden binomischen Faktoren $x-3\frac{3}{4}$ und $x-2\frac{1}{4}$, so daß also

$$(x-3\tfrac{3}{4})(x-2\tfrac{1}{4})=0.$$

γ) Verfährt man hier ebenso, so erhält man:

$$(x-4\tfrac{1}{2})(x+3\tfrac{1}{2})=0.$$

Zerlegt man die hier angegebenen Beispiele in ihre Faktoren, so ist:

27. $(x-1)(x+7)=0$. 28. $(x-2)(x-6)=0$.
29. $(x+3)(x+7)=0$. 34. $(x-2)(x+12)=0$.
35. $(x+2)(x-12)=0$. 36. $(x+4)(x+6)=0$.
37. $(x-4)(x-6)=0$. 40. $(x-30)(x+4)=0$.
41. $(x+6)(x+20)=0$.

160. Bezeichnet man die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^2+ax+b=0$$

mit α und β, so ist für jeden Wert von x

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Nun sei γ eine zwischen α und β liegende Größe, d. h. so beschaffen, daß $\gamma >$ oder $< \alpha$, aber $<$ oder $> \beta$ ist, so

folgt daraus, daß $\gamma-\alpha >$ oder < 0, $\gamma-\beta <$ oder > 0. Hieraus ergiebt sich aber, daß die beiden Faktoren $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ entgegengesetzte Zeichen haben, weshalb ihr Produkt $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ negativ ist. Daher ist auch der Ausdruck $\gamma^2+a\gamma+b$ negativ. Wenn dagegen zu gleicher Zeit $\gamma >$ oder $< \alpha$ und auch $\gamma >$ oder $< \beta$ genommen wird, woraus $\gamma-\alpha >$ oder < 0 und $\gamma-\beta >$ oder < 0 folgt, so haben die beiden Faktoren einerlei Zeichen. Folglich ist auch ihr Produkt $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ positiv, und mithin ist der Ausdruck $\gamma^2+a\gamma+b$ ebenfalls positiv.

Hieraus ergiebt sich Folgendes. Setzt man in ein Trinom des zweiten Grades gleich Null eine beliebige Zahl, und liefert diese Gleichung zwei reelle und ungleiche Wurzeln, so giebt jede zwischen den beiden Wurzeln liegende, für x in das Trinom substituierte positive oder negative Zahl notwendig ein negatives Resultat; dagegen jede nicht zwischen den beiden Wurzeln liegende und für x substituierte Zahl ein positives Resultat.

Setzt man also in jeder quadratischen Gleichung für x einen Wert, der nicht Wurzel der Gleichung ist, so wird kein Faktor, also auch nicht das Produkt Null werden. Substituiert man in der Gleichung $x^2-18x+77=0$ für x einen Wert, der zwischen den beiden Wurzelwerten liegt, so wird das Trinom $x^2-18x+77$ negativ. Da nun in der Gleichung $x^2-18x+77=0$ die beiden Wurzeln 11 und 7 sind, so wird das fragliche Trinom für alle Werte von x, die < 11 und > 7 sind, negativ werden; dagegen positiv, wenn der für x substituierte Wert $>$ oder < 11 und $>$ oder < 7 genommen wird.

161. α) Setzt man in den gegebenen Ausdruck für x die Werte $(-\frac{4}{3})$ und $(-\frac{7}{4})$, so wird das Trinom $x^2+3\frac{1}{12}x+2\frac{1}{3}$ zu Null. Nimmt man hingegen für x einen Wert an, der zwischen $(-\frac{4}{3})$ und $(-\frac{7}{4})$ liegt, der also $>(-\frac{4}{3})$ oder $<(-\frac{7}{4})$ ist, so wird der fragliche Ausdruck negativ, denn alsdann ist offenbar $x^2+2\frac{1}{3} < 3\frac{1}{12}x$. Nimmt man hingegen einen Wert für x an, der $<(-\frac{4}{3})$, oder $>(-\frac{7}{4})$, so wird auf diese Weise der gegebene Ausdruck eine positive Größe zum Resultate geben, weil alsdann $x^2+2\frac{1}{3} > 3\frac{1}{12}x$ wird.

β) Setzt man in der Gleichung $x^2-mx+n=0$ für den Fall, daß $n=\frac{1}{4}m^2$, für x einen beliebigen Wert, so wird x^2-mx+n immer positiv werden. Denn alsdann wird

$$x^2-mx+n=x^2-mx+\tfrac{1}{4}m^2=(x-\tfrac{1}{2}m)^2,$$

also ein vollständiges Quadrat, worin immer $x^2+\frac{1}{4}m^2 > mx$. Da nun in dem Trinom $x^2-5x+6\frac{1}{4}$ das absolute Glied $6\frac{1}{4}=(\frac{5}{2})^2$, so wird dasselbe für jeden beliebig in ganzen oder

gebrochenen Zahlen für x angenommenen Wert immer eine positive Zahl als Resultat geben, weil immer $x^2+6\frac{1}{4}>5x$.

162. Da der Koeffizient des zweiten Gliedes nach §. 390 die Summe der beiden Wurzeln mit verändertem Zeichen ist, so ist, wenn die erste Wurzel $=1{,}11111$, die zweite Wurzel in der angegebenen Gleichung

$$4{,}2527-1{,}11111=3{,}14159.$$

163. Das absolute Glied jeder Gleichung besteht aus dem Produkte der beiden Wurzeln. Heißt nun das Absolutglied einer Gleichung $975406\frac{5}{66}$ und die eine Wurzel derselben $=-1234\frac{5}{6}$, so ist die andere

$$(-975406\tfrac{5}{66}):(-1234\tfrac{5}{6})=+789\tfrac{10}{11}.$$

164. Heißt in der angegebenen Gleichung die eine Wurzel $4p-5q+6r$, so ist die andere Wurzel, da die Summe derselben $5p-7q+9r$ beträgt,

$$5p-7q+9r-(4p-5q+6r)=p-2q+3r,$$

oder, wenn das absolute Glied

$$4p^2+18pr-13pq+10q^2-27qr+18r^2 \text{ beträgt,}$$

so ist die andere Wurzel:

$$\frac{4p^2+18pr-13pq+10q^2-27qr+18r^2}{4p-5q+6r}=$$

$$\frac{(p-2q+3r)(4p-5q+6r)}{4p-5q+6r}=p-2q+3r.$$

165. Addiert man die beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man: $2x^2-1158x=0$, oder $2x^2=1158x$.

Dividiert man diese Gleichung durch $2x$, so hat man: $x=579$ diejenige Wurzel, die in beiden Gleichungen gleich und positiv ist; daher ist die andere Wurzel bei der ersten Gleichung $78165:579=135$ und bei der zweiten Gleichung $(-78165):579=-135$.

e) Trigonometrische Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade (166—182).

§. 395. 166. Ist die quadratische Gleichung von der Form $x^2+px=q$, so erhält man durch Auflösung:

$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2=q+\frac{p^2}{4}=\left(1+\frac{p^2}{4q}\right)q, \text{ woraus}$$

$$x_1=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{q}\,.\sqrt{1+\frac{p^2}{4q}} \text{ und}$$

$$x_2=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q}\,.\sqrt{1+\frac{p^2}{4q}}\,.$$

Ferner ergiebt die Gleichung $x^2-px=q$,

$$x_1 = \tfrac{1}{2}p + \sqrt{q} \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2}{4q}}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}p - \sqrt{q} \cdot \sqrt{1 + \frac{p^2}{4q}}.$$

Setzt man nun $\alpha)\ \frac{2\sqrt{q}}{p} = \operatorname{tang}\lambda$, so ist auch $\beta)\ \frac{4q}{p^2} = (\operatorname{tang}\lambda)^2$, woraus folgt $\gamma)\ \frac{p^2}{4q} = \frac{1}{(\operatorname{tang}\lambda)^2}$. Aus $\alpha)$ ergiebt sich auch, daß $\delta)\ \tfrac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tang}\lambda} = \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}$ und da $\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda} = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}$, so ist auch $\varepsilon)\ \tfrac{1}{2}p = \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}$.

Wird der unter $\gamma)$ für $\frac{p^2}{4q}$ gefundene Wert in den Ausdruck $\sqrt{1+\frac{p^2}{4q}}$ substituiert, so ergiebt sich:

$$\sqrt{1+\frac{p^2}{4q}} = \sqrt{1+\frac{1}{(\operatorname{tang}\lambda)^2}} = \sqrt{\frac{1+(\operatorname{tang})\lambda^2}{(\operatorname{tang}\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{1+(\operatorname{tang}\lambda)^2}}{\operatorname{tang}\lambda}.$$

Nun ist $\frac{\sqrt{1+(\operatorname{tang}\lambda)^2}}{\operatorname{tang}\lambda} = \frac{1}{\sin\lambda}$; also ist auch $\xi)\ \sqrt{1+\frac{p^2}{4q}} = \frac{1}{\sin\lambda}$.

Setzt man nun die für $\tfrac{1}{2}p$ und $\sqrt{1+\frac{p^2}{pq}}$ unter $\varepsilon)$ und $\xi)$ gefundenen Werte in die Formeln für x, so hat man:

1) $x_1 = -\sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} + \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \cdot \left(\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda}\right) = \sqrt{q} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda.$

$x_2 = -\sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} - \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \cdot \left(\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda}\right) = -\sqrt{q} \cdot \cot\tfrac{1}{2}\lambda.$

2) $x_1 = \sqrt{q}\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} + \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \cdot \left(\frac{1+\cos\lambda}{\sin\lambda}\right) = \sqrt{q} \cdot \cot\tfrac{1}{2}\lambda.$

$x_2 = \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} - \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \cdot \left(\frac{1-\cos\lambda}{\sin\lambda}\right) = -\sqrt{q} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda.$

Vergleicht man die hier gefundenen Wurzeln dieser beiden Gleichungen, so stellt sich heraus, daß dieselben für beide Gleichungen identisch sind, nur muß man die Wurzeln der zweiten Gleichung mit dem entgegengesetzten Zeichen nehmen. Dasselbe gilt auch von den Resultaten der Aufgabe 167.

Zweite Auflösung. Man kann die aus den beiden Gleichungen resultierenden Werte für x auch auf folgende Weise umformen:

$$(1)\ x_1 = \tfrac{1}{2}p\left\{-1+\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}\right\};$$

$$(2)\quad x_2=\tfrac{1}{2}p\left\{-1+\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}\right\};$$

$$(1)\quad x_1=\tfrac{1}{2}p\left\{\ 1+\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}\right\};$$

$$(2)\quad x_2=\tfrac{1}{2}p\left\{\ 1-\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}\right\}.$$

Setzt man den in der vorigen Auflösung unter β) für $\frac{4q}{p^2}$ gefundenen Wert hier ein, so hat man:

$$-1+\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}=-1+\sqrt{(\operatorname{tang}\lambda)^2+1}=-1+\sec\lambda=\frac{1-\cos\lambda}{\cos\lambda};$$

$$-1-\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}=-1-\sqrt{(\operatorname{tang}\lambda)^2+1}=-1-\sec\lambda=-\frac{1+\cos\lambda}{\cos\lambda};$$

$$1+\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}=1+\sqrt{(\operatorname{tang}\lambda)^2+1}=1+\sec\lambda=\frac{1+\cos\lambda}{\cos\lambda};$$

$$1-\sqrt{\frac{4q}{p^2}+1}=1-\sqrt{(\operatorname{tang}\lambda)^2+1}=1-\sec\lambda=\frac{1-\cos\lambda}{\cos\lambda}.$$

Hiernach hat man:

$$(1)\quad x_1=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\cdot\frac{1-\cos\lambda}{\cos\lambda}=\sqrt{q}\cdot\frac{2(\sin\frac{1}{2}\lambda)^2}{\sin\lambda}=\sqrt{q}\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\cdot\left(-\frac{1+\cos\lambda}{\cos\lambda}\right)=-\sqrt{q}\cdot\frac{2(\cos\frac{1}{2}\lambda)^2}{\sin\lambda}=-\sqrt{q}\,.\cot\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$(2)\quad x_1=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\cdot\frac{1+\cos\lambda}{\cos\lambda}=\sqrt{q}\,.\cot\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\cdot\left(-\frac{1-\cos\lambda}{\cos\lambda}\right)=-\sqrt{q}\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

167. α) Aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2+px=-q \text{ und } x^2-px=-q$$

ergeben sich folgende Werte für x

$$(1)\quad x_1=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4q}-1};\ x_2=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4q}-1};$$

$$(2)\quad x_1=\tfrac{1}{2}p+\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4q}-1};\ x_2=\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{4q}-1}.$$

Bei der Auflösung dieser Werte für x wird vorausgesetzt, daß

$$p^2>4q,\ \text{also auch}\ \frac{p^2}{4q}>1\ \text{ist.}$$

Setzt man nun α) $\frac{2\sqrt{q}}{p}=\sin\lambda$, so ist β) $\frac{4q}{p^2}=(\sin\lambda)^2$

und hieraus ergiebt sich: γ) $\frac{p^2}{4q}=\frac{1}{(\sin\lambda)^2}$.

Aus α) folgt auch, daß $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda}$.

Setzt man die für $\frac{p^2}{4q}$ gefundenen Werte in $\sqrt{\frac{p^2}{4q} - 1}$ ein, so hat man:

$$\sqrt{\frac{p^2}{4q} - 1} = \sqrt{\frac{1}{(\sin\lambda)^2} - 1} = \sqrt{\frac{1 - (\sin\lambda)^2}{(\sin\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{1 - (\sin\lambda)^2}}{\sin\lambda}.$$

Nun ist $\sqrt{1 - (\sin\lambda)^2} = \cos\lambda$; also ist:

$$\sqrt{\frac{p^2}{4q} - 1} = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda}.$$

Setzt man die für $\frac{1}{2}p$ und $\sqrt{\frac{p^2}{4q} - 1}$ gefundenen Ausdrücke in die Werte für x, so hat man:

$$(1)\ x_1 = -\sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} + \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \cdot \frac{1 - \cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \,.\, \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$(2)\ x_2 = -\sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} - \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \cdot \frac{1 + \cos\lambda}{\sin\lambda} = -\sqrt{q} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$(1)\ x_1 = \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} + \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \cdot \frac{1 + \cos\lambda}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$(2)\ x_2 = \sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sin\lambda} - \sqrt{q} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} = \sqrt{q} \cdot \frac{1 - \cos\lambda}{\sin\lambda} = q \,.\, \mathrm{tang}\, \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Zweite Auflösung. Die aus den beiden Gleichungen $x^2 \pm px = -q$ gefundenen Werte für x können auch auf folgende Weise umgeformt werden:

$$1)\ x_1 = \tfrac{1}{2}p \left\{ -1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right\} \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}p \left\{ -1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right\} \qquad \text{Hier ist } \frac{4q}{p^2} = (\sin\lambda)^2.$$

$$2)\ x_1 = \tfrac{1}{2}p \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right\} \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}p \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right\} \qquad \text{Hier ist } \frac{4q}{p^2} = (\sin\lambda)^2.$$

Es ist demnach:

$$-1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = -1 + \sqrt{1 - (\sin\lambda)^2} = -1 + \cos\lambda = -(1 - \cos\lambda);$$

$$-1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = -1 - \sqrt{1 - (\sin\lambda)^2} = -1 - \cos\lambda = -(1 + \cos\lambda);$$

$$1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = 1 + \sqrt{1 - (\sin\lambda)^2} = 1 + \cos\lambda = (1 + \cos\lambda);$$

$$1-\sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}=1-\sqrt{1-(\sin\lambda)^2}=1-\cos\lambda=(1-\cos\lambda);$$

folglich ist:

$$1)\ x_1=-\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\sin\lambda}\cdot(1-\cos\lambda)=-\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2=-\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\sin\lambda}\cdot(1+\cos\lambda)=-\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cot}\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$2)\ x_1=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\sin\lambda}\cdot(1+\cos\lambda)=\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cot}\tfrac{1}{2}\lambda;$$

$$x_2=\sqrt{q}\cdot\frac{1}{\sin\lambda}\cdot(1-\cos\lambda)=\sqrt{q}\,.\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

β) siehe Beisp. 181 und 182.

168. Die hier gegebene Gleichung ist von der Form $x^2+px=q$. und demnach ist: $x_1=\sqrt{p}\,.\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\lambda$ und $x_2=-\sqrt{q}\,.\,\mathrm{cot}\,\tfrac{1}{2}\lambda$.

Setzt man nun $p=1{,}1102$ und $q=3{,}3594$, so ist, da $\frac{2\sqrt{q}}{p}=\mathrm{tang}\,\lambda$ oder $\frac{2\sqrt{3{,}3594}}{1{,}1102}=\mathrm{tang}\,\lambda$, vermittels Logarithmen:

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{tang}\,\lambda&=\log 2+\tfrac{1}{2}\log 3{,}3594-\log 1{,}1102\\
&=0{,}3010300+0{,}2631308-0{,}0454012\\
&=0{,}5187596\\
\lambda&=73^0 9'2{,}1''\ \text{also}\\
\tfrac{1}{2}\lambda&=36^0 34'3{,}1''\\
\log\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\lambda&=9{,}8704019-10\\
\log\sqrt{q}&=0{,}2631308;\ \text{folglich}\\
\log x&=0{,}1335327\\
x_1&=\mathrm{num}\log 0{,}1335327=1{,}35998.
\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{cot}\,\tfrac{1}{2}\lambda&=0{,}1295983\\
\log\sqrt{q}&=0{,}2631308.\ \text{Es ist also}\\
\log(-x_2)&=0{,}3927291\\
-x_2&=\mathrm{num}\log 0{,}3927291=2{,}47018;\ \text{folglich}\\
x_2&=-2{,}47018.
\end{aligned}$$

169. Die hier gegebene Gleichung ist von derselben Form, wie die vorhergehende; daher hat x auch dieselben Werte. Setzt man nun $p=0{,}42331$ und $q=8{,}53972$, so hat man:

$$\mathrm{tang}\,\lambda=\frac{2\sqrt{q}}{p}=\frac{2\sqrt{8{,}53972}}{0{,}42331}\ \text{oder}$$

$$\begin{aligned}
\log\mathrm{tang}\,\lambda&=\log 2+\tfrac{1}{2}\log 8{,}53972-\log 0{,}42331\\
&=0{,}3010300+0{,}4657218-(-0{,}3733415)\\
&=1{,}1400933;\ \text{folglich}\\
\lambda&=85^0 51'26{,}7'';\ \text{also}\\
\tfrac{1}{2}\lambda&=42^0 55'43{,}35''.\ \ \text{Nun ist}
\end{aligned}$$

$\log \text{tang}\frac{1}{2}\lambda = 9{,}9685723 - 10$
$\log \sqrt{q} = 0{,}4657218$
Also $\log x_1 = 0{,}4342941$;
folglich $x_1 = \text{num} \log 0{,}4342941 = 2{,}71828$.
Ferner ist:
$\log \cot \frac{1}{2}\lambda = 0{,}0314271$
$\log \sqrt{q} = 0{,}4657218$
also $\log(-x_2) = 0{,}4971489$;
$(-x_2) = \text{num} \log 0{,}4971489 = 3{,}14159$,
also $x_2 = -3{,}14159$.

170. α) Nachdem man die hier gegebene Gleichung geordnet, findet man, daß sie von der Form $x^2 + px = -q$ ist, und demnach ist

$$x_1 = -\sqrt{q} \,.\, \text{tang} \tfrac{1}{2}\lambda; \quad x_2 = -\sqrt{q} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\lambda.$$

Setzt man hier $p = 9{,}125571$ und $q = 9{,}74192654$, so ist

$$\sin \lambda = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{9{,}74192654}}{9{,}125571} \text{ oder}$$

$\log \sin \lambda = \log 2 + \frac{1}{2} \log 9{,}74192654 - \log 9{,}125571$
$= 0{,}3010300 + 0{,}4943224 - 0{,}9602601$
$= 0{,}7953524 - 0{,}9602601$
$= 9{,}8350923 - 10$; also
$\lambda = 43^0 9' 41{,}4''$
$\frac{1}{2}\lambda = 21^0 34' 50{,}7''$; also
$\log \frac{1}{2}\lambda = 9{,}5971902 - 10$
$\log \sqrt{q} = 0{,}4943224$
$\log(-x_1) = 0{,}0915139$; also
$-x_1 = \text{num} \log 0{,}0915126 = 1{,}23456$; folglich
$x_1 = -1{,}23456$
Ferner ist
$\log \cot \frac{1}{2}\lambda = 0{,}4028102$
$\log \sqrt{q} = 0{,}4943224$
$\log(-x_2) = 0{,}8971326$; also
$-x_2 = \text{num} \log 0{,}8971326 = 7{,}891011$; folglich
$x_2 = -7{,}891011$.

170. β) Die hier angegebene Gleichung ist von der Form

$$x^2 - px = -q, \text{ und es ist}$$
$$p = 10{,}83945 \text{ und } q = 26{,}991104.$$

Setzt man nun $\sin \lambda = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$x_1 = \cot\frac{1}{2}\lambda\sqrt{q}$ und $x_2 = \text{tang}\,\frac{1}{2}\lambda\sqrt{q}$. Nun ist
$\log \sin \lambda = \log 2 + \frac{1}{2} \log 26{,}991104 - \log 10{,}83945$
$= 0{,}3010300 + 0{,}7156103 - 1{,}0350072$
$= 1{,}0166403 - 1{,}0350072$
$= 9{,}9816331 - 10$

$\lambda = 73^0 27' 13{,}8''$
$\frac{1}{2}\lambda = 36^0 43' 36{,}9''$
$\log \cot \frac{1}{2}\lambda = 0{,}1271983$
$\log \sqrt{q} = 0{,}7156103$
$\log x_1 = 0{,}8428086$; also
$x_1 = \text{num} \log 0{,}8428086 = 6{,}9632.$

Ferner ist:
$\log \text{tang} \frac{1}{2}\lambda = 9{,}8727822 - 10$
$\log \sqrt{q} = 0{,}7156103$
$\log x_2 = 0{,}5883925$
$x_2 = \text{num} \log 0{,}5883925 = 3{,}87625$

171. Ordnet man diese Gleichung und dividiert sie durch den Koeffizienten von x^2, so erhält man:

$$x^2 - \frac{33{,}81507}{7{,}3527} x = \frac{148{,}87107}{7{,}3527}.$$

Diese Gleichung ist also von der Form $x^2 - px = q$ und

$$p = \frac{33{,}81507}{7{,}3527} \text{ und } q = \frac{148{,}87107}{7{,}3527}.$$

Nun ist: $\text{tang} \lambda = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{148{,}87107 : 7{,}3527}}{33{,}81507 : 7{,}3527}.$

$\log \text{tang} \lambda = \log 2 + \frac{1}{2} (\log 148{,}87107 - \log 7{,}3527)$
$- (\log 33{,}81507 - \log 7{,}3527)$
$= 0{,}3010300 + \frac{1}{2}(2{,}1728103 - 0{,}8664468)$
$- (1{,}5291103 - 0{,}8664468)$
$= 1{,}8206585 - 1{,}5291103$
$= 0{,}2915482$
$\lambda = 62^0 55' 52{,}9''$
$\frac{1}{2}\lambda = 31^0 27' 56{,}4''$; also
$\log \cot \frac{1}{2}\lambda = 0{,}2132651$
$\log \sqrt{q} = 0{,}6531817$
$\log x_1 = 0{,}8664468$
$x_1 = \text{num} \log 0{,}8664486 = 7{,}35270.$ Ferner ist:
$\log \text{tang} \frac{1}{2}\lambda = 9{,}7867349 - 10$
$\log \sqrt{q} = 0{,}6531817$
$\log (-x_2) = 0{,}4399166$
$-x_2 = \text{num} \log 0{,}4399166 = 2{,}75370,$
folglich $x_2 = -2{,}7537.$

172. Diese Gleichung ist von der Form
$x^2 - px = -q$ und es ist
$p = 1{,}2345 \times 1{,}54994$ und $q = 1{,}2345 \times 0{,}6789.$

Nun ist $\sin \lambda = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{1{,}2345 \times 0{,}6789}}{1{,}2345 \times 1{,}54994}$ oder

$\log \sin \lambda = \log 2 + \frac{1}{2}(\log 1{,}2345 + \log 0{,}6789.$

$$-(\log 1{,}2345+\log 1{,}54994)$$
$$=0{,}3010300+\tfrac{1}{2}[0{,}0914911+(-0{,}1681942)]$$
$$-(0{,}0914911+0{,}1903148)$$
$$=9{,}9808726-10$$
$$\lambda=73^0 7'10{,}56''$$
$\frac{1}{2}\lambda=26^0 33'35{,}28''$, also

$$\log\cot\tfrac{1}{2}\lambda=0{,}1298435$$
$$\log\sqrt{q}=-0{,}0383515$$
$\log x_1=0{,}0914920$; also

$x_1=\text{num}\log 0{,}0914920=1{,}2345$. Ferner ist:

$$\log\tan g\tfrac{1}{2}\lambda=9{,}8701565-10$$
$$\log\sqrt{q}=-0{,}0383515$$
$$\log x_2=0{,}8318050-1$$
$$x_2=\text{num}\log 0{,}8318050-1=6{,}789:10=0{,}6789.$$

173. Entwickelt man die Quadrate dieser Gleichung und ordnet sie, so erhält man:

$$x^2(m^2+n^2)+2x(am+dn)=c^2-a^2-d^2.$$

Nun soll $c^2-a^2-d^2=p^2$ sein. Setzt man diesen Wert in die Gleichung und dividiert sie durch m^2+n^2, so ist:

$$x^2+2x\frac{am+dn}{m^2+n^2}=\frac{p^2}{m^2+n^2};$$ woraus

$$x=-\frac{am+dn}{m^2+n^2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{m^2+n^2}+\left(\frac{am+dn}{m^2+n^2}\right)^2}$$
$$=-\frac{am+dn}{m^2+n^2}\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{(am+dn)^2}{p^2(m^2+n^2)}}$$
$$=\frac{p}{n}\left\{-\frac{amn+dn^2}{p(m^2+n^2)}\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{(am+dn)^2}{p^2(m^2+n^2)}}\right\}.$$

Nach der Annahme soll nun $\frac{n}{m}=\tan g\,\alpha$ sein; also ist: $\left(\frac{n}{m}\right)^2=(\tan g\,\alpha)^2$. Da $\sin\alpha=\frac{\tan g\,\alpha}{\sqrt{1+(\tan g\,\alpha)^2}}$, so folgt hieraus, daß

$$(1)\quad \sin\alpha=\frac{\frac{n}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Da $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+(\tan g\,\alpha)^2}}$, so ist:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, daß

$$(2)\ a\cos\alpha+d\sin\alpha=\frac{am}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{dn}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{am+dn}{\sqrt{m^2+n^2}}=q.$$

Nun kann man die Gleichung für x auch in folgender Form darstellen:

$$x=\frac{p}{n}\left\{-\frac{am+dn}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot\frac{n}{p\sqrt{m^2+n^2}}\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\times\sqrt{1+\frac{(am+dn)^2}{m^2+n^2}\cdot\frac{1}{p_8}}\right\}.$$

Substituiert man die unter (1) und (2) gefundenen Werte in diese Gleichung, so ist:

$$x=\frac{p}{n}\left\{-q\frac{\sin\alpha}{p}\pm\sin\alpha\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}}\right\},\ \text{oder}=\frac{p}{n}\sin\alpha\left\{-\frac{q}{p}\pm\sqrt{1+\frac{q^2}{p^2}}\right\}.$$

Nach der Annahme soll nun $\frac{p}{q}=\operatorname{tang}\beta$ sein, folglich ist $\frac{q}{p}=\frac{1}{\operatorname{tang}\beta}=\cot\beta$; demnach ist:

$$x=\frac{p}{n}\sin\alpha\left\{-\cot\beta\pm\sqrt{1+(\cot\beta)^2}\right\}=\frac{p}{n}\sin\alpha\left\{-\cot\beta\pm\frac{1}{\sin\beta}\right\}.$$

Nun ist $\cot\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$. Diesen Wert für $\cot\beta$ eingesetzt, giebt, wenn (+) gilt:

$$x_1=\frac{p}{n}\sin\alpha\left\{-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta}\right\}=\frac{p}{n}\sin\alpha\left(\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\frac{p}{n}\sin\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta.$$

und wenn (—) gilt:

$$x_2=\frac{p}{n}\sin\alpha\left\{-\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\right\}=-\frac{p}{n}\sin\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta.$$

174. Entwickelt man in der hier gegebenen Gleichung die Quadrate, ordnet sie hiernach und dividiert sie durch den Koeffizienten von x^2, so hat man:

$$x^2+\frac{8227816{,}72}{6797482{,}28}x=\frac{768966{,}3}{6797482{,}28}.$$

Mit Bezug auf die vorhergehende Gleichung hat man hier: $n=111{,}8$; $m=2604{,}8$; $p^2=768966{,}3$; also $p=876{,}907$; $a=1605{,}8$; $d=-616{,}1$. Nun ist:

$$\sin\alpha=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{111{,}8}{\sqrt{2604{,}8^2+111{,}8^2}}=\frac{111{,}8}{2607{,}198}.$$

Vermittels Logarithmen hat man hier:

$$\log\sin\alpha=\log 111{,}8-\log 2607{,}198$$
$$=2{,}0484418-3{,}4161739$$
$$=8{,}6322679-10;\ \text{also}\ \alpha=2^0 27' 27{,}6''.$$

Ferner ist: $q=\frac{am+dn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$$=\frac{1605{,}8\times2604{,}8-111{,}8\times616{,}1}{2607{,}198}=1577{,}904.$$

Ferner ist: $\operatorname{tang}\beta=\frac{p}{q}=\frac{876{,}907}{1577{,}904}$, oder vermittels Log.

$\log\operatorname{tang}\beta=\log 876{,}907-\log 1577{,}904$
$=2{,}9429847-3{,}1980805=9{,}7449042-10;$
also $\beta=29^0 3'50''$; $\frac{1}{2}\beta=14^0 31'55''$.

Nun ist: $x=\frac{p}{n}\sin\alpha\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta$.

Setzt man hierin die gefundenen Werte, so hat man:

$$x=\frac{876{,}907}{111{,}8}\times\frac{118{,}8}{2607{,}198}\times\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta$$

$=\frac{876{,}907}{2607{,}198}\times\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta$, oder vermittels Log.

$\log x=\log 876{,}907-\log 2607{,}198+\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta$
$=2{,}9429847-3{,}4161739=0{,}4136559-1$
$=-1{,}0595333=0{,}9404667-2$; also

$$x_1=\operatorname{num}\log 0{,}9404667-2=\frac{8{,}719}{100}=0{,}08719.$$

Nun ist ferner $\log\cot\frac{1}{2}\beta=0{,}5863441$; es ist also

$x_2=-\frac{p}{n}\sin\alpha\cot\frac{1}{2}\beta$; daher:

$\log(-x_2)=2{,}9429847-3{,}4161739+$
$0{,}5863441=0{,}1131549$: also
$(-x_2)=\operatorname{num}\log 0{,}1131549=1{,}2976;$
folglich $x_2=-1{,}2976$.

175. Nach §. 390. C. ist in jeder quadratischen Gleichung der Koeffizient des zweiten Gliedes die Summe und das Absolutglied das Produkt der Wurzeln. Hiernach ist also m die Summe und n das Produkt der Wurzeln der gegebenen Gleichung. Nun setze man die eine Wurzel $=\operatorname{tang}\varphi$ und die andere $=\operatorname{tang}\varphi'$. Dies ist stets gestattet, wenn die Wurzeln mögliche Ausdrücke, also nicht imaginär sind. Wenn dies der Fall ist, so kann diese Auflösungsart nicht angewandt werden. Denn wenn wir $\varphi=0$ setzen, so ist $\operatorname{tang}\varphi=0$, und wenn wir φ von 0 bis 90^0 wachsen lassen, so wächst $\operatorname{tang}\varphi$ von 0 bis $+\infty$, aber stetig, und wenn irgend eine Zahl, die zwischen 0 und $+\infty$ liegt, also positiv ist, gegeben ist, so läßt sich zwischen 0 und 90^0 ein Winkel finden, dessen Tangente dieser Zahl gleich ist. Läßt man den Winkel von 90^0 bis 180^0 wachsen, so wächst auch die Tangente von $-\infty$ bis 0, und es läßt sich also auch zu jeder negativen Zahl ein Winkel finden, dessen Tangente ihr gleich sei. Da nun die beiden Wurzeln der Gleichung völlig bestimmte Größen sind, so müssen sich, dieselben mögen positiv oder

negativ, so groß oder so klein wie immer sein, zwei Winkel φ und φ', die also zwischen 0 und 180° liegen, finden lassen, deren trigonometrische Tangenten diesen Wurzeln gleich sind. Sonach kann man also die beiden gesuchten Wurzeln mit $\tan \varphi$ und $\tan \varphi'$ bezeichnen. Wären dieselben bekannt, so würde sich φ und φ' durch bloßes Aufschlagen in den Tafeln finden lassen; könnte man aber φ und φ' auf anderm Wege finden, so würden sich ebenso $\tan \varphi$ und $\tan \varphi'$ aufschlagen lassen und also die Wurzeln gefunden sein. Zweck der Aufgabe ist also die Bestimmung von φ und φ'.

Sollen demnach $\tan \varphi$ und $\tan \varphi'$ die Wurzel der Gleichung sein, so ist

$$\tan \varphi + \tan \varphi' = m; \quad \tan \varphi \,.\, \tan{}' = n.$$

Nun ist $\tan(\varphi+\varphi') = \dfrac{\tan \varphi + \tan \varphi'}{1 - \tan \varphi \,.\, \tan \varphi'}$;

folglich hat man, wenn die vorstehenden Werte für $\tan \varphi + \tan \varphi'$ und $\tan \varphi \,.\, \tan \varphi'$ in diesen Quotient eingesetzt werden:

$$\tan(\varphi+\varphi') = \frac{m}{1-n}.$$

Aus dieser Gleichung kann also $\tan(\varphi+\varphi')$ und hieraus auch wieder der Winkel $\varphi+\varphi'$ gefunden werden. Könnte man nun noch den Winkel $\varphi-\varphi'$ finden, so wären auch φ und φ' einzeln bekannt. Hierzu gelangen wir, indem wir $\cos(\varphi-\varphi')$ entwickeln. Es ist:

$$\cos(\varphi-\varphi') = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' =$$
$$\cos \varphi \cos \varphi' \left(1 + \frac{\sin \varphi \sin \varphi'}{\cos \varphi \cos \varphi'}\right)$$
$$= \cos \varphi \cos \varphi' (1 + \tan \varphi \tan \varphi').$$

Nun hat man aber:

$$\tan \varphi + \tan \varphi' = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'} =$$
$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi'}{\cos \varphi \cos \varphi'} = \frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'}.$$

Also ist: $\tan \varphi + \tan \varphi' = \dfrac{\sin(\varphi+\varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'}$, woraus folgt, daß

$$\cos \varphi \cos \varphi' = \frac{\sin(\varphi+\varphi')}{\tan \varphi + \tan \varphi'}.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel für $\cos(\varphi-\varphi')$, so erhält man:

$$\cos(\varphi-\varphi') = \frac{1 + \tan \varphi \tan \varphi'}{\tan \varphi + \tan \varphi'} \cdot \sin(\varphi+\varphi') \text{ oder}$$

$$\cos(\varphi-\varphi')=\frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi').$$

Da nun $\varphi+\varphi'$ schon oben gefunden wurde, so ist auch $\sin(\varphi+\varphi')$ bekannt, folglich kann auch $\cos(\varphi-\varphi')$ und somit $\varphi-\varphi'$ gefunden werden und hiermit ist die Aufgabe gelöst.

176. In dieser Gleichung ist $m=24{,}691$ und $n=61{,}6$. Zur Auflösung hat man die bei beiden Formeln:

$$1)\ \operatorname{tang}(\varphi+\varphi')=\frac{m}{1-n}.$$

$$2)\ \cos(\varphi-\varphi')=\frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi').$$

Nun ist $\log m=\log 24{,}691=1{,}3925387$.

$n=61{,}6$ also $1-n=1-61{,}6=-60{,}6$. Hier ist also $1-n$ negativ; also $\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')=\frac{m}{1-n}$ auch negativ; $\varphi+\varphi'$ liegt demnach zwischen 90^0 und 180^0. Da $\frac{m}{1-n}$ eine negative Zahl ist, so kann man ihren Logarithmus nicht nehmen. Nimmt man aber von der positiven Zahl, also $\frac{m}{n-1}$ den Logarithmus, so hat man den Logarithmus der Tangente von $180^0-(\varphi+\varphi')$; denn Supplementwinkel haben gleiche, aber entgegengesetzte Tangenten. Es ist also:

$n-1=60{,}6$; $\log(n-1)=\log 60{,}6=1{,}7824726$;

$\log\left(\frac{m}{1-n}\right)=\log m-\log(n-1)=1{,}3925387-1{,}7824726$ $=0{,}6100661-1$; also ist $\log\operatorname{tang}[180^0-(\varphi+\varphi')]=$ $0{,}6100661-1$; folglich $180^0-(\varphi+\varphi')=22^0 10'8''$, mithin $\varphi+\varphi'=157^0 49'55''$.

Ferner ist: $\sin(\varphi+\varphi')=\sin[180^0-(\varphi+\varphi')]=\sin 22^0 10'8''$; also $\log\sin(\varphi+\varphi')=0{,}5767305-1$ und

$\log(1+n)=\log(1+61{,}6)=1{,}7965743$; also ist

$\log[(1+n)\sin(\varphi+\varphi')]=1{,}3733048$;

$\log m=1{,}3925387$; folglich ist:

$\log\left\{\frac{(1+n)\sin(\varphi+\varphi')}{m}\right\}=0{,}9807661-1$; also

$\log\cos(\varphi-\varphi')=0{,}9807661-1$; folglich

$\varphi-\varphi'=16^0 55'59{,}6''$.

Zur Bestimmung von φ und φ' haben wir also folgende Gleichungen:

1) $\varphi+\varphi'=157^0 49'55''$; 2) $\varphi-\varphi'=16^0 55'59{,}6''$, woraus man durch Addition und Subtraktion erhält:

$\varphi=87^0 22'57{,}3''$ und $\varphi'=70^0 26'57{,}7''$.

Hiermit sind die Winkel gefunden. Es ist nun weiter:
$\log \operatorname{tang} \varphi = \log \operatorname{tang} 87^0 22' 57{,}3'' = 1{,}3399475$; folglich:
$\operatorname{tang} \varphi = 21{,}875 = x_1$.
Ferner ist: $\log \operatorname{tang} \varphi' = \log \operatorname{tang} 70^0 26' 57{,}7'' = 0{,}4496327$;
folglich $\operatorname{tang} \varphi' = 2{,}816 = x_2$.

177. Hier ist $m = 2{,}3927$ und $n = -5{,}757312$. Zur Auflösung dienen die beiden in Nr. 175 gefundenen Formeln.

Nun ist $\log m = \log 2{,}3927 = 0{,}3788882$;
$\log (1-n) = \log [1-(-5{,}757312)]$
$= \log 6{,}757312 = 0{,}8297745$;
also $\log \left(\frac{m}{1-n}\right) = \log m - \log (1-n) = 0{,}5491137 - 1$;
es ist demnach $\log \operatorname{tang} [(\varphi + \varphi') - 180^0] = 0{,}5491137 - 1$;
folglich $\varphi + \varphi' - 180^0 = 19^0 29' 54{,}8''$;
$\varphi + \varphi' = 199^0 29' 54{,}8''$;

Ferner ist: $\sin (\varphi + \varphi') = \sin [(\varphi + \varphi') - 180^0]$
$= -\sin 19^0 29' 54' 8''$; also
$\log \sin (\varphi + \varphi') = 9{,}5234643 - 10$;
$\log (-n-1) = \log 4{,}757312 = 0{,}6773616$;
$\log [(n+1 \sin (\varphi + \varphi')] = \log [-(-n-1)(-\sin 19^0$ u. s. w.$]$
$= 0{,}2008259 =$
$\log [(-n-1) \sin 19^0 29' 54{,}8'']$;
$\log m = \log 2{,}3927 = 0{,}7388882$; folglich
$\log \left\{\frac{n+1) \sin (\varphi + \varphi')}{m}\right\} = 0{,}8219377 - 1$;
also ist $\log \cos (\varphi - \varphi') = 0{,}8219377 - 1$;
folglich $\varphi - \varphi' = 48^0 25' 16{,}6''$;
es ist auch $\varphi + \varphi' = 199^0 29' 54{,}8''$;
folglich $\varphi = 123^0 57' 35' 7''$;
$\varphi' = 75^0 32' 19{,}1''$.

Weil nun $\varphi = 123^0 57' 35{,}7''$ und die Tangenten der Winkel im zweiten Quadranten absolut gleich, aber entgegengesetzt sind denen ihrer Supplementwinkel, so ist $\operatorname{tang} \varphi = -\operatorname{tang} (180^0 - \varphi) = -\operatorname{tang} 56^0 2' 24{,}3''$; also $\log \operatorname{tang} \varphi = -0{,}1716680$; daher $\operatorname{tang} \varphi = -1{,}4848 = x_1$.

Ferner ist
$\log \operatorname{tang} \varphi' = \log 75^0 32' 19{,}1'' = 0{,}5885516$; folglich
$\operatorname{tang} \varphi' = 3{,}8775 = x_2$.

178. Setzt man in der hier gegebenen Gleichung $x = -y$, so ist:
$$y^2 - 0{,}43555y - 0{,}2016 = 0.$$
Zur Auflösung hat man:
$$1) \operatorname{tang} (\varphi + \varphi') = \frac{m}{1-n};$$
$$2) \cos (\varphi - \varphi') = \frac{1+n}{m} \sin (\varphi + \varphi').$$

Hier ist m=0,43555 und n=−0,2016.

Nun ist $\log m = \log 0{,}43555 = 0{,}6390380-1$

$\log(1-n) = \log(1+0{,}2016) = 0{,}0797599$

$$\log \operatorname{tang}(\varphi+\varphi') = \log\left(\frac{m}{1-n}\right) = 0{,}5592781-1;\ \text{also}$$

$$\varphi+\varphi' = 19^0 55' 27{,}5''.$$

Ferner ist: $\log\sin(\varphi+\varphi') = 0{,}5324736-1$

$\log(1+n) = \log(1-0{,}2016) = \log 0{,}7984 = 0{,}9022205-1$

$\log[(1+n)\sin(\varphi+\varphi')] = 0{,}4346941-1$

$\log m = 0{,}6390380-1$

$\log\cos(\varphi-\varphi') = 0{,}7956561-1$

$\varphi-\varphi' = 51^0 20' 29{,}8''$;

es ist auch $\varphi+\varphi' = 19^0 55' 27{,}5''$;

folglich $\varphi = 35^0 37' 58{,}6''$ und

$\varphi' = -15^0 42' 31{,}1''$.

Es ist also $\log \operatorname{tang}\varphi = \log 35^0 37' 58{,}6'' = 0{,}8553983-1$;

also $\operatorname{tang}\varphi = \frac{7{,}168}{10} = 0{,}7168$

$\log \operatorname{tang}\varphi' = -\log 15^0 42' 31{,}1'' = -(0{,}4490925-1)$;

$\operatorname{tang}\varphi' = -\frac{2{,}8125}{10} = -0{,}28125.$

Dieses sind die Wurzeln der Gleichung

$y^2-0{,}43555y-0{,}2016=0.$

Um nun die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung zu erhalten, müssen diese Wurzeln negativ genommen werden, da x=−y gesetzt wurde; daher ist:

$x_1=-0{,}7168$ und $x_2=0{,}28125,$

179. Setzt man hier x=−y, so ist

$y^2-0{,}91931y+0{,}2112=0.$

Da diese Gleichung von der Form

$y^2-my+x=0$, so ist wieder

1) $\operatorname{tang}(\varphi+\varphi') = \frac{m}{1-n}$ und

2) $\cos(\varphi-\varphi') = \frac{1+n}{m}\sin(\varphi+\varphi')$.

Nun ist m=0,91931 und n=0,2112.

$\log m = \log 0{,}91931 = 0{,}9634620-1$

$\log(1-n) = \log(1-0{,}2112) = \log 0{,}7888 = 0{,}8969669-1$

$\log\left(\frac{m}{1-n}\right) = \log m - \log(1-n) = 0{,}0664951$

$\log \operatorname{tang}[(\varphi+\varphi')-180^0] = 0{,}0664951$

$(\varphi+\varphi')-180^0 = 49^0 22' 9{,}3''$

$\varphi+\varphi' = 229^0 22' 9{,}3''$

Ferner ist:

$$\sin(\varphi+\varphi') = \sin[(\varphi+\varphi')-180^0] = -\sin 49^0 22'9{,}3''$$
$$\log[-\sin(\varphi+\varphi')] = 9{,}8801967-10$$
$$\log(1+n) = \log(1+0{,}2112) = \log 1{,}2112 = 0{,}0832159$$
$$\log[-(1+n)\sin(\varphi+\varphi')] = 0{,}9634126-1$$
$$\log m = 0{,}9634620-1$$
$$\log\left\{-\frac{(1+n)\sin(\varphi+\varphi')}{m}\right\} = 0{,}9999506-1$$
$$\log[-\cos(\varphi-\varphi')] = \log\cos[180^0-(\varphi-\varphi')] = 0{,}9999506-1$$
$$180^0-(\varphi-\varphi') = 0^0 51'50''$$
$$\varphi-\varphi' = 179^0 8'10''.$$

Nun ist auch $\varphi+\varphi' = 229^0 22'9{,}3''$;

also ist $\varphi = 204^0 15'9{,}6''$

$\varphi' = 25^0 6'59{,}6''$.

Da nun

$$\tang\varphi = -\tang(180^0-\varphi) = -\tang(180^0-204^0 15'9{,}6'') = 24^0 15'9{,}6'',$$ so ist

$\log\tang\varphi = 0{,}6537171-1$; also $\tang\varphi = 0{,}45056$;

$\log\tang\varphi' = 0{,}6709752-1$; $\tang\varphi' = 0{,}46875$;

folglich heißen die Wurzeln der gegebenen Gleichung, da $x_1 = -b$ angenommen wurde:

$$x_1 = -0{,}45056 \text{ und } x_2 = -0{,}46875.$$

180. Dividiere die gegebene Gleichung durch den Koeffizienten von von x^2, so wird:

$$m = \frac{19{,}749}{7{,}285} \text{ und } n = \frac{115{,}638}{7{,}285}.$$

Nun ist $\log m = \log 19{,}749 - \log 7{,}285 = 0{,}4331155$

$$\log(1+n) = \log 122{,}923 - \log 7{,}285 = 1{,}2272135$$
$$\log\left(\frac{m}{1+n}\right) = \log m - \log(1+n) = 9{,}2059020-10.$$

Nun ist $\tang[180^0-(\varphi+\varphi')] = -\tang(\varphi+\varphi')$: folglich

$$-\log\tang(\varphi+\varphi') = 9{,}2059020-10;$$
$$-(\varphi+\varphi') = 9^0 7'38{,}03''$$
$$\varphi+\varphi' = -9^0 7'38{,}03''.$$

Ferner ist: $\log\sin(\varphi+\varphi') = 9{,}2003780-10$

$$\log(1-n) = \log(n-1) = \log 108{,}353 - \log 7{,}285 = 1{,}1724113$$
$$\log[(1-n)\sin(\varphi+\varphi')] = 0{,}3727893$$
$$\log m = 0{,}4331155$$
$$\log\left\{-\frac{1-n}{-m}\sin(\varphi+\varphi')\right\} = 0{,}9396738-1$$
$$\log[-\cos(\varphi-\varphi')] = \log\cos[180^0-(\varphi-\varphi')] = 0{,}9396738-1$$
$$180^0-(\varphi-\varphi') = 29^0 30'19{,}25''$$
$$\varphi-\varphi' = 150^0 29'40{,}75'';$$
$$\varphi+\varphi' = -9^0 7'38{,}03'';$$

folglich $\varphi = 70^0 41'1{,}36''$

$\varphi' = -79^0 48'39{,}39''$.

Nun ist $\log \tang \varphi = 0{,}4552943$; also
$\tang \varphi = 2{,}85295 = x_1$
$\log \tang \varphi' = -0{,}7453764$; also
$\tang \varphi' = -5{,}56386 = x_2$.

181. Wenn der in dem Werte für $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck imaginär ist, also wenn $\frac{1}{4}p^2 < q$, so hat man

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4q} - 1\right)q} = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q} \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4q} - 1}.$$

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q} \cdot \sqrt{-\left(1 - \frac{p^2}{4q}\right)} = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q} \cdot \sqrt{1 - \frac{p^2}{4q}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Setzt man nun:

$\cos \vartheta = \frac{p}{2\sqrt{q}}$, so hat man, wenn man beiderseits quadriert:

$(\cos \vartheta)^2 = \frac{p^2}{4q}$. Diesen Wert in obige Formel gesetzt, giebt $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q}\sqrt{1 - (\cos\vartheta)^2} \cdot \sqrt{-1}$. Nun ist $\sqrt{1-(\cos\vartheta)^2} = \sin\vartheta$; folglich $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q} \cdot \sin\vartheta \cdot \sqrt{-1}$.

Hiernach wird die hier gegebene Gleichung gelöst, worin $p = 138{,}72274$ und $q = 8016$ ist. Nun ist
$\log \cos \vartheta = \log 138{,}72274 - (\log 2 + \frac{1}{2} \log 8016)$
$= 2{,}1421476 - (0{,}3010300 + 1{,}9519788) = 9{,}8891388 - 10.$
$\vartheta = 39^0 13' 16{,}7''$; $\log \sin \vartheta = 9{,}8009331 - 10$. Zu diesem Logarithmus gehört die Zahl 0,632315; folglich

$$x = \frac{138{,}72274}{2} \pm [\sqrt{8016} \times 0{,}632315] \cdot \sqrt{-1};\ \text{also ist:}$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = 69{,}36137 \pm 56{,}61272 \cdot \sqrt{-1}.$$

182. Löst man die hier gegebene Gleichung auf, so erhält man:

$$x = -4{,}929503 \pm \sqrt{(4{,}929503)^2 - 32{,}59}.$$

Nun ist der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck offenbar imaginär, daher hat man auch hier

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q} \sin \vartheta \cdot \sqrt{-1}.$$

Ist nun $p = 9{,}859006$ und $q = 32{,}59$, so ist:
$\log \cos \vartheta = \log 9{,}859006 - (\log 2 + \frac{1}{2} \log 32{,}59)$
$= 0{,}9938329 - (0{,}3010300 + 0{,}7565422) =$
$9{,}9362607 - 10$; $\vartheta = 30^0 17' 18{,}4''$;
$\log \sin \vartheta = 9{,}7027350 - 10$. Hierzu gehört die Zahl

$$\frac{5{,}04353}{10} = 0{,}504353;\ \text{folglich ist}$$

$$x = -4{,}929503 \pm [\sqrt{32{,}59} \times 0{,}504353] \cdot \sqrt{-1};\ \text{also ist:}$$

$$x_1 \text{ und } x_2 = -4{,}929503 \pm 2{,}87923 \cdot \sqrt{-1}.$$

f) Reciproke Gleichungen höherer Grade, die sich auf Gleichungen des zweiten Grades zurückführen lassen. (183—204).

§. 396. 183. Unter gewissen Verhältnissen kann eine Gleichung auf einen niedrigen Grad gebracht werden, als derjenige ist, unter welchem sie vorkommt und zwar dann, wenn zwischen ihren verschiedenen Wurzeln besondere Beziehungen stattfinden, oder wenn dieselbe durch einen rationalen Faktor teilbar ist. Die Gleichung von der Form

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

bietet uns ein Beispiel für den Fall dar, wo die Form selbst der Gleichung eine Beziehung zwischen ihren Wurzeln entdecken läßt.

Da das letzte Glied dieser Gleichung dem Koeffizienten des ersten Gliedes gleich ist und je vom ersten und letzten gleich weit abstehende Glieder dieselben Koeffizienten haben, so wird die Gleichung eine reciproke genannt. Reciproke Gleichungen haben die Eigenschaft, daß sie dieselben bleiben, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Daraus ergiebt sich, daß, wenn c eine Wurzel der Gleichung ist, auch der reciproke Wert $\frac{1}{c}$ eine zweite Wurzel der Gleichung sein muß. Denn setzt man $x=c$ und $x=\frac{1}{c}$, so verwandelt sich obige Gleichung in folgende, die mit jener durchaus identisch ist:

$$c^4+ac^3+bc^2+ac+1=0.$$

Setzt man aber $x=\frac{1}{c}$, so erhält man:

$$\frac{1}{c^4}+a\times\frac{1}{c^3}+b\times\frac{1}{c^2}+a\times\frac{1}{c}+1=0.$$

Multipliziert und dividiert man diese Gleichung durch c^4, so ist

$$\frac{1}{c^4}(c^4+ac^3+bc^2+ac+1)=0.$$

Nun behält die oben gegebene Gleichung selbst dann diese Eigenschaft, wenn alle gleichnamigen Koeffizienten entgegengesetzte Zeichen haben. Für diesen Fall aber kann kein mittleres Glied vorhanden sein, weil dasselbe sonst zu gleicher Zeit positiv und negativ sein müßte, was eine Ungereimtheit ist.

Nun hat jede reciproke Gleichung von ungerader Ordnung die Wurzel (—1), wenn die gleichnamigen Koeffizienten mit gleichen Zeichen behaftet sind, z. B. die beiden Gleichungen

$$x^5+ax^4+bx^3+bx^2+ax+1=0;$$
$$x^5-ax^4+bx^3+bx^2-ax+1=0.$$

Hingegen hat sie die Wurzel $(+1)$, wenn die gleichnamigen Koeffizienten ungleiche Zeichen haben, z. B. die beiden Gleichungen

$$x^5+ax^4+bx^3-bx^2-ax-1=0;$$
$$x^5-ax^4+bx^3-bx^2+ax-1=0.$$

Daher ist jede reciproke Gleichung von ungerader Ordnung durch $x+1$ oder $x-1$ teilbar. Dadurch kann eine reciproke Gleichung von ungerader Ordnung auf eine von gerader Ordnung zurückgeführt werden, die wieder reciprok ist, und es erübrigt nur noch zu zeigen, wie Gleichungen von gerader Ordnung aufgelöst werden müssen. Es sei gegeben die Gleichung

$$(1)\ x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0,$$

welche von gerader Ordnung und reciprok ist.

Dividiert man dieselbe durch x^2 und vereinigt je zwei Glieder mit gleichen Koeffizienten, so ist

$$(2)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0.$$

Setzt man nun $x+\frac{1}{x}=z$, so kommt es nur noch darauf an, daraus den Wert abzuleiten für $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$. Da nun $x+\frac{1}{x}=z$, so ist $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$; woraus folgt, daß $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$. Substituiert man die auf diese Weise für $x^2+\frac{1}{x^2}$ und für $x+\frac{1}{x}$ gefundenen Werte in die Gleichung (2), so hat man die Gleichung von einem halb so hohen Grade, als die gegebene war. Hiernach ist also:

$$z^2-2+az+b=0, \text{ oder } z^2+az=2-b;$$
$$\text{folglich } z=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2}.$$

Da nun $x+\frac{1}{x}=z$ ist, so erhält man:

$$x^2+1=zx, \text{ oder } x^2-zx=-1;$$
$$\text{folglich } x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2-1}.$$

Da nun $z=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{2-b+\frac{1}{4}a^2}$, so ist:

$$z^2=\tfrac{1}{4}a^2\pm a\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2}+2-b+\tfrac{1}{4}a^2, \text{ oder}$$
$$z^2=\tfrac{1}{2}a^2+2-b\mp a\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2};$$

also ist:

$$\tfrac{1}{4}z^2=\tfrac{1}{8}a^2+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}b\mp\tfrac{1}{4}a\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2}.$$

Setzt man nun die Werte für z und $\frac{1}{4}z^2$ in den Wert $x=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$ ein, so hat man;

$$x=-\tfrac{1}{4}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{8}a^2-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}b\mp\tfrac{1}{4}a\sqrt{2-b+\tfrac{1}{4}a^2}}.$$

184. Dividiert man die hier gegebene Gleichung durch x^2, so ist:

$$x^2+1\tfrac{1}{2}x-8+\frac{1\frac{1}{2}}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \text{ oder}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1\tfrac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0 \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\tfrac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0.$$

Setze hierin $x+\frac{1}{x}=z$, so resultiert:

$z^2+1\frac{1}{2}z=10$; daher $z_1=2\frac{1}{2}$ und $z_2=-4$. Also ist

(1) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$ oder $x^2-2\frac{1}{2}x=-1$; $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Setzt man den zweiten Wert für z, nämlich (—4) ein, so wird (2) $x+\frac{1}{x}=(-4)$, woraus folgt, daß

$x_3=-2\pm\sqrt{3}=-0{,}26795$ und $x_4=-3{,}73205$.

185. Da $a=-3\frac{1}{3}$ und $b=2$ ist, so hat man nach Beispiel 183

$$z=(-\tfrac{1}{2})(-3\tfrac{1}{3})\pm\sqrt{2-2+\tfrac{1}{4}\times(-3\tfrac{1}{3})^2} \text{ oder}$$

$$z=+\tfrac{5}{3}\pm\sqrt{\tfrac{25}{9}}=\tfrac{5}{3}\pm\tfrac{5}{3}; \text{ daher } z_1=3\tfrac{1}{3} \text{ und } z_2=0.$$

Daher ist: 1) $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$; mithin $x_1=3$ und $x_2=\frac{1}{3}$;

2) $x+\frac{1}{x}=0$; mithin x_3 und $x_4=\pm\sqrt{-1}$.

186. Dividiert man die hier gegebene Gleichung durch x^2, so hat man nach gehöriger Ordnung:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\tfrac{1}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\tfrac{1}{3}=0 \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\tfrac{1}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\tfrac{1}{3}=0.$$

Setzt man nun $x+\frac{1}{x}=z$, so ist:

$z^2-4\frac{1}{3}z=-3\frac{1}{3}$; also $z_1=3\frac{1}{3}$ und $z_2=1$.

Demnach ist 1) $x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3}$; mithin $x_1=3$ und $x_2=\frac{1}{3}$;

2) $x+\frac{1}{x}=1$; woraus folgt, daß

x_3 und $x_4=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})=0{,}5\pm0{,}866\sqrt{-1}$.

187. α) Setzt man mit Bezug auf Beispiel 183

$a=\left(n-\frac{1}{n}\right)$ und $b=(-2n^2)$, so hat man hier

$$z=-\tfrac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)+\sqrt{2-(-2n^2)+\tfrac{1}{4}\left(n-\frac{1}{n}\right)^2} \text{ oder}$$

$$z=-\frac{n^2-1}{2n}\pm\sqrt{2+2n^2+\tfrac{1}{4}n^2-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{4n^2}}, \text{ oder}$$

$$z=-\frac{n^2-1}{2n}\pm\sqrt{\frac{9n^4+6n^2+1}{4n^2}}; \text{ daher}$$

$$z=-\frac{n^2-1}{2n}\pm\frac{3n^2+1}{2n}; \text{ also } z_1=\frac{n^2+1}{n}=n+\frac{1}{n} \text{ und}$$

$z_2=(-2n)$. Hiernach ist also:

1) $x+\frac{1}{x}=n+\frac{1}{n}$ oder $x^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)x=-1$; folglich

$x=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right)\pm\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right)$; daher $x_1=n$, und $x_2=+\frac{1}{n}$;

2) $x+\frac{1}{x}=-2n$, folglich x_3 und $x_4=-n\pm\sqrt{n^2-1}$.

β) Entwickelt man die hier gegebene Gleichung, so hat man:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+2-a^2=0 \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-a^2=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=z$, so wird:

$z^2-2z=a^2$; also z_1 und $z_2=1\pm\sqrt{a^2+1}$. Daher

(1) $x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{a^2+1}$. (2) $x+\frac{1}{x}=1-\sqrt{a^2+1}$.

$$x_1 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{2}\{1+\sqrt{a^2+1}\pm\sqrt{a^2+2\sqrt{a^2+1}-2}\}$$

$$x_3 \text{ und } x_4=\tfrac{1}{2}\{1-\sqrt{a^2+1}\pm\sqrt{a^2-2\sqrt{a^2+1}-2}\}.$$

188. Setzt man $x=y\sqrt{\frac{c}{a}}$, so ist $x^2=\frac{c}{a}y^2$.

$$x^3=\frac{c}{a}y^2y\sqrt{\frac{c}{a}}=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot y^3 \text{ und } x^4=\frac{c^2}{a^2}y^4.$$

Diese Werte für x, x^2, x^3 und x^4 in die gegebene Gleichung eingesetzt, giebt:

$$\frac{c^2}{a^2}y^4+c\sqrt{\frac{c}{a}}y^3+\frac{bc}{a}y^2+c\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot y+\frac{c^2}{a^2}=0.$$

Diese Gleichung durch $\frac{c^2}{a^2}$ dividiert, liefert:

$$y^4+\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot y^3+\frac{ab}{c}\cdot y^2+\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot y+1=0.$$

$$y^4+a\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot y^3+\frac{ab}{c}y^2+a\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot y+1=0.$$

Da diese Gleichung eine reciproke ist, so wird sie ebenfalls wie die vorhergehende behandelt. Dividiert man dieselbe durch y^2, so hat man:

$$y^2+\frac{1}{y^2}+a\sqrt{\frac{a}{c}}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{ab}{c}=0 \text{ oder}$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+a\sqrt{\frac{a}{c}}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{ab}{c}-2=0.$$

Setze $y+\frac{1}{y}=z$, so wird:

$$z^2+a\sqrt{\frac{a}{c}}z+\frac{ab}{c}-2=0, \text{ oder } z^2+a\sqrt{\frac{a}{c}}z=2-\frac{ab}{c},$$

$$\text{daher } z=-\frac{1}{2c}a\sqrt{ac}\pm\frac{1}{2c}\sqrt{a^3c+8c^2-4abc}$$

$$=\frac{-a\sqrt{ac}\pm\sqrt{a^3c+8c^2-4abc}}{2c}.$$

Da nun $y+\frac{1}{y}=z$ ist, so ist $y=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$.

189. Setze $x=y\sqrt{\frac{15}{5}}=y\sqrt{3}$, so ist $x^2=3y^2$, $x^3=3y^3\sqrt{3}$ und $x^4=9y^4$. Die gegebene Gl. verwandelt sich demnach in folgende:

$$9y^4+15y^3\sqrt{3}+30y^2+15y\sqrt{3}+9=0.$$

Diese Gl. durch $9y^2$ dividiert, giebt:

$$y^2+\frac{1}{y^2}+\frac{5}{3}\sqrt{3}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{10}{3}=0 \text{ oder}$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{5}{3}\sqrt{3}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{4}{3}=0.$$

Setzt man $y+\frac{1}{y}=z$, so ist $z^2+\frac{5}{3}\sqrt{3}z+\frac{4}{3}=0$, woraus

$$z_1=-\frac{4}{3}\sqrt{3} \text{ und } z_2=-\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Es ist also 1) $y+\frac{1}{y}=-\frac{4}{3}\sqrt{3}$, woraus

$$y_1=-\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ und } y_2=-\sqrt{3}.$$

Es ist 2) $y+\frac{1}{y}=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, woraus

$$y_2 \text{ und } y_3=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\pm\sqrt{-\frac{11}{12}}.$$

Da nun $x=\sqrt{3}\,.\,y$ ist, so resultieren folgende Werte für x:

1) $x_1=\sqrt{3}\,.\,(-\frac{1}{3}\sqrt{3})=-\frac{1}{3}\,.\,3=-1$,

2) $x_2=\sqrt{3}\,.\,-\sqrt{3}=-3$,

3) x_3 und $x_4=(-\frac{1}{6}\sqrt{3}\pm\sqrt{-\frac{11}{12}}).\sqrt{3}=$
$-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-11}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-11})=-0{,}5\pm1{,}65831.\sqrt{-1}.$

190. Setzt man $x=y\sqrt{\frac{6}{3}}=y\sqrt{2}$, so ist: $x^2=2y^2$; $x^3=2y^3\sqrt{2}$; $x^4=4y^4$. Es ist also:
$$4y^4+6\sqrt{2}.y^3-82\tfrac{18}{25}y^2+6\sqrt{2}.y+4=0.$$
Durch $4y^2$ dividiert und geordnet, giebt:
$$y^2+\frac{1}{y^2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)-20\tfrac{17}{25}=0 \text{ oder}$$
$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)-22\tfrac{17}{25}=0.$$
Setzt man nun $y+\frac{1}{y}=z$ und sucht den Wert für z, so erhält man:
$$z_1=2{,}7\sqrt{2} \text{ und } z_2=-4{,}2\sqrt{2}.$$
Da nun $y=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$ ist, so hat man:

1) $y=\frac{1}{2}\times2{,}7\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(2{,}7\sqrt{2})^2-1}=1{,}35\sqrt{2}\pm\sqrt{2{,}645}$
$=1{,}35\sqrt{2}\pm\sqrt{2\times1{,}3225}=1{,}35\sqrt{2}\pm1{,}15\sqrt{2}$;
daher $y_1=2{,}5\sqrt{2}$ und $y_2=0{,}2\sqrt{2}$;

2) y_3 und $y_4=\frac{1}{2}\times(-4{,}2\sqrt{2})\pm\sqrt{\frac{1}{4}\times(-4{,}2\sqrt{2})^2-1}$
$=-2{,}1\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\times35{,}28-1}=-2{,}1\sqrt{2}\pm\sqrt{8{,}82-1}$
$=-2{,}1\sqrt{2}\pm\sqrt{7{,}82}.$

Also hat y die Werte von $2{,}5\sqrt{2}$; $0{,}2\sqrt{2}$ und $-2{,}1\sqrt{2}\pm\sqrt{7{,}82}$.

Da nun $x=\sqrt{2}.y$ ist, so ist also:

1) $x_1=\sqrt{2}\times2{,}5\sqrt{2}=2{,}5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2{,}5\times2=5.$
2) $x_2=\sqrt{2}\times0{,}2\sqrt{2}=0{,}2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=0{,}2\times2=0{,}4.$
3) x_3 und $x_4=\sqrt{2}\times(-2{,}1\sqrt{2}\pm\sqrt{7{,}82})=-4{,}2\pm\sqrt{15{,}64}$
$=-4{,}2\pm\sqrt{0{,}04\times391}=-4{,}2\pm0{,}2\sqrt{391}$; also
$x_3=-0{,}245256$, $x_4=-8{,}154744$.

191. Setzt man hier $x=y\sqrt{\frac{10}{2}}=y\sqrt{5}$, so ist $x^2=5y^2$. $x^3=5y^3\sqrt{5}$; $x^4=25y^4$.
Setzt man diese Werte für x, x^2, x^3 und x^4 ein, dividiert dann die so erhaltene Gleichung durch $25y^2$ und ordnet diese zuletzt erhaltene Gleichung, so hat man:
$$y^2+\frac{1}{y^2}+\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\left(y+\frac{1}{y}\right)-4\tfrac{2}{9}=0 \text{ oder}$$
$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\tfrac{2}{5}\sqrt{5}\left(y+\frac{1}{y}\right)-6\tfrac{2}{9}=0.$$
Setzt man $y+\frac{1}{y}=z$, so ist, wenn man die auf diese Weise erhaltene Gleichung auflöst,
$z=-\frac{1}{5}\sqrt{5}\pm\frac{17}{15}\sqrt{5}$; daher $z_1=\frac{14}{15}\sqrt{5}$ und $z_2=-\frac{4}{3}\sqrt{5}.$
Daher ist also, da $y=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$

$$1)\ y=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{14}{15}\sqrt{5}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\times(\tfrac{14}{15}\sqrt{5})^2-1}$$
$$=\tfrac{7}{15}\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{196\times5}{4\times225}-1}=\tfrac{7}{15}\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{16\times5}{900}}$$
$=\tfrac{7}{15}\sqrt{5}\pm\tfrac{2}{15}\sqrt{5}$; daher $y_1=\tfrac{3}{5}\sqrt{5}$ und $y_2=\tfrac{1}{3}\sqrt{5}$;

2) y_3 und $y_4=\tfrac{1}{2}\times(-\tfrac{4}{3}\sqrt{5})\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(-\tfrac{4}{3}\sqrt{5})^2-1}=$
$-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pm\sqrt{\tfrac{11}{9}}=-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{11}$.

Da nun $x=y\sqrt{5}$ ist, so erhält man für x folgende Werte:

1) $x_1=\sqrt{5}\times\tfrac{3}{5}\sqrt{5}=\tfrac{3}{5}\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\tfrac{3}{5}\times5=3$;

2) $x_2=\sqrt{5}\times\tfrac{1}{3}\sqrt{5}=\tfrac{1}{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\tfrac{1}{3}\times5=\tfrac{5}{3}$;

3) $x_3=\sqrt{5}\times(-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{11})=$
$-\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\times\sqrt{5}\pm\tfrac{1}{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{11}=-\tfrac{10}{3}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{55}=$
$-3{,}3333\pm\tfrac{1}{3}\times7{,}416=-3{,}3333\pm2{,}4720=-0{,}8612672$
und $x_4=-5{,}8053995$.

192. Dividiert man die hier gegebene Gleichung, welche von ungerader Ordnung ist, durch $x+1$, so erhält man $x^2+(a-1)x+1$; also muß auch $(x+1)(x^2+(a-1)x+1)=0$ sein. Setzt man daher:

1) $x+1=0$, alsdann ist $x_1=-1$.

2) Setzt man $x^2-x+ax+1=0$, oder
$$x^2-x(1-a)=-1,$$
so ist x_2 und $x_3=\tfrac{1}{2}(1-a)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-2a-3}=$
$\tfrac{1}{2}[1-a\pm\sqrt{a^2-2a-3}]$.

193. Mit Bezug auf die vorige Aufgabe ist zunächst $x_1=-1$. Da $a=3\tfrac{1}{2}$ ist, so ist
$$x=\tfrac{1}{2}[1-3\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{(3\tfrac{1}{2})^2-2\,.\,3\tfrac{1}{2}-3}]=$$
$$\tfrac{1}{2}(-2\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}})=\tfrac{1}{2}(-2\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2});$$
daher $x_2=-\tfrac{1}{2}$ und $x_3=-2$.

194. $x^3+1-1\tfrac{1}{6}(x+1)=0$, oder
$$(x+1)(x^2-x+1-1\tfrac{1}{6}x)=0.$$
Ist nun $x+1=0$, so ist 1) $x_1=-1$.
Ist $x^2-x+1-1\tfrac{1}{6}x=0$, so ist $x^2-x(1\tfrac{1}{6}+1)=-1$;
daher 2) $x_2=\tfrac{13}{12}\pm\tfrac{5}{12}=1\tfrac{1}{2}$ und $x_3=\tfrac{2}{3}$.

195. Da hier $a=2$ ist, so hat man nach dem in Beispiel 192 für x gefundenen Werte: $x_1=-1$;
x_2 und $x_3=\tfrac{1}{2}(1-2\pm\sqrt{4-4-3})=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$.

196. Da die hier gegebene Gleichung ebenfalls von ungerader Ordnung ist, so dividiere man sie zuvor durch $x+1$, so ist:
$$x^4+(a-1)x^3+(b-a+1)x^2+(a-1)x+1=0.$$
Diese Gleichung durch x^2 dividiert, giebt nach gehöriger Ordnung:
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+(a-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(b-a+1)=0 \text{ oder}$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(a-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(b-a-1)=0.$$

Setzt man nun $x+\frac{1}{x}=z$, so ist:

$$z^2+(a-1)z=a-b+1;\text{ also}$$

$$z_1 \text{ und } z_2=-\tfrac{1}{2}(a-1)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{2}a-b+1\tfrac{1}{4}}.$$

Nun ist nach früheren Betrachtungen:

$$x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2-1}.$$

Setzt man den für z gefundenen Wert in diese Formel, so ergeben sich 4 Werte für x und ist außerdem $x+1=0$, so ist $x=-1$.

197. Dividiert man diese Gleichung durch $(x+1)$, so ist:

$$x^4+2x^3+\tfrac{3}{4}x^2+2x+1=0.$$

Diese Gleichung durch x^2 dividiert, giebt:

$$x^2+2x+\tfrac{3}{4}+2\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0, \text{ oder}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+\tfrac{3}{4}=0, \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-\tfrac{5}{4}=0.$$

Setzt man $x+\frac{1}{x}=z$, so erhält man:

$(z+1)^2=\tfrac{9}{4}$; folglich $z_1=+\tfrac{1}{2}$ und $z_2=-\tfrac{5}{2}$.

1) Ist nun $x+1=0$, so ist $x_1=-1$;

2) Ist $x+\frac{1}{x}=\tfrac{1}{2}$, so ist

$$x_2 \text{ und } x_3=\tfrac{1}{4}\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{-15}=\tfrac{1}{4}(1\pm\sqrt{-15});$$

3) Ist $x+\frac{1}{x}=-\tfrac{5}{2}$, so ist

$$x_4=-\tfrac{5}{4}\pm\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{2} \text{ und } x_5=-2.$$

198. Dividiert man diese Gleichung durch $(x+1)$; dann die dadurch erhaltene Gleichung durch x^2 und ordnet diese zuletzt, so hat man:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-5\tfrac{13}{21}\left(x+\frac{1}{x}\right)+9\tfrac{13}{21}=0, \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\tfrac{13}{21}\left(x+\frac{1}{x}\right)+7\tfrac{13}{21}=0.$$

Setzt man $x+\frac{1}{x}=z$, löst die Gleichung in Bezug auf z auf, so ist $z_1=3\tfrac{1}{3}$ und $z_2=2\tfrac{2}{7}$.

1) Ist nun $x+1=0$, so ist $x_1=-1$.

2) Ist $x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2-1}$, so ist, wenn wir die Werte für z_1 und z_2 substituieren,

$$x=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{10}{3}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(\tfrac{10}{3})^2-1}=\tfrac{5}{3}\pm\tfrac{4}{3};\text{ daher } x_2=3 \text{ und } x_3=\tfrac{1}{3}.$$

3) $x=\frac{1}{2}\times\frac{16}{7}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{16}{7})^2-1}=\frac{8}{7}\pm\sqrt{\frac{15}{49}}=\frac{8}{7}\pm\frac{1}{7}\times3{,}873$ $=\frac{1}{7}(8\pm3{,}873)$; daher $x_4=1{,}6961405$ und $x_5=0{,}5895738$.

199. Setzt man $x=\frac{b}{a}y$, so ist $x^2=\frac{b^2}{a^2}y^2$ und $x^3=\frac{b^3}{a^3}y^3$. Diese Werte in die Gleichung eingesetzt und durch $\frac{b^3}{a^3}$ dividiert, giebt:

$$y^3+\frac{a^2}{b}y^2+\frac{a^2}{b}y+1=0.$$

Setzt man in den im Beispiel 192 für x gefundenen Wert $\frac{a^2}{b}$ statt a, so erhält man:

$$1)\ y+1=0;\ \text{also}\ y_1=-1;\ \text{daher}\ x_1=-\frac{b}{a}$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{b}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4-2a^2b-3b^2}{b^2}}$$

$$=\frac{b-a^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b-3b^2}}{2b}.$$

Daher ist: x_2 und $x_3=\frac{b}{a}\left(\frac{b-a^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b-3b^2}}{2b}\right)$

$$=\frac{b-a^2\pm\sqrt{a^4-2a^2b-3b^2}}{2a}.$$

200. Setzt man $x=\frac{6}{3}y=2y$, so ist $x^2=4y^2$ und $x^3=8y^3$. Diese Werte in die gegebene Gleichung eingesetzt, giebt: $8y^3+12y^2-12y-8=0$. Durch 8 geteilt giebt: $y^3+\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}y-1=0$, oder $y^3-1+\frac{3}{2}y(y-1)=0$. Diese Gleichung, durch $(y-1)$ dividiert, liefert: $y^2+y+1+\frac{3}{2}y=0$, hieraus folgt $y_1=-\frac{1}{2}$ und $y_2=-2$.
Da nun $y-1=0$, so ist $y_3=1$. Also hat y die Werte: 1, $(-\frac{1}{2})$ und (-2). Da nun $x=2y$ ist, so ist:
1) $x_1=2\times1=2$; 2) $x_2=2\times(-\frac{1}{2})=-1$;
3) $x_3=2\times(-2)=-4$.

201. Man setze $x=\frac{1}{2}y$, so ist $x^2=\frac{1}{4}y^2$ und $x^3=\frac{1}{8}y^3$. Diese Werte eingesetzt und mit 8 multipliziert, giebt: $y^3+4y^2+4y+1=0$ oder $(y^3+1)+4y(y+1)=0$.
Dividiert man diese Gleichung durch $(y+1)$, so hat man:

$$y^2-y+1+4y+0.$$

Hieraus ergiebt sich, daß

$$y_1\ \text{und}\ y_2=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5}).$$

Da nun $y+1=0$, so ist auch $y_3=-1$.
Nun ist $x=\frac{1}{2}y$, also hat man für x folgende Werte:
1) $x_1=\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{1}{2}$; 2) $x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})=$ $\frac{1}{4}(-3\pm\sqrt{5})$, daher $x_2=\frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})=-0{,}190983$ und $x_3=\frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})=-1{,}309017$.

202. Setzt man $x=\frac{c}{b}y$, so ist $x^2=\frac{c^2}{b^2}y^2$;

$$x^3=\frac{c^3}{b^3}y^3,\ x^4=\frac{c^4}{b^4}y^4 \text{ und } y^5=\frac{c^5}{b^5}y^5.$$

Setzt man diese Werte ein und dividiert die erhaltene Gleichung durch $\frac{c^5}{b^5}$, so erhält man:

$$(y^5+1)+\frac{ab}{c}y(y^3+1)+\frac{b^3}{c^2}y^2(y+1)=0.$$

Diese Gleich. durch $(y+1)$ dividiert, giebt:

$$y^4+\left(\frac{ab}{c}-1\right)y^3+\left(\frac{b^3}{c^2}-\frac{ab}{c}+1\right)y^2+\left(\frac{ab}{c}-1\right)y+1=0.$$

Diese Gleich. durch y^2 dividiert und geordnet, giebt:

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(\frac{ab}{c}-1\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}-\frac{ab}{c}+1\right)=0.$$

Man setze nun $y+\frac{1}{y}=z$, so ist:

$$z^2+\left(\frac{ab}{c}-1\right)z=\frac{ab}{c}-\frac{b^3}{c^2}+1. \text{ Hieraus folgt}$$

$$z_1 \text{ und } z_2=\frac{c-ab\pm\sqrt{(ab+c)^2+4(c^2-b^3)}}{2c}.$$

Substituiert man diesen Wert für z in die Formel:

$$y=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}z^2-1}.$$

und setzt dann den für y gefundenen Wert in $x=\frac{c}{b}y$, so erhält man die verschiedenen Werte für x.

203. α) Vergleicht man diese Aufgabe mit der vorhergehenden und setzt statt a, b, c u. s. w. die entsprechenden Werte, nämlich $y=-2\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=2$, so ist

$$\frac{c^3a}{b^3}=\frac{2^3\times(-2\frac{1}{2})}{1^3}=-20 \text{ und}$$

$$\frac{c^5}{b^5}=\frac{2^5}{1^5}=32 \text{ und } \frac{c}{b}=\frac{2}{1}=2.$$

Substituiert man die Werte für a, b, c in die in der vorigen Aufgabe gefundene Formel für z, so hat man:

$$z=\frac{-(-2\frac{1}{2})+2\pm\sqrt{\frac{25}{4}-10-4+20}}{4}=$$

$$\frac{4\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{4}=\frac{\frac{9}{2}\pm\frac{7}{2}}{4}=\frac{9\pm7}{8}; \text{ daher } z_1=2 \text{ und } z_2=\tfrac{1}{4}.$$

Da nun $y=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$, so hat man:

1) y_1 und $y_2=\frac{1}{2}\times2\pm\sqrt{\frac{1}{4}(2)^2-1}=1\pm\sqrt{1-1}=$
$1\pm\sqrt{0}=1\pm0;$

2) y_3 und $y_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{4})^2 - 1} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{-\frac{63}{64}} = \frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{-7}$;
3) $y + 1 = 0$, also $y_5 = -1$.

Nun ist $x = \frac{c}{b}y = 2y$; daher ergeben sich für x folgende Werte:

1) $x_1 = 2 \times (1 + 0) = 0$ und 2) $x_2 = 2 \times (1 - 0) = 2$;
3) $x_3 = 2 \times (-1) = -2$;
4) x_4 und $x_5 = 2 \times (\frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}\sqrt{-7}) = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{-7}$.

β) Setzt man $x = 2y$, so hat man:

$$32y^5 + 32y^4 + 24y^3 + 24y^2 + 32y + 32 = 0.$$

Diese Gleichung durch 32 dividiert, liefert

$$y^5 + y^4 + \frac{3}{4}y^3 + \frac{3}{4}y^2 + y + 1 = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $(y + 1)$, so hat man:

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{3}{4} = 0, \text{ oder } \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0.$$

Setzt man $y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$, so ist $z^2 = \frac{5}{4}$; also

$$z_1 \text{ und } z_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Nun substituiere man den Wert für z und z^2 in die Formel:

$$y = \frac{1}{2}z \pm \sqrt{\frac{1}{4}z^2 - 1}, \text{ so hat man:}$$

$$y = \frac{1}{2}(\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} - 1} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \sqrt{-\frac{11}{16}}$$
$$= \pm\frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-11}.$$

Ist nun ferner $y + 1 = 0$, so ist $y = -1$. Da $x = 2y$, so hat man für x folgende Werte:

(1) x_1 und $x_2 = 2(\frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \sqrt{-11}) = \frac{1}{2}\sqrt{5} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-11}$
x_3 und $x_4 = -\frac{1}{2} . [\sqrt{5} \pm \sqrt{-11}]$
(2) $x_5 = 2 . (-1) = -2$.

204. α) Durch Umformung erhält man:
$(x^2 - 1)(x^4 + ax^3 + (b + 1)x^2 + ax + 1) = 0$. Es ist daher:
(1) $x^2 - 1 = 0$; also $x^2 = 1$; daher $x = \pm 1$. Ferner ist:
(2) $x^4 + ax^3 + (b + 1)x^2 + ax + 1 = 0$.

Setze jetzt in die Beisp. 183 für x gefundenen Werte $(b + 1)$ statt b, so erhält man die ferneren Werte für x.

β) Verfährt man hier ebenso, so erhält man:

$$(x^2 - 1)(x^4 - 5\tfrac{5}{6}x^3 + 10\tfrac{1}{3}x^2 - 5\tfrac{5}{6}x + 1) = 0.$$

Es ist daher:
(1) $x^2 - 1 = 0$; folglich x_1 und $x_2 = \pm 1$.
Ferner ist: (2) $x^4 - 5\frac{5}{6}x^3 + 10\frac{1}{3}x^2 + 5\frac{5}{6}x + 1 = 0$;

$$\text{daher: } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\tfrac{5}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10\tfrac{1}{3} = 0 \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\tfrac{5}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8\tfrac{1}{3} = 0.$$

Setze $x + \frac{1}{x} = z$ in diese Gleichung und bestimme z, so findet man: $z_1 = 3\frac{1}{3}$ und $z_2 = 2\frac{1}{2}$.

Daher ist: (3) $x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3}$; (4) $x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{2}$.

Aus (3) folgt, daß $x_3=3$ und $x_4=\frac{1}{3}$.
„ (4) „ „ $x_5=2$ „ $x_6=\frac{1}{2}$.

γ) Dividiere die hier gegebene Gleichung durch x^3+1, so hat man:

$$x^4+4x^3+2x^2+4x+1=0;$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0 \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=z$ und bestimme z, so findet man, daß

$$z_1=0 \text{ und } z_2=-4.$$

Daher ist: (1) $x+\frac{1}{x}=0$; (2) $x+\frac{1}{x}=-4$.

Aus (1) folgt x_1 und $x_2=\pm\sqrt{-1}$.
„ (2) „ x_3 „ $x_4=-2\pm\sqrt{3}$.

Ferner ist: (3) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$;
Daher: (4) $x+1=0$; folglich $x_5=-1$.
(5) $x^2-x+1=0$; folglich x_6 und $x_7=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

δ) Dividiere die gegebene Gleichung durch $x+1$, so erhält man:

$$x^6+(a-1)x^5+(b-a+1)x^4+2(a-1)x^3+(b-a+1)x^2$$
$$+(a-1)x+1=0.$$

Diese Gleichung durch x^2+1 dividiert, giebt:

$$x^4+(a-1)x^3+(b-a)x^2+(a-1)x+1=0 \text{ oder}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+(a-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(b-a)=0 \text{ oder}$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(a-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(b-a-2)=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=z$, so hat man:

$$z^2+(a-1)z=a-b+2; \text{ folglich}$$

$$z_1 \text{ und } z_2=-\tfrac{1}{2}(a-1)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+1)-4b+8}.$$

Wir haben also: (1) $x+1=0$; $x_1=-1$,
(2) $x^2+1=0$; x_2 und $x_3=\pm\sqrt{-1}$,
(3) x_4 und $x_5=\frac{1}{2}z\pm\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1}$.

g) Wiederholungsbeispiele (205—231).

§. 397. 205. Wird das Absolutglied auf die linke Seite des Gleichheitszeichens versetzt, so sind die beiden Glieder negativ und daher ist nach §. 390 (3) die größere Wurzel

positiv, die kleinere aber negativ. Da nun das Absolutglied das Produkt der Wurzeln ausmacht, so ist, da offenbar $n-p+m>n-p-m$, die größere positive Wurzel dieser Gleichung $=n-p+m$ und die kleinere negative Wurzel $=-(n-p-m)=m-n+p$. Daher ist $x_1=m+n-p$ und $x_2=m-n+p$.

206. Nach §. 390 (1) ist der Koeffizient des zweiten Gliedes gleich der algebraischen Summe der beiden Wurzeln; hiernach ist:

$$m+n=\tfrac{1}{2}[p+q+m+n-(p+q-m-n)].$$

Daher sind hier die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(p+q+m+n) \text{ und}$$

$-\frac{1}{2}(p+q-m-n)$; folglich ist $x_1=\frac{1}{2}(p+q+m+n)$ und $x_2=-\frac{1}{2}(p+q-m-n)=\frac{1}{2}(m+n-p-q)$.

207. Nach §. 390 (1) ist der Koeffizient des zweiten Gliedes

$$c-b=(a-b)-(a-c);$$

folglich heißen die beiden Wurzeln der Gleichung: $a-b$ und $-(a-c)$; daher ist $x_1=a-b$ und $x_2=-(a-c)=c-a$.

208. Aus der gegebenen Gleichung erhält man folgende:

$$x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)(a^2-b^2)=0.$$

Nun ist: $(a^2-b^2)(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)(a+b)(a-b)$
$=(a+b)^2(a-b)^2$.

Daher ist nach §. 390 (4) der Koeffizient des zweiten Gliedes entstanden aus $(a+b)^2+(a-b)^2$ und deshalb sind die beiden Wurzelwerte in der Gleichung

$$x^2-[(a+b)^2+(a-b)^2]x+(a+b)^2(a-b)^2=0$$

positiv; also $x_1=(a+b)^2$ und $x^2=(a-b)^2$.

209. Dividiert man die gegebene Gleichung durch a und ordnet sie, so hat man:

$$x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1=0.$$

Nach §. 390 (4) ist der Koeffizient des zweiten Gliedes gleich der Summe der beiden Wurzeln der Gleichung, und da $a\cdot\frac{1}{a}=1$, so folgt, daß $x_1=a$ und $x_2=\frac{1}{a}\cdot$

210. Ordne die Gleichung und dividiere sie durch bc, so erhält man:

$$x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0 \text{ oder}$$

$$x^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=0;$$

folglich $x_1=\frac{a}{b}$ und $x_2=\frac{b}{c}\cdot$

211. Dividiere diese Gleichung durch den Koeffizienten von x^2, so hat man:

$$x^2 - \left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right]x+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)=0;$$

folglich $x_1 = a + \frac{1}{a}$ und $x_2 = b + \frac{1}{b}$

212. Dividiere diese Gleichung durch mn, so ist:

$$x^2 - \left[(m+n)+\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right]x+(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=0;$$

folglich $x_1 = m+n$ und $x_2 = \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

213. Da $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(a+b)+2\sqrt{ab}$ und $\sqrt{a^3b}=a\sqrt{ab}$ und $\sqrt{ab^3}=b\sqrt{ab}$, also $\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}=a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}=(a+b)\sqrt{ab}$, so erhält man, wenn diese Werte für die angegebenen Ausdrücke in die Gleichung eingesetzt werden:

$$x^2-[\tfrac{1}{2}(a+b)+\sqrt{ab}]x+\tfrac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}=0,$$

folglich $x_1=\frac{1}{2}(a+b)$ und $x_2=\sqrt{ab}$.

214. Ordne diese Gleichung und dividiere sie durch a+b, so hat man: $x^2-\frac{(a+b)\sqrt{ab}+2ab}{a+b}x+\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}=0$ oder:

$$x^2-\left(\sqrt{ab}+\frac{2ab}{a+b}\right)x+\sqrt{ab}\cdot\frac{2ab}{a+b}=0.$$

Daher sind die Wurzelwerte der Gleichung:

$$x_1=2ab:(a+b);\quad x_2=\sqrt{ab}.$$

215. Entwickele diese Gleichung und ordne sie, so erhält man: $x^4+9x^2+1=0$. Hieraus findet man:

$$x^2=\tfrac{1}{4}(-18\pm2\sqrt{77});\text{ also } x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-18\pm2\sqrt{77}}.$$

216. Man quadriere die gegebene Gl., so wird:

$$2x^2+mx+nx+2mn=2\sqrt{(x^2+mx+n^2)(x^2+nx+m^2)}.$$

Diese Gleichung quadriert und geordnet, liefert:

$$x(6xmn-3m^2x-3n^2x+4m^2n+4mn^2-4n^3-4m^3)=0,$$

woraus $x_1=0$;

Weiter ist $6xmn-3m^2x-3n^2x=4n^3+4m^3-4m^2n-4mn^2$, oder $-3x(m^2+n^2-2mn)=4(n^3+m^3-m^2n-mn^2)$,

folglich $-3x=\frac{4(n^3+m^3-m^2n-mn^2)}{m^2+n^2-2mn}$,

woraus $x_2=-\frac{4}{3}(m+n)$.

217. α) Entwickelt man diese Gleichung, so wird:

$$\frac{2x^2+34-16x}{x^2+15-8x}=\frac{2x^2+17-10x}{x^2+4-5x}\quad\text{oder}$$

$$5x^2-52x=-119,\text{ woraus } x=\tfrac{26}{5}\pm\sqrt{\tfrac{81}{25}},$$

folglich $x_1=7$, $x_2=3\frac{2}{5}$.

β) Nach gehöriger Entwickelung erhält man hier:

$$\frac{-2}{8+x^2+6x}=\frac{+2}{15+x^2+8x} \text{ oder}$$

$$4x^2+28x=-46, \text{ woraus } x=-\tfrac{7}{2}\pm\sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

folglich x_1 und $x_2=\frac{1}{2}(-7\pm\sqrt{3})$.

γ) Man multipliziere die gegebene Gl. mit $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, so erhält man:

$$1+\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ oder } \sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=\frac{1-3x}{1+x},$$

diese Gleichung auf die 3. Potenz erhoben, giebt:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2=\left(\frac{1-3x}{1+x}\right)^3 \text{ oder } \frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2}=\frac{1+27x^2-9x-27x^3}{(1+x)^3}$$

oder $1-x^2-x+x^3=1+27x^2-9x-27x^3$, woraus folgt:

$$28x^3-28x^2+8x=0 \text{ oder } 7x^3-7x^2+2x=0.$$

Aus dieser Gl. folgt $x(7x^2-7x+2)=0$, also $x_1=0$.

Weiter ist $7x^2-7x=-2$, also $x^2-x=-\frac{2}{7}$, woraus

$$x_2 \text{ und } x_3=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{1}{28}}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{7}{196}}=$$

$$\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{14}\sqrt{-7}=\tfrac{1}{14}(7\pm\sqrt{-7}).$$

218. Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$(7+2x)\left(\frac{1}{x(x+7)}-\frac{1}{(1+x)(6+x)}+\frac{1}{(2+x)(5+x)}-\frac{1}{(3+x)(4+x)}\right)=0.$$

Setzt man $7+2x=0$, so ist $x_1=-3\frac{1}{2}$.

Entwickelt man den zweiten Faktor der Gleichung, so findet sich:

$$3(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+(x+7x)(x^2+7x+6)=0.$$

Setze $x^2+7x=y$, so reduziert sich die Gleichung auf

$$y^2+18y+90=0; \text{ folglich } y=-9\pm3\sqrt{-1}.$$

Daher ist: $x^2+7x=-9\pm3\sqrt{-1}$; folglich

$$x=-3\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{3\tfrac{1}{4}\pm3\sqrt{-1}}.$$

219. Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$(2x-5)\left(\frac{a}{x(x-5)}+\frac{b}{(x-1)(x-4)}+\frac{c}{(x-2)(x-3)}\right)=0.$$

Setze $2x-5=0$, so ist $x=2\frac{1}{2}$.

Entwickele den zweiten Faktor, so ist:

$$a(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+b(x^2-5x)(x^2-5x+6)+$$
$$c(x^2-5x)(x^2-5x+4)=0.$$

Setze hierin $x^2-5x=z$, so ist:

$$a(z+4)(z+6)+b(z+6)z+cz(z+4)=0.$$

Hieraus erhält man folgende Gleichung:

$$z^2+2z\frac{5a+3b+2c}{a+b+c}=-\frac{24a}{a+b+c}; \text{ daher:}$$

$$z=\frac{-(5a+3b+2c)\pm\sqrt{(a-3b-2c)^2+12ab}}{a+b+c};$$

folglich ist, wenn wir den Wert für z einsetzen:

$$x=\tfrac{1}{2}\left[5\pm\sqrt{\frac{5a+13b+17c\pm\sqrt{(a-3b-2c)^2+12ab}}{a+b+c}}\right].$$

220. Verfährt man hier, wie in der vorhergehenden Aufgabe, so hat man:

$$(2x+a+b)\left(\frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{(x+c)(x+a+b-c)}\right)=0.$$

Setze den Faktor $2x+a+b=0$, so ist $x=-\frac{1}{2}(a+b)$. Ferner enthält man aus dem zweiten Faktor durch Entwickelung:

$$x^2+(a+b)x=-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}[(a+b+2c)^2+(a-b)^2]);$$

folglich:

$$x=\tfrac{1}{2}(-(a+b)\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}[(a+b-2c)^2+(a-b)^2]}).$$

221. Vereinigt man den ersten und zweiten, dann den dritten und fünften und endlich den vierten und sechsten Quotienten, so erhält man:

$$(2x+a+b)\left(\frac{1}{x^2+(a+b)x+ab}+\frac{1}{x^2+(a+b)x+c(a+b-c)}+\frac{1}{x^2+(a+b)x+d(a+b-d)}\right)=0.$$

Setze zunächst den Faktor $2x+a+b=0$, so ist:

$$x=-\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Setze ferner den andern Faktor $x^2+(a+b)x=z$, $c(a+b-c)=p$ und $d(a+b-d)=q$, so ist:

$$(z+p)(z+q)+(z+ab)(z+q)+(z+ab)(z+p)=0;$$

also: $z^2+\frac{2}{3}z(p+q+ab)=-\frac{1}{3}[ab(p+q)+pq]$; daher

$$z=\tfrac{1}{3}[-(p+q+ab)\pm\sqrt{p^2+q^2-pq-ab(p+q-ab)}].$$

Setzt man den Wert für $z=m$, so ist:

$$x^2+(a+b)x=m;\text{ also:}$$

$$x=\tfrac{1}{2}[-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+4m}].$$

222. Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$x^2-(a+b)x-(1-ab)=0;\text{ folglich}$$

$$x=\tfrac{1}{2}[(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4}].$$

223. Ordnet man die Gleichung so, daß die Quotienten mit den Divisoren $mx-n$ und $nx-m$ auf derselben Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen, so erhält man:

$$\frac{m(nx-m)-n(mx-n)}{(mx-n)(nx-m)}=\frac{m(nx-m)-n(mx-n)}{mn}.$$

Hieraus erhält man durch Entwickelung:

$$x^2-\frac{m^2+n^2}{mn}x=0\text{ oder }\left(x-\frac{m^2+n^2}{mn}\right)x=0;$$

$$\text{folglich } x_1=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\text{ und } x_2=0.$$

224. Ordnet man die gegebene Gleichung, so ist

$$a^2-3ax-10x^2=(a+5x)\sqrt{a^2-4x^2}.$$

Diese Gl. quadriert und geordnet, giebt:

$$200x^4+100ax^3-32a^2x^2-16a^3x=0 \text{ oder}$$
$$x^4+\tfrac{1}{2}ax^3-\tfrac{4}{25}a^2x^2-\tfrac{2}{25}a^3x=0, \text{ daher}$$
$$x^2(x^2+\tfrac{1}{2}ax)-\tfrac{4}{25}a^2(x^2+\tfrac{1}{2}ax)=0; \text{ also}$$
$$(x^2-\tfrac{4}{25}a^2)(x^2+\tfrac{1}{2}ax)=0.$$

Hieraus folgt (1) $x^2+\frac{1}{2}ax=0$; daher $x_1=-\frac{1}{2}a$; $x_2=0$; (2) $x^2-\frac{4}{25}a^2=0$; daher $x_3=\frac{2}{5}a$; $x_4=-\frac{2}{5}a$.

225. Erhebe die Gleichung in den Kubus, so hat man:

$$(a+x)+(a-x)+3\sqrt[3]{a^2-x^2}.\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=b.$$

Setze hierin aus der gegebenen Gleichung den Wert für $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}$, so ist:

$$2a+3\sqrt[3]{b}\,.\sqrt[3]{a^2-x^2}=b \text{ oder}$$

$3\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{a^2-x^2}=b-2a$; in den Kubus erhoben, giebt:

$$27b(a^2-x^2)=(b-2a)^3 \text{ oder:}$$
$$27bx^2=27a^2b-(b-2a)^3=(a+b)^2(8a-b);$$
$$\text{folglich } x=\pm\tfrac{1}{3}(a+b)\sqrt{\frac{8a-b}{3b}}.$$

2.26 Dividiere diese Gleichung durch $\sqrt[3]{1-x^2}$, so erhält man:

$$(2)\quad \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=1.$$

Erhebe diese Gleichung auf die dritte Potenz, so ist:

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}-3\left(\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\right)=1.$$

Setze hierin den Wert für $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ aus Gl. (2),

$$\text{so ist: } \frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}-3=1.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$x^2+x=1; \text{ folglich } x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5}).$$

227. Erhebt man die rechte Seite der Gleichung auf die vierte Potenz und ordnet sie, so ist:

$$(a-1)x^4+4ax^3+6ax^2+4ax+(a-1)=0 \text{ oder:}$$
$$x^4+\frac{4a}{a-1}x^3+\frac{6a}{a-1}x^2+\frac{4a}{a-1}x+1=0.$$

Dividiere diese Gleichung durch x^2, so ist:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{4a}{a-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{6a}{a-1}=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=y$, so ist $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Es ist also:

$$y^2-2+\frac{4a}{a-1}y+\frac{6a}{a-1}=0;\ \text{folglich:}$$

$$y=\frac{-2a\pm\sqrt{2(a+1)}}{a-1}=p.\ \text{Demnach ist:}$$

$$x+\frac{1}{x}=p;\ \text{folglich}\ x=\tfrac{1}{2}(p\pm\sqrt{p^2-4}).$$

228. Dividiere diese Gleichung durch $1+x$, so hat man:
$1-x+x^2-x^3+x^4=a(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)$ oder:
$(a-1)x^4+(4a+1)x^3+(6a-1)x^2+(4a+1)x+(a-1)=0.$

$$x^4+\frac{4a+1}{a-1}x^3+\frac{6a-1}{a-1}x^2+\frac{4a+1}{a-1}x+1=0\ \text{oder}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{4a+1}{a-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{6a-1}{a-1}=0.$$

Setze $x+\frac{1}{x}=p$, so ist $x^2+\frac{1}{x^2}=p^2-2$.

Daher ist: $p^2-2+\frac{4a+1}{a-1}p+\frac{6a-1}{a-1}=0;$

folglich: $p=\frac{-4a-1\pm\sqrt{20a+5}}{2(a-1)}.$

Hieraus läßt sich der Wert für x bestimmen.

229. α) Dividiere den Quotienten links im Dividend und Divisor durch $\sqrt{x}$ und rechts im Dividend und Divisor durch x, so hat man:

$$(1)\quad \frac{1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}{1-\sqrt{1-\frac{a}{x}}}=\frac{n^2.\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}.\ \text{Setze}\ \sqrt{1-\frac{a}{x}}=y,\ \text{so ist:}$$

$$1-\frac{a}{x}=y^2;\ \text{also}\ \frac{a}{x}=1-y^2.$$

Daher erhalten wir aus der Gleichung (1):

$$\frac{1+y}{1-y}=\frac{n^2(1-y^2)}{y^2}\ \text{oder durch}\ 1+y\ \text{dividiert:}$$

$$\frac{1}{1-y}=\frac{n^2(1-y)}{y^2};\ \text{also}\ y^2=n^2(1-y)^2.$$

Hieraus folgt: $y=\pm n(1-y)$; daher

$$(2)\ y_1=\frac{n}{1+n}\ \text{und}\ (3)\ y_2=\frac{-n}{1-n};$$

also (4) $y^2=\left(\frac{n}{1+n}\right)^2$ und (5) $y^2=\left(\frac{-n}{1-n}\right)^2$.

Es ist deshalb:

$$(6)\ 1-y^2=1-\left(\frac{n}{1+n}\right)^2=\frac{1+2n}{(1+n)^2} \text{ und}$$

$$(7)\ 1-y^2=1-\left(\frac{-n}{1-n}\right)^2=\frac{1-2n}{(1-n)^2}.$$

Da $1-y^2=\frac{a}{x}$, so ist:

$$(8)\ \frac{a}{x}=\frac{1+2n}{(1+n)^2};\ \text{folglich } x_1=\frac{a(1+n)^2}{1+2n} \text{ und}$$

$$(9)\ \frac{a}{x}=\frac{1-2n}{(1-n)^2};\ \text{folglich } x_2=\frac{a(1-n)^2}{1-2n}.$$

β) Man dividiere den Quotienten links im Dividend und Divisor durch x—1, so erhält man:

$$\frac{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}{x^4+1}=\frac{a^2}{b} \text{ oder}$$

$$(2)\ \frac{(x^4+1)+2(x^3+x^2+x)}{x^4+1}=\frac{a^2}{b}.$$

Durch weitere Entwickelung dieser Gl. findet man:

$$b(x^4+1)+2b(x^3+x^2+x)=a^2(x^4+1) \text{ oder}$$

(3) $(x^4+1)(b-a^2)+2b(x^3+x^2+x)=0$. Setzt man jetzt für $x+\frac{1}{x}=z$, so ist $x^2+\frac{1}{x^2}+2=z^2$ oder $x^4+1=(z^2-2)x^2$. Diesen Wert für x^4+1 in Gl. (3) eingesetzt und die sich ergebende Gleichung durch x^2 dividiert, giebt

$$(z^2-2)(b-a^2)+2b\left(x+1+\frac{1}{x}\right)=0 \text{ oder}$$

(nach Einsetzung von $x+\frac{1}{x}=z$) $(z^2-2)(b-a^2)+2b(z+1)=0$.

Aus dieser Gl. ergiebt sich $z^2(b-a^2)+2bz+2a^2=0$, also

$$z^2+\frac{2bz}{b-a^2}+\frac{2a^2}{b-a^2}=0 \text{ oder auch}$$

$$z^2-\frac{2b}{a^2-b}z-\frac{2a^2}{a^2-b}=0, \text{ woraus}$$

$$z=\frac{1}{a^2-b}[b\pm\sqrt{2a^2(a^2-b)+b^2}].$$

Setze diesen Wert für z in die Gl. $x+\frac{1}{x}=z$, so findet man die Werte für x.

230. Durch Entwickelung der Gleichung erhält man:

$$\frac{4x^2-a^2}{a^2}=\frac{m^2+1}{m} \text{ oder } 4x^2m-2a^2m=a^2m^2+a^2,$$

also $x^2 = \frac{a^2m^2+a^2+2a^2m}{4m} = \frac{(a+am)^2}{4m}$, folglich

$$x = \pm\tfrac{1}{2}a(m+1)\sqrt{1:m}.$$

231. Verwandelt man nach §. 338 die Summe der beiden Quadratwurzeln im Dividend und Divisor der linken Seite dieser Gleichung in eine Quadratwurzel, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2+a^2x}+\sqrt{2a^2x})}}{\sqrt{2(\sqrt{x^2+a^2x}-\sqrt{2a^2x})}} = \sqrt{1+a}.$$

Erhebe diese Gleichung ins Quadrat, so ist:

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2x}+a\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2+a^2x}-a\sqrt{2x}} = 1+a.$$

Entwickele diese Gleichung, so erhält man:

$$[(a+2)\sqrt{2}-\sqrt{x+a^2}]\sqrt{x} = 0.$$

Daher hat man: (1) $\sqrt{x}=0$; also $x_1=0$.

(2) $(a+2)\sqrt{2}-\sqrt{x+a^2}=0$; also $\sqrt{x+a^2}=(a+2)\sqrt{2}$.

Erhebe diese Gleichung ins Quadrat und bestimme x, so findet man: $x_2=a^2+8a+8$.

---

3. **Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer unbekannten Größe in Heis, Sammlung §. 71.**

a) Reine quadratische Gleichungen (1—26).

§. 398a. 1. Die Anzahl der *M* sei x, so ist:
$x^2=132\frac{1}{4}=\frac{529}{4}$; folglich $x=11\frac{1}{2}$ *M*.

2. Die Zahl heiße x, so ist $\frac{x}{5}\cdot\frac{x}{7}=4235$ oder
$\frac{x^2}{35}=4235$, oder $x^2=35\times4235$; folglich x_1 und $x_2=\pm385$.

3. Die Zahl sei x, so ist:
$3\frac{4}{7}x\times8,68x=5239$, oder $31x^2=5239$; folglich
x_1 und $x_2=\pm13$.

4. Heißt die eine der beiden Zahlen x, so ist, da sie in dem Verhältnisse 11 : 13 stehen, die andere $\frac{13}{11}x$. Es ist daher: $\frac{13}{11}x^2=7007$; folglich $x=\pm77$ die eine Zahl und
$\frac{\pm77\times13}{11}=\pm91$ die andere Zahl.

5. Kauft er x Stück Pfirsiche, so kosten dieselben x^2 ₰. Da er im ganzen 6 *M* 25 ₰ $=625$ ₰ bezahlen muß, so ist:
$x^2=625$; folglich $x=25$ Stück Pfirsiche.

6. Heißt die Zahl x, so ist:

$\frac{x}{3}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{5}=\frac{x}{6}$; hieraus erhält man:

$6x^3=60x$; oder: $6x(x^2-10)=0$; daher

(1) $6x=0$; also $x_1=0$.

(2) $x^2=10$; x_2 und $x_3=\pm\sqrt{10}=\pm3{,}162277660$ (§. 347).

7. Die letzte der drei Zahlen heiße x, so ist, da die 3 Zahlen in dem Verhältnisse $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=6:4:3$ stehen, die zweite $\frac{4}{3}x$ und die erste 2x. Da die Summe ihrer Quadrate 10309 beträgt, so ist:

$x^2+(\frac{4}{3}x)^2+(2x)^2=10309$; also $x^2=1521$;

folglich $x=39$ die dritte, $\frac{4}{3}x=52$ die zweite und $2x=78$ die erste Zahl.

8. Die Breite des letzteren Feldes betrage x *m*, so ist, da sich die Länge zur Breite wie 13 : 7 verhält, die Länge $\frac{13}{7}x$ *m*; folglich der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Feldes $\frac{13}{7}x\times x=\frac{13}{7}x^2$. Da der Flächeninhalt beider Felder gleich groß ist, so erhält man: $\frac{13}{7}x^2=37\times3367$; also $x^2=\frac{7\times37\times3367}{13}$.

Daher $x=259$ *m* die Breite und 481 *m* die Länge.

9. α) Der eine Faktor heiße x, so ist, weil beide Faktoren in dem Verhältnisse p : q stehen, der andere Faktor (qx) : p. Hiernach ist: $(qx^2):p=a$; $x^2=(ap):q$; $x=\pm\sqrt{(ap):q}$; der andere Faktor heißt also: $\pm\sqrt{(apq^2):(p^2q)}=\pm\sqrt{(aq):p}$.

β) Heißt jede der drei gleichen Zahlen x, so ist ihre Summe $x+x+x=3x$ und ihr Produkt $=x\,.\,x\,.\,x=x^3$. Es ist also:

$x^3=3x$, oder $x(x^2-3)=0$.

Setze jeden Faktor gleich Null, so ist:

(1) $x_1=0$ und (2) $x^2-3=0$, folglich x_2 und $x_3=\pm\sqrt{3}$.

Man vergleiche §. 280.

10. Er habe x *kg* Salz, also 4x *kg* Zucker und 8x *kg* Kaffee gekauft, so ist der Preis des Salzes $40x^2$, des Zuckers $40(4x)^2$ und des Kaffees $40(8x)^2$ ₰. Er bezahlt nun zusammen 32,40 ℳ $=3240$ ₰. Es ist mithin $40(x^2+(4x)^2+(8x)^2)=3240$. Hieraus $x=1$ *kg* Salz und daher 8 *kg* Kaffee.

11. Wird die Breite um x *m* vermehrt, so beträgt dieselbe 37+x *m*. Vermindert man dagegen die Länge um 7x *m*, so ist diese noch 259−7x *m* groß. Nun beträgt der Inhalt eines rechtwinkeligen Gartens, der 37+x *m* breit und 259−7x *m* lang ist, $(37+x)(259-7x)$ *qm*. Weil aber dieser Inhalt um 63 *m* kleiner ist, als jener, ehe die Breite vermehrt und die Länge vermindert wurde, so ist:

$(37+x)(259-7x)+63=37\times259$.

Hieraus folgt, daß $x=\pm3$ *m*.

12. Heißt die Zahl x, so ist die größere x+3 und die kleinere

x—3. Daher ist $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$, folglich $x=\pm 6$.

13. Kostete jedes Stück 18 ₰, so kosteten 18 Stück $18\times18=18^2$ ₰. Er habe x Pomeranzen gekauft, so hat er, wenn das Stück 18 ₰ teurer oder wohlfeiler war und deswegen soviel weniger oder mehr als 18 Stück bringen soll, als jedes mehr oder weniger als 18 ₰ kostet, (18—x) Stück weniger oder (x—18) Stück mehr gekauft, als anfangs bestimmt war.

Da nun das Stück (18—x) oder (x—18) ₰ mehr oder weniger kostet als 18 ₰, so hat er für die Stück, die er mehr oder weniger als 18 Stück gekauft hat, $(18-x)^2=(x-18)^2$ ₰ bezahlt. Er hat nun 3,15 ℳ bezahlt, also $18^2-315=324-315=9$ ₰ weniger bezahlt, als bestimmt war, folglich ist:

$$(18-x)^2=9 \text{ oder } 18-x=\pm3;\ x_1=15,\ x_2=21.$$

14. Mit Bezug auf die vorhergehende Auflösung ist:

$$(a-x)^2=a^2-b, \text{ also } a-x=\pm\sqrt{a^2-b};$$

$$\text{folglich } x=a\mp\sqrt{a^2-b}.$$

15. Ist die Seite des ersten Quadrats $=x$ *m*, so ist die Schnur $4x$ *m* lang, und der Inhalt des ersten Quadrats x^2 *m*. Verkürzt man die Schnur um 8 *m*, so hat sie noch eine Länge von $4x-8$ *m*, welche den 4 Seiten eines andern Quadrats gleich sind, also 1 Seite $(x-2)$ *m* und das Quadrat $(x-2)^2$, und weil der Inhalt dieses zweiten Quadrats nur $\frac{16}{25}$mal so groß ist als der Inhalt des ersten, so ist:

$$(x-2)^2=\tfrac{16}{25}x^2, \text{ also } x-2=\tfrac{4}{5}x;$$

folglich $x=2\times5=10$ *m*; also die Schnur $=40$ *m*.

16. Der kleinere Teil der Zahl betrage x, so ist der größere derselben $20-x$ und

$$x^2:(20-x)^2=1:2\tfrac{1}{4}=4:9 \text{ oder}$$

$$x:(20-x)=\pm2:3, \text{ daher}$$

$$3x\mp2(20-x)=0 \text{ oder } (3\pm2)x=\pm40.$$

Soll das obere Vorzeichen Geltung haben, so ist $x=8$, also $20-x=12$; gilt dagegen das untere, so ist $x=-40$, mithin $20-x=20-(-40)=+60$.

17. Die Seite des Quadrats sei x *m*, so ist sein Inhalt x^2. Verlängert man die Seite um 3 *m*, so beträgt dieselbe $x+3$, und der Inhalt dieses Quadrats ist $(x+3)^2$ *m*, welcher jedoch um das $\frac{9}{16}$fache größer ist, als der Inhalt des ersten Quadrats. Hiernach ist:

$$(x+3)^2=\tfrac{25}{16}x^2;\text{ folglich } x+3=\tfrac{5}{4}x;\text{ also } x=12\ m.$$

18. Die eine Bäuerin habe x Eier mitgebracht, so hatte die zweite $260-x$ Eier. Aus den $260-x$ Eiern hätte die erste zu ihrem Preise gerade 7,20 ℳ gelöst; also verkaufte sie das Ei zu $\frac{720}{260-x}$ ₰ und ihre x Eier zu $\frac{720x}{260-x}$ ₰. Hätte die zweite die x

Eier der ersteren gehabt, so würde sie daraus zu ihrem Preise 9,80 ℳ gelöst haben; also verkaufte sie 1 Ei zu $\frac{980}{x}$ ₰ und 260—x Eier zu $\frac{980(260-x)}{x}$. Da nun beide gleich viel aus ihren Eiern lösen, so ist:

$$\frac{720x}{260-x}=\frac{980(260-x)}{x}; \text{ oder } 36x^2=49(260-x)^2.$$

Hieraus folgt: $x=140$ Eier hatte die erste und $260-140=120$ „ „ „ zweite.

19. Er verkaufe die Ware mit x pCt. Nutzen, so verkauft er die 133 *kg*, wovon ihm das *kg* p koste zu $\frac{133p(100+x)}{100}$. An diesem Gelde verdient er wieder x pCt.; folglich löst er aus der zweiten Ware $\frac{133p(100+x)^2}{10000}$, wofür er 168 *kg* kaufen kann, die aber im Preise 14 pCt. höher steht, als die erste; mithin kostet ihm das *kg* dieser dritten Ware $p+\frac{14p}{100}=\frac{114p}{100}$; die ganze Ware $\frac{168\times 114p}{100}$. Es ist daher:

$$\frac{133p(100+x)^2}{10000}=\frac{168\times 114p}{100}; \text{ oder } \frac{(100+x)^2}{100}=144; \text{ daher:}$$

$$(100+x)^2=120^2; \text{ folglich } x=20 \text{ pCt.}$$

20. Jede Seite des quadratischen Weingartens habe x *m* Länge, so stehen auf jeder Seite, weil die Weinstöcke $1\frac{1}{3}$ *m* von einander entfernt sind, $\frac{3}{4}x$ Stöcke und daher in dem ganzen Garten $(\frac{3}{4}x)^2$ Stöcke. Sollen aber die Stöcke nur $1\frac{1}{6}$ *m* von einander abstehen, so hat man zur Bepflanzung des Gartens $(\frac{6}{7}x)^2$ Stöcke nötig. Da aber in diesem Falle 8640 Stöcke mehr erforderlich sind, als im ersten, so ist:

$$(\tfrac{3}{4}x)^2+8640=(\tfrac{6}{7}x)^2, \text{ oder } 135\cdot\left(\frac{x}{7\,.\,4}\right)^2=8640;$$

folglich $x=8\,.\,28=224$ *m*.

21. Die eine Kathete sei x *m*, so ist die andere, welche das $3\frac{3}{7}$fache der erstern beträgt, $3\frac{3}{7}x$ *m* und ihre Quadrate sind x^2 und $(3\frac{3}{7}x)^2$. Da nun die Quadrate der beiden Katheten zusammen so groß sind, als das Quadrat der Hypotenuse, so ist:

$$x^2+(3\tfrac{3}{7}x)^2=1000^2 \text{ oder } \left(\frac{25x}{7}\right)^2=1000^2;$$

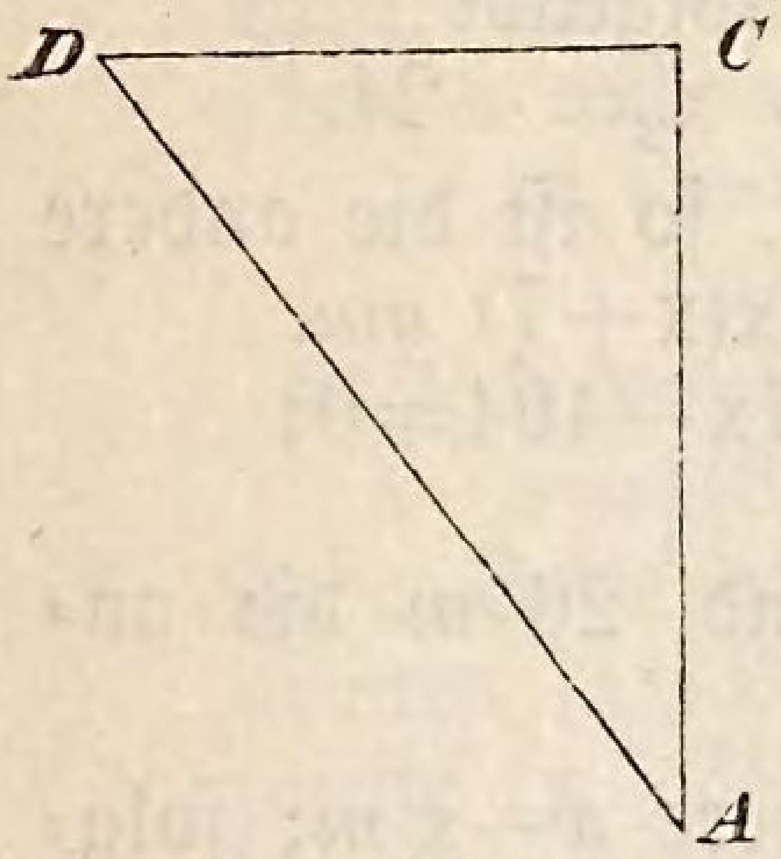
folglich $x=7\times 40=280$ *m* die eine Kathete, und daher $3\frac{3}{7}\times 280=960$ *m* die andere Kathete.

22. Die Breite des Rechtecks betrage x *m*, so ist die Länge desselben, da sie sich zur Breite wie 15 : 8 verhält, gleich $\frac{15}{8}x$

m. Durch die Diagonale, welche 323 *m* groß ist, wird das Rechteck in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke geteilt, wovon eine Kathete x *m* und die andere $\frac{15}{8}x$ *m* groß ist. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist daher:

$$x^2+(\tfrac{15}{8}x)^2=323^2; \text{ oder } \tfrac{289}{64}x^2=323^2,$$

folglich $x=152$ *m* beträgt die Breite und $\frac{15\times152}{8}=19\times15$ $=285$ *m* die Länge des Rechteckes.



23. Die Entfernung von Aachen nach Düsseldorf, also die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks ADC betrage x *km*, so beträgt die Entfernung von Aachen nach Köln, also die eine Kathete AC, da AD:AC=19:17, $\frac{17}{19}x$ *km* und weil Düsseldorf von Köln, also die andere Kathete DC=$31\frac{7}{8}$ *km* beträgt, so ist:

$$(\tfrac{17}{19}x)^2+(31\tfrac{7}{8})^2=x^2 \text{ oder } \tfrac{72}{361}x^2=(31\tfrac{7}{8})^2,$$

folglich $x=71{,}37355$ *km* ist Aachen von Düsseldorf und $(17\times71{,}37355):19=63{,}86054$ *km* ist Aachen von Köln entfernt.

24. Da die beiden Wanderer unter einem rechten Winkel von demselben Orte ausgehen, so mögen nach x Tagen beide 30 Meilen (= der Hypotenuse eines rechtw. Dreiecks) von einander entfernt sein; alsdann hat der eine, der täglich $4\frac{1}{2}$ Meilen geht, $4\frac{1}{2}x$ Meilen (= der einen Kathete), und der andere, der täglich 9 Meilen geht, 6x Meilen (= der anderen Kathete) zurückgelegt. Es ist demnach:

$$(4\tfrac{1}{2}x)^2+(6x)^2=30^2; \text{ folglich } x=4 \text{ Tage.}$$

25. Die Entfernung beider Körper betrage nach x Sekunden d *m* (= der Hypotenuse eines rechtw. Dreiecks); so sind die beiden Katheten cx und c′x *m*. Es ist also:

$$c^2x^2+c'^2x^2=d, \text{ oder } x^2(c^2+c'^2)=d^2 \text{ oder}$$

$$x^2=\frac{d^2}{c^2+c'^2}; \text{ folglich } x=\frac{d}{\sqrt{c^2+c'^2}} \text{ Sekunden.}$$

26. Jeder Körper lege x *m* in einer Sekunde zurück, so hat der eine, t Sekunden früher abgehende Körper, schon tx *m* gemacht, ehe der andere sich zu bewegen anfängt. Da sie nach n Sekunden im Scheitelpunkte des rechten Winkels zusammentreffen, so hat der eine (n—t)x und der andere nx *m* gemacht. Weil nun ihre anfängliche Entfernung d *m* beträgt, so ist:

$$(n-t)^2x^2+n^2x^2=d^2; \text{ oder } x^2[(n-t)^2+n^2]=d^2.$$

Also $x^2=\frac{d^2}{(n-t)^2+n^2}$; folglich $x=\frac{d}{\sqrt{(n-t)^2+n^2}}$ *m*.

b) Gemischte quadratische Gleichungen (27—92).

§. 398b. 27. Heißt die Zahl x, so ist, weil das Quadrat der Zahl nebst ihrem 13fachen 264 ausmacht:

$$(1)\ x^2+13x=264 \text{ oder } (2)\ x^2+13x-264=0.$$

Nach §. 390 (2) ist hier:

$$a-b=13=24-11 \text{ und } ab=264=24\,.\,11;$$

wir erhalten daher aus Gleichung (2) die folgende:

$$(x-11)(x+24)=0; \text{ folglich } x_1=11 \text{ und } x_2=-24.$$

28. Beträgt die eine Seite des Rechteckes x *m*, so ist die andere x+7 *m* und der Inhalt des Rechteckes =x(x+7) *qm*.

Es ist daher $x(x+7)=494$ oder $x^2+7x-494=0$;

folglich $(x-19)(x+26)=0$;

woraus folgt, daß x=19 *m* die eine, und 26 *m* die andere Seite.

29. Der eine Teil sei x *m* lang, so ist der andere a—x *m*; folglich beträgt der Inhalt eines aus diesen beiden Linien zusammengesetzten Rechteckes x(a—x) *qm*. Hiernach ist:

$$x^2-ax=-n; \text{ daher } (x-\tfrac{1}{2}a)^2=\tfrac{1}{4}(a^2-4n),$$

also $x=\frac{1}{2}[a+\sqrt{a^2-4n}]$ die eine Seite und $a-x=a-\frac{1}{2}[a+\sqrt{a^2-4n}]=\frac{1}{2}[a-\sqrt{a^2-4n}]$ die andere Seite.

30. Die Verlängerung der Linie a betrage x *cm*, so ist die eine Seite des Rechteckes x und die andere x+a *cm*; also der Inhalt desselben =x(x+a) *qcm*. Es ist daher:

$$x(x+a)=n; \text{ also } (x+\tfrac{1}{2}a)^2=\tfrac{1}{4}(a^2+4n);$$

folglich $x=\frac{1}{2}[-a+\sqrt{a^2+4n}]$ beträgt die Entfernung von dem einen Punkte, und $a+\frac{1}{2}[-a+\sqrt{a^2+4n}]=\frac{1}{2}[a+\sqrt{a^2+4n}]$ von dem anderen Punkte.

31. Die eine Seite des Quadrats sei x *cm*, so ist die verlängerte Seite x+53 *cm* und der Inhalt des Rechteckes, das x und x+53 *cm* zu Seiten hat, beträgt x(x+53) *qcm*. Es ist daher:

$$x(x+53)=58590; \text{ also } (x+26\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}(487)^2;$$

folglich x=217 *cm*.

32. Die Zahl, um welche man den ersten Faktor 6 vermehre und den zweiten Faktor 52 vermindere, heiße x, so heißen die beiden neuen Faktoren 6+x und 52—x und das Produkt derselben ist (6+x)(52—x). Weil dieses Produkt aber das 35fache der Zahl ist, um welche der erste Faktor vermehrt wurde, so ist: $(6+x)(52-x)=35x$; hieraus folgt: $x-5\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}$; also x=24.

33. *α*) Es sei die Zahl x, so ist: $x+\frac{1}{x}=2,9$ oder

$$x^2-2,9x=-1; \text{ daher } x_1=2\tfrac{1}{2},\ x_2=\tfrac{2}{5}.$$

β) $x+\frac{1}{x}=m$; $(x-\frac{1}{2}m)^2=\frac{1}{4}m^2-1$; $x=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-1}$.

34. α) $\frac{1}{x}-x=6{,}09$; $x^2+6{,}09x=1$; $x_1=\frac{4}{25}$; $x_2=-6\frac{1}{4}$.

β) $\frac{1}{x}-x=n$; $(x+\frac{1}{2}n)^2=\frac{1}{4}n^2+1$; $x=-\frac{1}{2}n\pm\sqrt{\frac{1}{4}n^2+1}$.

35. Heißt x der eine Teil der Linie a, so ist der andere $a-x$. Weil nun der eine Teil x die mittlere Proportionale zwischen a und $a-x$ sein soll, so ist:

$a:x=x:(a-x)$. Hieraus erhält man:

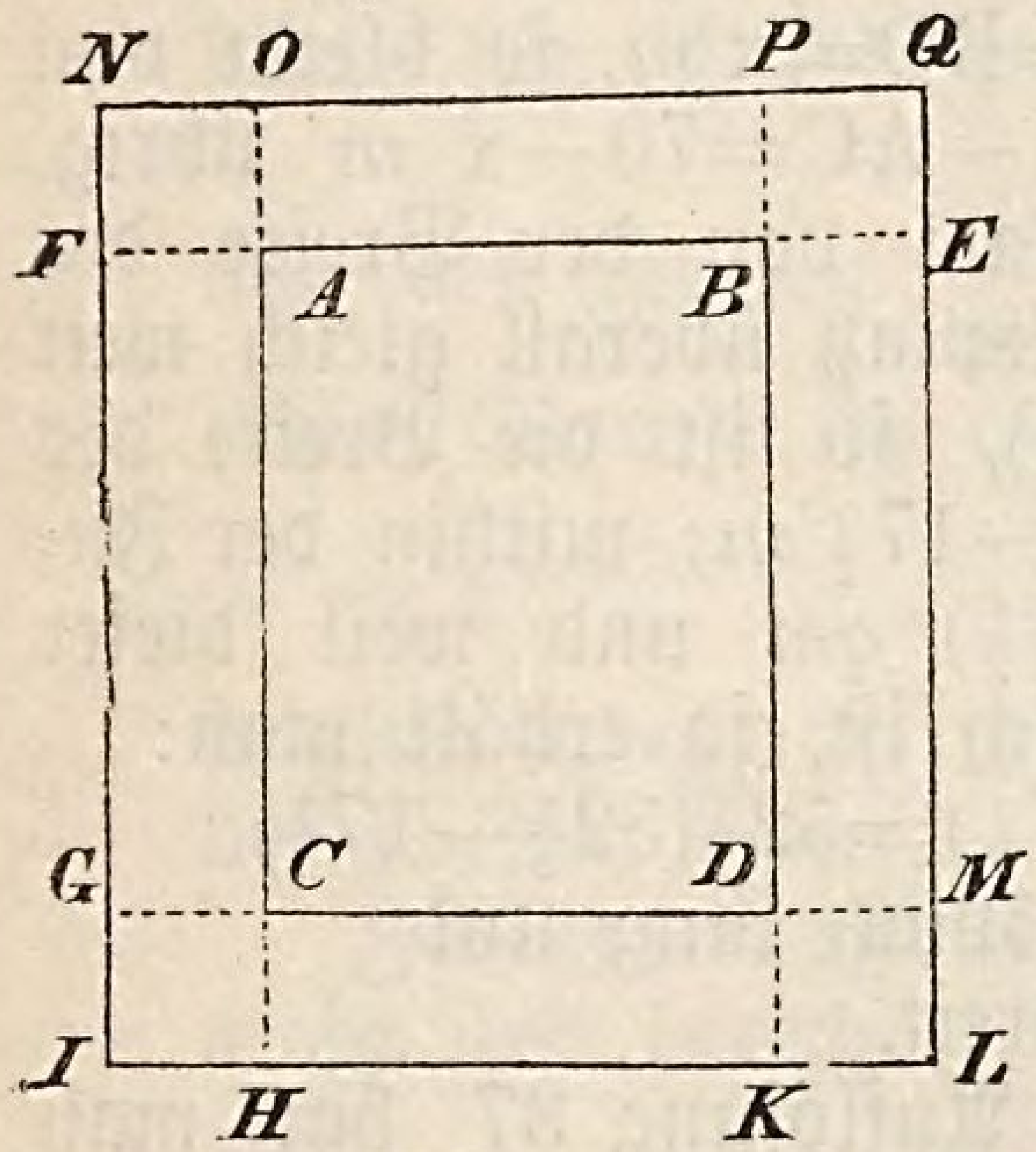
$a(a-x)=x^2$; oder $x^2+ax=a^2$;

folglich $x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)a=0{,}61803399a$ der eine Teil und
$a-x=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})a=0{,}38196601a$ der andere Teil.

36. Jede Seite der ersten Flur habe x *m*, so hat die Seite der zweiten $(x+2\frac{1}{3})$ *m*, mithin enthält die erste Flur x^2 und die zweite $(x+2\frac{1}{3})^2$ *qm*. Da nun auf 1 *qm* 9 Platten gehen, so gehen auf $x^2+(x+2\frac{1}{3})^2$ *qm* $[x^2+(x+2\frac{1}{3})^2]\times 9$ Platten, und weil dies 1429 Platten ausmacht, so ist:

$$[x^2+(x+2\tfrac{1}{3})^2]\times 9=1429.$$

Hieraus folgt $x=\frac{23}{3}$ *m* ist die erste Flur lang und $x+2\frac{1}{3}=10$ *m* die zweite Flur; mithin gehen auf die erste $(\frac{23}{3})^2.9=23^2=529$ Platten und $(10)^2.9=900$ Platten auf die zweite Flur.



37. α) Die Breite des Rahmens AF=AO u. s. w. betrage x *cm*. Da nun AC=BD=99 *cm* und AB=CD=66 *cm* ist, so haben die beiden gleichen Rechtecke ACFG und BEDM $2\times 99x=198x$ *qcm* und die beiden gleichen Rechtecke AOBP und CDHK $2.66x=132x$ *qcm*. Die vier genannten Rechtecke haben also zusammen 330x *qcm*. Um nun die ganze Fläche des Rahmens zu erhalten, müssen die vier gleichen in den Ecken liegenden Quadrate AFNO, BEPQ, DMKL, GICH, wovon jedes x^2 *qcm* enthält, zu 330x *qcm* addiert werden, wonach die ganze Fläche des Rahmens also $4x^2+330x$ *qcm* beträgt, und weil der Inhalt des Rahmens mit dem Spiegelglase gleiche Oberfläche haben soll, so ist: $4x^2+330x=99\times 66$; hieraus folgt $x=16{,}5$ *cm*.

β) Ist ON=AO=x, so ist OH=IN=a+2x; folglich der Inhalt des Rechtecks HINO=x(a+2x), und da das Rechteck HINO=PQLK ist, so beträgt der Inhalt dieser beiden Rechtecke 2x(a+2x). Ferner ist das Rechteck ABOP=CDHK und ihre Inhalte betragen 2x . b=2bx. Hiernach hat der

Rahmen eine Oberfläche von $2x(a+2x)+2bx=2x(a+b+2x)$ *qcm*. Es ist also, wenn der Rahmen das pfache des Spiegels sein soll:

$$2x(a+b+2x)=abp;\text{ hieraus folgt, daß}$$
$$x=\tfrac{1}{4}[-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4abp}].$$

38. Die Gesellschaft zähle x Mitglieder, so muß jedes Mitglied zur Beschaffung einer Summe von 336 *M* dazu $\frac{336}{x}$ *M* beitragen. Weil früher die Gesellschaft die nämliche Summe von 336 *M* aufzubringen hatte, aber 3 Mitglieder weniger zählte, also nur $x-3$ Mitglieder vorhanden waren, so mußte jedes 2 *M* mehr beitragen, also $\frac{336}{x}+2$ *M* bezahlen; folglich mußten $x-3$ Mitglieder $(x-3)\left(\frac{336}{x}+2\right)$ *M* beitragen. Es ist daher:

$$(x-3)\left(\frac{336}{x}+2\right)=336 \text{ oder } (x-1\tfrac{1}{2})^2=(22\tfrac{1}{2})^2.$$

Hieraus folgt $x=24$ Mitglieder.

39. Zur besseren Veranschaulichung beziehen wir uns bei Auflösung dieser Aufgabe auf die zu der Auflösung 37 gezeichnete Figur, und es sei hier $NI=OH=PK=QL=70$ *m* lang und $NQ=EF=GM=IL=52\frac{1}{2}$ *m* breit. Nun sei die lange Seite des abzusteckenden Grasplatzes $AC=BD=x$ *m*, so bleibt von der Länge des Gartens noch $OH-AC=70-x$ *m* übrig, und weil dies ebensoviel beträgt, als von der Breite des Gartens verloren geht (da der Grasplatz überall gleich weit von der Umzäunung entfernt bleibt), so ist die Breite des Grasplatzes gleich $52\frac{1}{2}-(70-x)=x-17\frac{1}{2}$ *m*; mithin der Inhalt desselben $=AB\times AC=x(x-17\frac{1}{2})$ *qm* und weil dieser der Hälfte des ganzen Gartens gleich ist, so erhält man:

$$x(x-17\tfrac{1}{2})=35\times 52\tfrac{1}{2},\text{ oder } x(x-17\tfrac{1}{2})=52\tfrac{1}{2}(52\tfrac{1}{2}-17\tfrac{1}{2}),$$

folglich $x=52\frac{1}{2}$ *m* ist der Grasplatz lang und $52\frac{1}{2}-17\frac{1}{2}=35$ *m* breit.

40. Mit Bezug auf die Figur in der Auflösung 37 hat man hier $IN=a$, $NQ=b$ *cm*. Die Seiten des einzuzeichnenden Rechteckes mögen x *cm* von den Seiten des äußeren Rechteckes abstehen, so ist also $BE=AF=GC$ u. s. w. $=x$. Die Breite des Rechteckes ABCD ist demnach $b-2x$ und seine Länge $a-2x$ *cm*; der Inhalt desselben also $(a-2x)(b-2x)$ *qcm*. Der Inhalt des äußeren Rechteckes ist ab *qcm*, und nachdem hiervon der Inhalt des eingezeichneten Rechteckes weggenommen wird, bleibt noch $ab-(a-2x)(b-2x)$ *qcm* übrig. Weil nun der Inhalt des inneren Rechteckes dem nten Teil von $ab-(a-2x)(b-2x)$ gleich ist, so ist also:

$$(a-2x)(b-2x)=\frac{ab-(a-2x)(b-2x)}{n};$$

oder: $4x^2(n+1)-2x(n+1)(a+b)=-abn$;

folglich $x=\frac{a+b}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{a+b}{4}\right)^2-\frac{abn}{4(n+1)}}=$

$\frac{1}{4}(a+b)-\frac{1}{4}\sqrt{(a+b)^2-4nab:(n+1)}$ *cm.*

41. Er habe x *kg* Kaffee, also x+45 *kg* Zucker gekauft. Da jede Sorte 264 *M* kostet, so kommt 1 *kg* Kaffee im Einkaufspreise auf $\frac{264}{x}$ *M* und 1 *kg* Zucker auf 264:(x+45) *M* zu stehen. Die $14\frac{1}{2}$ *kg* Kaffee, die er verkauft, kosten ihm also $(264\times14\frac{1}{2}):x$ *M* und die verkauften $28\frac{1}{2}$ *kg* Zucker kosten $(264\times28\frac{1}{2}):(x+45)$ *M*. Er hat die $14\frac{1}{2}$ *kg* Kaffee und $28\frac{1}{2}$ *kg* Zucker mit 20 pCt. Nutzen für 93 *M* verkauft, folglich haben dieselben (93.100):120=77,50 *M* gekostet. Es ist daher

$$\frac{264.14\frac{1}{2}}{x}+\frac{264.28\frac{1}{2}}{x+45}=77{,}50;$$

woraus x=120 *kg* Kaffee und daher 120+45=165 *kg* Zucker.

42. Es koste das *kg* der ersten Ware x *Fl*, so kostet das *kg* der zweiten Ware, weil 60 *kg* derselben 4 *Fl* mehr kosten, als 60 *kg* der ersten, $x+\frac{4}{60}=x+\frac{1}{15}$ *Fl*. Nimmt man von jeder Ware für $8\frac{2}{5}$ *Fl*, so erhält man von der ersten $\frac{8\frac{2}{5}}{x}$ *kg* und von der zweiten $\frac{8\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{15}}$ *kg*, und weil man nun von der ersten Ware 8 *kg* mehr, als von der zweiten erhält, so ist:

$$\frac{8\frac{2}{5}}{x}=\frac{8\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{15}}+8;$$

folglich $x=\frac{7}{30}$ *Fl* kostet 1 *kg* der ersten und $\frac{3}{10}$ *Fl* das *kg* der zweiten Ware.

Zweite Auflösung. Nimmt man von der ersten Ware x *kg* und berechnet den Preis von 60 *kg* jeder Ware, so erhält man: $60.\left\{\frac{8{,}4}{x-8}-\frac{8{,}4}{x}\right\}=4$; daher x=36 *kg* von der ersten Ware und 36−8=28 *kg* der zweiten Ware; daher kostet 1 *kg* der ersten Ware $8{,}4:36=\frac{7}{30}$ *Fl* und 1 *kg* der zweiten Ware $8{,}4:28=\frac{3}{10}$ *Fl*.

43. α) Die Zahl sei x, so ist nach den Angaben der Aufgabe:

$$\frac{n}{x}=n-x \text{ oder: } x^2-nx=-n.$$

Hieraus erhält man: $x=\frac{1}{2}(n\pm\sqrt{n^2-4n})$.

β) Da die Ziffer rechter Hand das Doppelte der Ziffer linker Hand ausmacht, so heißt die gesuchte Zahl, wenn wir die

Ziffer linker Hand mit x bezeichnen: $10x+2x=12x$. Nun ist die Summe der beiden Ziffern $x+2x$ oder $x+x+x$. In den beiden Ziffern ist also die Ziffer der Zehner 3mal als Summand vorhanden; ihr Produkt ist also $x.x.x=x^3$, und weil die Zahl, durch das Produkt ihrer Ziffern dividiert, 3 zum Quotienten giebt, so muß das dreifache Produkt aus den beiden Ziffern der Zahl selbst gleich sein; es ist also: $3x^3=12x$ oder $3x(x^2-4)=0$; daher $x^2-4=0$;

also $x=2$.

Demnach heißt die Zehnerziffer 2 und die Einerziffer $2.2=4$, die Zahl selbst also 24. Man könnte auch noch auf folgende Weise verfahren: Die Ziffer der Zehner ist x und die der Einer ist 2x, ihr Produkt also $x.2x=2x^2$. Da nun ihr Produkt auch x^3 beträgt, so muß auch $x^3=2x^2$ sein. Hieraus erhalten wir $x^3-2x^2=0$ oder $x^2(x-2)=0$; daher $x-2=0$; also $x=2$.

44. Das Pferd koste x ℳ. Gewinnt er beim Verkaufe desselben $\frac{1}{3}$ mal so viel Prozente, als es ihm gekostet, so gewinnt er $\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{100}$ ℳ. Daher ist:

$$x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{100}=432;\ x=240\ ℳ.$$

Zweite Auflösung. Hat er x ℳ beim Verkaufe gewonnen, so hat er das Pferd zu $432-x$ ℳ gekauft. Hieran gewinnt er $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{432-x}{10}\right)^2$ ℳ. Daher ist: $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{432-x}{10}\right)^2=x$; $x=192$ ℳ und daher kostet das Pferd $432-192=240$ ℳ.

45. Zum ersten Male habe er x *kg* gekauft für 216 ℳ, so kostet ihm 1 *kg* $\frac{216}{x}$ ℳ. Beim zweiten Einkaufe von derselben Ware muß er für jedes *kg* 1 ℳ mehr bezahlen, weshalb ihm jetzt 1 *kg* $\frac{216}{x}+1=\frac{216+x}{x}$ ℳ kostet. Auf diese Weise erhält er aber für dasselbe Geld, nämlich 216 ℳ, nur $(x-3)$ *kg*, welche also $(x-3)\left(\frac{216+x}{x}\right)$ ℳ kosten. Es ist daher $(x-3)\left(\frac{216+x}{x}\right)=216$, woraus $x=27$ *kg*.

Zweite Auflösung. Das *kg* habe x ℳ gekostet; berechnet man hieraus, wie viel *kg* er jedesmal gekauft, so erhalten wir die Gl. $\frac{216}{x}-\frac{216}{x+1}=3$; also $x=8$ ℳ und er kaufte $216:8=27$ *kg*.

46. Es sei die Peripherie des Vorderrades x *m* groß, so dreht sich

dasselbe auf einer Strecke von 120 *m* $\frac{120}{x}$mal herum, und da es sich 6mal mehr herumdreht, als das Hinterrad, so dreht sich dieses auf derselben Strecke nur $\frac{120}{x}-6=\frac{6(20-x)}{x}$mal herum, und demnach ist die Peripherie des Hinterrades $120:\frac{6(20-x)}{x}=\frac{20x}{20-x}$ *m*. Vermehrt man die Peripherie der Räder um 1 *m*, so ist die des Vorderrades $x+1$ und die des Hinterrades $\frac{20x}{20-x}+1=\frac{19x+20}{20-x}$ *m*, und die Räder laufen auf einer Strecke von 120 *m* bezüglich

$\frac{120}{x+1}$ und $120:\frac{19x+20}{20-x}=\frac{120(20-x)}{19x+20}$mal herum.

Da in diesem Falle die Vorderräder 4mal öfter umlaufen, so erhält man:

$$\frac{120}{x+1}-4=\frac{120(20-x)}{19x+20} \text{ oder } \frac{29-x}{x+1}=\frac{30(20-x)}{19x+20}.$$

Hieraus folgt $x=4$, und daher ist die Peripherie des Hinterrades 5 *m*.

47. Heißt der Divisor x, so ist der Dividend $x-2\frac{1}{2}$, also heißt der Quotient $\frac{x-2\frac{1}{2}}{x}$. Da dieser Quotient nebst seinem reciproken Wert $=\frac{x}{x-2\frac{1}{2}}\ldots 2\frac{1}{2}$ ausmacht, so ist:

$$\frac{x-2\frac{1}{2}}{x}+\frac{x}{x-2\frac{1}{2}}=2\tfrac{1}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich $x=5$ und daher $x-2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$; der Quotient heißt also $2\frac{1}{2}:5$.

Mit allgemeinen Zahlzeichen hat man, wenn man $2\frac{1}{2}=n$ setzt: $\frac{x-n}{x}+\frac{x}{x-n}=n$. Durch Entwickelung dieser Gleichung erhalten wir: $x^2-nx=\frac{n^2}{n-2}$ und hieraus folgt

$$x=\tfrac{1}{2}n\pm\tfrac{1}{2}n\sqrt{\frac{n+2}{n-2}}=\tfrac{1}{2}n\left(1\pm\sqrt{\frac{n+2}{n-1}}\right)$$ = dem Divisor und daher der Dividend $=\frac{1}{2}n\left(-1\pm\sqrt{\frac{n+2}{n-2}}\right)$.

48. A habe x *M* eingelegt, so hat B $3400-x$ *M* hergegeben. A beteiligt sich mit x *M* 12 Monate lang am Geschäft, oder mit 12x *M* 1 Monat lang und B mit $3400-x$ *M* 16 Monate oder mit $16(3400-x)$ *M* 1 Mon. lang. Mit $12x+16(3400-x)=(54400-4x)$ gewinnen beide, da sie an

Kapital samt Gewinn 2070 + 1920 = 3990 *M* erhalten, 3990 − 3400 = 590 *M*; also gewinnt jeder mit 1 *M* in 1 Monat $\frac{590}{54400-4x}=\frac{295}{2(13600-x)}$ *M*; demnach gewinnt A in 1 Monat mit x *M* $\frac{295x}{2(13600-x)}$ *M*. Da er ferner an Einlage und Gewinn 2070 *M* erhält, so gewinnt er in 12 Monaten 2070 − x *M*; mithin in 1 Monat $\frac{2070-x}{12}$ *M*. Es ist daher: $\frac{295x}{2(13600-x)}=\frac{2070-x}{12}$; folglich x = 1800 *M* Einlage des A und 3400 − 1800 = 1600 *M* Einlage des B.

Zweite Auflösung. A habe x *M* eingelegt. Berechnet man nun, wie viel ein jeder mit 1 *M* gewinnt und stellt diese Werte einander gleich, so erhalten wir die Gl.:

$$\frac{2070-x}{12x}=\frac{1920-(3400-x)}{16(3400-x)};\ x=1800\ M.$$

Dritte Auflösung. A gewinne x *M*. Berechne hieraus, wie viel ein jeder mit 1 *M* gewinnt, so erhalten wir folgende Gl.:

$\frac{x}{12(2070-x)}=\frac{1920-(1330+x)}{16(1330+x)}$; x = 270 *M* Gewinn; daher Einlage des A 2070 − 270 = 1800 *M* und Einlage des B 3400 − 1800 = 1600 *M*.

49. Die erste Summe betrage x *Fl*, so ist die zweite 1056 − x *Fl*. Da die erste Summe bar mit 279,18 *Fl* bezahlt wird, so beträgt der Diskonto x − 279,18 *Fl* für die ganze Summe; für 1 *Fl* $\frac{x-279{,}18}{x}$. Er diskontiert die Summe mit 19 pCt. jährlich, mithin beträgt der Diskonto für 1 *Fl* in 1 Monat $\frac{19}{1200}$ *Fl*; folglich mußte er die erste Summe bezahlen nach $\frac{x-279{,}18}{x}:\frac{19}{1200}=\frac{1200(x-279{,}18)}{19x}$ Monaten und die zweite nach $\frac{719{,}21-x}{1056-x}:\frac{19}{1200}=\frac{1200(719{,}21-x)}{19(1056-x)}$ Monaten. Weil aber die zweite Summe $1\frac{1}{4}$ Monate später zu entrichten war, als die erste, so ist: $\frac{1200(x-279{,}18)}{19x}+1\frac{1}{4}=\frac{1200(719{,}21-x)}{19(1056-x)}$; x = 316,80 *Fl* die erste Summe und 1056 − 316,80 = 739,20 *Fl* die zweite. Die erste Summe ist zu bezahlen nach $\frac{1200(316{,}80-279{,}18)}{19\,.\,316{,}80}=7\frac{1}{2}$ Monaten und die zweite nach $7\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}=8\frac{3}{4}$ Monaten.

Zweite Auflösung. Die erste Summe sei nach x Monaten zu bezahlen. Berechnet man bei dieser Annahme, wie viel jede der beiden zu zahlenden Summen beträgt, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\frac{336{,}79\times100}{100-(x+1\frac{1}{4})1\frac{7}{12}}+\frac{279{,}18\times100}{100-1\frac{7}{12}x}=1056.$$

$x=7\frac{1}{2}$ Mon. u. s. w.

50. Der Fabrikant könne nach x Monaten beide Summen zusammen bezahlen, ohne daß hierdurch weder dem einen noch dem andern Schaden erwachsen soll, so bezahlt er die erste Summe von 8800 ℳ $(x-7)$ Monate zu spät, dagegen die zweite von 5940 ℳ $(12-x)$ Monate zu früh. Da er für die zu spät bezahlte Summe die Zinsen zu 5 pCt. fürs Jahr vergüten muß, so betragen dieselben von 8800 ℳ in $(x-7)$ Monaten $\frac{8800\times\frac{5}{12}(x-7)}{100}=\frac{110(x-7)}{3}$ ℳ. Weil dem Fabrikanten ferner für die zu früh bezahlte Summe von 5940 ℳ ein Rabatt zu 5 pCt. auf Hundert abzuziehen gestattet ist, so beträgt dieser Rabatt für $(12-x)$ Monate $\frac{5}{12}(12-x)=\left(5-\frac{5x}{12}\right)$ pCt.; mithin beträgt der Rabatt von 5940 ℳ in $(12-x)$ Monaten $\frac{5940\times\frac{5}{12}(12-x)}{100+\left(5-\frac{5x}{12}\right)}=\frac{5940(12-x)}{252-x}$ ℳ. Durch jene Vergütung soll nun dieser Abzug ausgeglichen werden; demnach ist: $\frac{110(x-7)}{3}=\frac{5940(12-x)}{252-x}$; folglich $x=9$ Mon.

51. Beide Summen seien nach x Jahren zusammen zu bezahlen, so ist nach der vorigen Auflösung:

$$\frac{ap(x-t)}{100}=\frac{bp(t'-x)}{100+p(t'-x)};$$

$$a(x-t)[100+p(t'-x)]=100b(t'-x);$$

$$apx^2-x[100(a+b)+ap(t+t')]=-[100(at+bt')+aptt'];$$

$$\left(x-\frac{100(a+b)+ap(t+t')}{2ap}\right)^2=\left(\frac{100(a+b)+ap(t+t')}{2ap}\right)^2-\frac{100(at+bt')+aptt'}{ap}.$$

Setzt man der Abkürzung wegen

$$\frac{100(a+b)+ap(t+t')}{2ap}=M \text{ und}$$

$$\frac{100(at+bt')+aptt'}{ap}=N, \text{ so hat man:}$$

$(x-M)^2=M^2-N$. Also: $x-M=\pm\sqrt{M^2-N}$;
folglich $x=M\pm\sqrt{M^2-N}$ Jahre.

52. Heißt die eine Kathete x, so heißt die andere, da die Summe derselben b beträgt, $b-x$. Ferner sei die Höhe y, so ist die Hypotenuse $a-y$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$(1)\ x^2+(b-x)^2=(a-y)^2.$$

Nun wird der Inhalt des rechtwinkeligen Dreiecks sowohl durch $\frac{1}{2}x(b-x)$, als auch durch $\frac{1}{2}y(a-y)$ ausgedrückt; daher ist:

$$(2)\ x(b-x)=y(a-y).$$

Entwickelt man diese beiden Gleichungen und multipliziert die zweite mit 2, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ 2x^2-2bx+b^2=a^2-2ay+y^2\\(4)\ -2x^2+2bx\ =\ +2ay-2y^2\end{array}\right\}\text{ addiert, giebt:}$$

$(5)\ y^2=a^2-b^2$; also $(6)\ y=\sqrt{a^2-b^2}=$ der Höhe.

Setzt man den Wert für y und y^2 in die entwickelte Gleichung (3), so erhält man:

$(7)\ x^2-bx=a^2-b^2-a\sqrt{a^2-b^2}$. Hieraus ergiebt sich:
$(x-\frac{1}{2}b)^2=a^2-\frac{3}{4}b^2-a\sqrt{a^2-b^2}$; folglich:
$x=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2-a\sqrt{a^2-b^2}}=$ den beiden Katheten, und
$a-y=a-\sqrt{a^2-b^2}=$ der Hypotenuse.

53. Der Behälter werde durch die erste Röhre in x Stunden, also durch die zweite in $x+2$ Stunden gefüllt, so füllt die erste stündlich $\frac{1}{x}$ und die zweite $\frac{1}{x+2}$ des Behälters. Da nun der Behälter durch beide Röhren zusammen in $1\frac{7}{8}$ Stunden gefüllt wird, so füllt in dieser Zeit die erste $\frac{1\frac{7}{8}}{x}$ und die zweite $\frac{1\frac{7}{8}}{x+2}$ des Behälters. Es ist daher

$$\frac{1\frac{7}{8}}{x}+\frac{1\frac{7}{8}}{x+2}=1;$$

folglich $x=3$ Stunden durch die eine und in 5 Stunden durch die andere Röhre.

54. Der erste vollende die Mauer allein in x Tagen, also der zweite allein in $(x+3)$ Tagen, so macht der erste täglich $\frac{1}{x}$ und der zweite $\frac{1}{x+3}$ der Mauer. Fängt der erste $1\frac{1}{2}$ Tag später an zu arbeiten, als der andere, so wird die Mauer in $5\frac{1}{2}$ Tagen fertig. Hiernach arbeitet der erste 4 Tage, und der zweite $5\frac{1}{2}$ Tage. Während dieser Zeit macht der eine $\frac{4}{x}$ und der andere $\frac{5\frac{1}{2}}{x+3}$ der Mauer.

Es ist daher:

$$\frac{4}{x}+\frac{5\frac{1}{2}}{x+3}=1;$$

folglich $x=8$ Tage, die Zeit, in welcher der erste die Mauer vollendet und 11 Tage für den zweiten Arbeiter.

55. Die I. Klasse habe x Schüler und da dieselben 11,90 *Fl* aufbrachten, so gab jeder $\frac{11,90}{x}$ *Fl*. Die II. Klasse, die 6 Schüler mehr hatte, als die I., brachte 9,20 *Fl*; also 1 Schüler $\frac{9,20}{x+6}$ *Fl*. Die III. Klasse, die $6+5=11$ Schüler mehr hatte, als die I., trug 8,40 *Fl* bei; also 1 Schüler $\frac{8,40}{x+11}$ *Fl*. Weil nun 1 Schüler der I. Klasse so viel gab, als 1 Schüler der II. und III. Klasse zusammen, so ist:

$$\frac{11,90}{x}=\frac{9,20}{x+6}+\frac{8,40}{x+11}.$$

Hieraus ergiebt sich $x=17$ Schüler hatte die I. Klasse, daher $17+6=23$ die II. und $17+11=28$ die III. Klasse.

56. Die Breite des Rechteckes betrage x *m*, so ist die Länge $(x+119)$ *m*. Da nun die Diagonale ($=221$ *m*) dieses Rechteckes dasselbe in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke teilt, deren beide Katheten x und $x+119$ *m* betragen, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:
$x^2+(x+119)^2=221^2$; folglich $x=85$ *m* breit und 204 *m* lang.

57. Setzt man für 119 und 221 der vorigen Aufgabe die allgemeinen Zeichen d und h und beträgt die Länge x *m*, so ist die Breite $x-d$ *m*. Es ist daher

$$x^2+(x-d)^2=h^2; \text{ oder } x^2-dx=\tfrac{1}{2}(h^2-d^2);$$
$$(x-\tfrac{1}{2}d)^2=\tfrac{1}{4}d^2+\tfrac{1}{2}(h^2-d^2)=\tfrac{1}{4}(2h^2-d^2).$$

Also $x=\frac{1}{2}[d+\sqrt{2h^2-d^2}]$ *m* Länge und
$\frac{1}{2}[\sqrt{2h^2-d^2}-d]$ *m* Breite.

58. α) Ist der ganze Umfang des Rechteckes 1034 *m*, so beträgt der halbe Umfang 517 = der Länge + der Breite des Rechteckes. Die Länge betrage nun x *m*, so ist die Breite $(517-x)$ *m*, und da die Diagonale 407 *m* mißt, so ist $x^2+(517-x)^2=407^2$; folglich $x=385$ *m* die Länge und $517-385=132$ *m* die Breite.

β) Setzt man für 1034 und 407 der vorigen Aufgabe die allgemeinen Zeichen u und d, so ist, wenn die Länge x und die Breite $\frac{1}{2}u-x$ beträgt: $x^2+(\frac{1}{2}u-x)^2=d^2$, oder

$$x^2-\tfrac{1}{2}ux=\tfrac{1}{8}(4d^2-u^2); \text{ daher ist:}$$
$$(x-\tfrac{1}{4}u)^2=\tfrac{1}{16}(8d^2-u^2);$$

folglich $x=\frac{1}{4}(u+\sqrt{8d^2-u^2})$ *m* die Länge und daher
$\frac{1}{4}(u-\sqrt{8d^2-u^2})$ *m* die Breite.

59. Bestimmen wir zunächst den Preis der Eier. Derselbe sei y *Nkr*. Wollte A der B ihre Eier für die Äpfel geben, so würde A 10 *Nkr* verlieren; daraus folgt, daß die Äpfel 10 *Nkr* weniger wert sind, als die Eier; folglich kosten die Äpfel (y—10) *Nkr*. Behält nun A deshalb $\frac{2}{5}$ der Eier, so vertauscht sie $\frac{3}{5}$ derselben gegen alle Äpfel; in diesem Falle haben die Äpfel einen Wert von $\frac{3}{5}$y *Nkr*. Durch diesen auf solche Weise bewerkstelligten Tausch würde B aber 6 *Nkr* an ihren Äpfeln verlieren, mithin war der von B festgesetzte Preis der Äpfel in diesem Falle ($\frac{3}{5}$ y+6) *Nkr*; daher ist:

$$y-10=\frac{3}{5}y+6.$$

Aus dieser Gl. folgt, daß y=40 *Nkr* = dem Preise der Eier; mithin ist der Wert der Äpfel 40—10=30. Habe A nun x Eier, so hat B 3x Äpfel; folglich kostet 1 Äpfel $\frac{10}{x}$ *Nkr* und 1 Ei $\frac{40}{x}$ *Nkr*. Um nun den Schaden auszugleichen, den B durch die Vertauschung erlitten, verkauft sie 1 Ei zu 3 *Nkr*, also $\frac{3}{5}$x Eier zu $3.\frac{3}{5}x=\frac{9}{5}$ *Nkr*. Dadurch gewinnt sie aber noch den Preis von 12 Äpfeln, also $12\cdot\frac{10}{x}$ *Nkr*. In diesem Falle ist also der Preis der Äpfel $\left(\frac{9}{5}x-12\cdot\frac{10}{x}\right)$ *Nkr*. Daher ist: $\frac{9}{5}x-12\cdot\frac{10}{x}=30$ oder

$$x^2-\frac{50}{3}x=\frac{200}{3}.$$

Aus dieser Gl. ergiebt sich, daß x=20 Eier; daher hatte B 3.20=60 Äpfel. Ein Ei kostet 40 : 20=2 *Nkr* und 1 Apfel 30 : 60=$\frac{1}{2}$ *Nkr*

60. A sei von B x *km*, so macht der Kurier, der diesen Weg in 14 Std. zurück legt, stündlich $\frac{1}{14}$x *km* und braucht zu 37$\frac{1}{2}$ *km* $\frac{37\frac{1}{2}}{x}\times14=\frac{525}{x}$ Stunden. Der zweite zu gleicher Zeit mit dem ersten abgehende Kurier hat x+18$\frac{3}{4}$ *km* zu machen und will dennoch mit dem ersten zu gleicher Zeit ankommen in B; deswegen sucht er bei je 37$\frac{1}{2}$ *km* dem ersten $\frac{1}{2}$ Std. abzugewinnen. Während also der erste zu 37$\frac{1}{2}$ *km* $\frac{525}{x}$ Std. gebraucht, hat dieser nur $\frac{525}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1050-x}{2x}$ nötig und macht daher stündlich $37\frac{1}{2}:\frac{1050-x}{2x}=\frac{75x}{1050-x}$ *km*, mithin legt er

in den 14 Std., wonach er mit dem ersten in B zusammentrifft, $\frac{14 \times 75x}{1050-x}=\frac{1050x}{1050-x}$ *km* zurück und weil er nun den Weg von $x+18\frac{3}{4}$ *km* abgemacht hat, so ist $\frac{1050x}{1050-x}=x+18\frac{3}{4}$; folglich $x=131\frac{1}{4}$ *km*.

61. Legt der erste Kurier in x Stunden 1 *km* zurück, so ist der Weg von A nach $B=\frac{t}{x}$ *km*. Der zweite Kurier hat daher einen Weg von $\frac{t}{x}+s=\frac{t+sx}{x}$ *km* zu machen. Gewinnt dieser jenem bei je n *km* g Stunden ab, so gewinnt er ihm bei 1 *km* $\frac{g}{n}$ Stunden ab, daher gebraucht er zu 1 *km* $x-\frac{g}{n}=\frac{nx-g}{n}$ Stunden; folglich zu $\frac{t+sx}{x}$ *km* auch $\frac{(t+sx)(nx-g)}{xn}$ Stunden. Da beide gleich viel Stunden unterwegs sind, so ist: $\frac{(t+sx)(nx-g)}{nx}=t$ oder $x^2-\frac{gx}{n}=\frac{tg}{ns}$; daher

$x=\frac{g}{2n}+\sqrt{\frac{g^2}{4n^2}+\frac{tg}{ns}}$; daher ist der Weg von A nach B:

$$t:\left(\frac{g}{2n}+\sqrt{\frac{g^2}{4n^2}+\frac{tg}{ns}}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}s^2+\frac{nst}{g}}-\frac{1}{2}s \text{ km}.$$

62. Der eine brauche zu 1 Meile x Stunden, so macht der andere 1 Meile in $x+\frac{1}{8}$ Stunden. Bei ihrem Zusammentreffen nach $10\frac{1}{2}$ Stunden hat der eine $10\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$ und der andere $\frac{10\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{8}}$ Meilen gemacht, und weil sie zusammen in dieser Zeit 26 Meilen zurückgelegt haben, so ist:

$$\frac{10\frac{1}{2}}{x}+\frac{10\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{8}}=26;$$

folglich $x=\frac{3}{4}$ Stunden gebraucht der eine und $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ Stunden der andere.

Zweite Auflösung. Der eine habe beim Zusammentreffen x Meilen gemacht. Berechnet man bei dieser Annahme, wie viel Zeit jeder zur Zurücklegung einer Meile nötig hat, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{10\frac{1}{2}}{x}=\frac{10\frac{1}{2}}{26-x}+\frac{1}{8}.$$

$x=12$ Meilen; also hat der eine $10\frac{1}{2}:12=\frac{7}{8}$ und der andere $10\frac{1}{2}:(26-12)=\frac{3}{4}$ Stunden zu 1 Meile gebraucht.

63. Legt der letztere Körper in x Sekunden 1 Raumeinheit zurück, so legt der erste dieselbe in x+n Sekunden zurück. Treffen sie nach t Sekunden zusammen, so hat der eine $\frac{t}{x}$ und der andere $\frac{t}{x+n}$ Raumeinheiten gemacht. Es ist daher: $\frac{t}{x}+\frac{t}{x+n}=e$; folglich $x=\frac{1}{2}[2t-ne+\sqrt{n^2e^2+4t^2}]:e$ Sek.

64. Laufen beide Körper hintereinander, statt gegeneinander, und legt der nachfolgende 1 Raumeinheit in x Sekunden zurück, während der vorangehende dazu x+n Sekunden gebraucht, so hat der nachfolgende in t Sekunden, wo beide zusammentreffen, $\frac{t}{x}$ und der andere $\frac{t}{x+n}$ Raumeinheiten zurückgelegt. Da nun der nachfolgende Körper beim Zusammentreffen mit dem andern nicht allein ihre anfängliche Entfernung von e Raumeinheiten, sondern auch den Weg des vorangehenden zurücklegt, so ist:

$$\frac{t}{x}=e+\frac{t}{x+n}, \text{ oder: } ex^2+enx=nt;$$

folglich $x=\sqrt{\frac{n(en+4t)}{4e}}-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}(\sqrt{n(en+4t)}:e-n)$ Sekunden.

65. Die Entfernung betrage x *km*, so hat, da der erste Bote beim Zusammentreffen mit dem zweiten 90 *km* gemacht, der erste $\frac{1}{2}(x+90)$ und der zweite $\frac{1}{2}(x-90)$ *km* zurückgelegt. Der erste von A nach B abgehende Bote gebraucht nun zur Zurücklegung der noch abzumachenden $\frac{1}{2}(x-90)$ *km* 9 Tage; also macht er täglich $\frac{1}{18}(x-90)$ *km* und der andere, welcher $\frac{1}{2}(x+90)$ *km* in 16 Tagen macht, legt täglich $\frac{x+90}{32}$ *km* zurück; demnach macht der erste täglich $\frac{x-90}{18}-\frac{x+90}{32}=\frac{7x-2250}{288}$ *km* mehr, als der zweite. Gewinnt der erste dem zweiten täglich $\frac{7x-2250}{288}$ *km* ab, so hat er ihm die 90 *km* in $90:\frac{7x-2250}{288}=\frac{25920}{7x-2250}$ Tagen abgewonnen. Der erste hatte also vom Punkte A aus bis zu dem Punkte des Zusammentreffens mit dem zweiten $\frac{25920}{7x-2250}$ Tage gebraucht, in welchen er, weil er täglich $\frac{x-90}{18}$ *km* machte, $\frac{x-90}{18}\times$

$\frac{25920}{7x-2250}=\frac{(x-90)1440}{7x-2250}$ *km* zurücklegte. Es ist daher

$$\frac{(x-90)1440}{7x-2250}=\frac{x+90}{2}; \text{ folglich } x=630\ km.$$

66. Der erste habe den Weg in x Stunden abgemacht, so hat der zweite, 2 Stunden später abgehende, aber zu gleicher Zeit mit dem ersten an dem Orte seiner Bestimmung ankommende Bote x—2 Stunden gebraucht. Da sie $2\frac{1}{12}$ Stunden nach Abgang des zweiten Boten zusammentreffen, so ist der erste $4\frac{1}{12}$ Stunden unterwegs, in welchen er $\frac{4\frac{1}{12}}{x}$ des Weges von A nach B abmachte, und der zweite $2\frac{1}{12}$ Stunden, worin er $\frac{2\frac{1}{12}}{x-2}$ des ganzen Weges zurücklegte. Es ist also:

$$\frac{4\frac{1}{12}}{x}+\frac{2\frac{1}{12}}{x-2}=1;$$

folglich x=7 Stunden, die Zeit, in welcher der erste, und daher 7—2=5 Stunden, in welcher der zweite den Weg von AB und BA abmachte.

67. α) Der erste Körper lege den Weg von A nach B in x Sekunden zurück, so macht er, da die Entfernung AB 910 *m* beträgt, in jeder Sekunde $910\times\frac{1}{x}$ *m*. Da der erste, 56 Sekunden früher abgehende Körper mit dem zweiten auf der Mitte des Weges zusammentrifft, so braucht der zweite zur Hälfte des Weges 56 Sekunden, also zum ganzen Wege 112 Sekunden weniger, als der erste; mithin macht er in jeder Sekunde $\frac{910}{x-112}$ *m*. Wenn sie nun bei gleichzeitigem Abgange nach 20 Sekunden eine Entfernung von 550 *m* haben, so haben sie in dieser Zeit 910—550=360 *m* zusammen zurückgelegt, vorausgesetzt, daß sie die Entfernung von 550 *m* vor ihrem Zusammentreffen hatten. Es ist daher

$$20\left(\frac{910}{x}+\frac{910}{x-112}\right)=360;$$

folglich x=182 Sekunden der eine, und 182—112=70 Sekunden der andere.

β) Der erste lege den Weg AB in x Sekunden zurück, so macht er in jeder Sekunde $\frac{d}{x}$ des Weges. Nun braucht der zweite 2n Sekunden weniger als der erste, um denselben Weg zu machen; mithin macht der zweite in jeder Sekunde $\frac{d}{x-2n}$ des Weges. Nimmt man nun an, daß die beiden t Sekunden

lang sich bewegenden Körper die Entfernung l vor oder nach ihrem Zusammentreffen haben, so haben beide Körper zusammen $d \mp l$ zurückgelegt. Hiernach ist nun:

$$t\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{x-2n}\right)=d\mp l;$$

$$(d\mp l)x^2-x[2n(d\mp l)+2dt]=-2dtn;$$

folglich $x=\frac{n(d\mp l)+dt+\sqrt{n^2(d\mp l)^2+t^2d^2}}{d\mp l}$

die Zeit, welche der erste Körper gebrauchte, und

$$x-2n=\frac{dt-n(d\mp l)+\sqrt{n^2(d\mp l)^2+t^2d^2}}{d\mp l}$$

Sekunden, welche der zweite gebraucht.

68. Der erste Körper mache in jeder Sekunde x *m*, so legt der zweite in jeder Sekunde $x-6$ *m* zurück. Um die Hälfte der Entfernung von 1800 *m*, d. i. um 900 *m*, zurückzulegen, gebraucht der erste $\frac{900}{x}$ und der zweite $\frac{900}{x-6}$ Sekunden. Weil aber der zweite zur Zurücklegung desselben Weges 5 Sekunden mehr gebraucht, als der erste, so ist:

$$\frac{900}{x}+5=\frac{900}{x-6};$$

folglich $x=36$ *m* macht der erste und $36-6=30$ *m* der zweite Körper in jeder Sekunde.

69. Beide Fußgänger mögen x Meilen in 1 Stunde, also 1 Meile in $\frac{1}{x}$ Stunde abmachen, A trifft die Gänse beim dritten Meilensteine vor R und B $2\frac{1}{2}$ Meile vor R, folglich haben die Gänse vom dritten Meilensteine ab, nachdem sie mit A und B zusammengetroffen, $3-2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Meile gemacht, wozu sie, da sie stündlich $\frac{1}{6}$ Meile machten, $\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=3$ Stunden gebrauchten. B macht die halbe Meile in $\frac{1}{2x}$ Stunden, also gebrauchte er dazu nur $3-\frac{1}{2x}$ Stunden. Da nun A bis zum Antreffen der Gänse auch $\frac{1}{2}$ Stunde gebrauchte, so ist B $3-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{5x-1}{2x}$ Stunden nach A vom dritten Meilensteine abgegangen. In dieser spätern Abgangszeit legen die Schafe noch $\frac{5x-1}{2x}\times\frac{1}{5}=\frac{5x-1}{10x}$ Meilen zurück; sie sind schon früher $\frac{x}{2}$ Meilen weit gekommen, wo A sie antrifft, also zusammen $\frac{x}{2}+\frac{5x-1}{10x}$ Meilen vom dritten Meilensteine ab

fortgerückt. Von jetzt ab geht B gleichzeitig mit denselben und er soll sie in y Stunden einholen. Er macht in 1 Stunde x Meilen, also in y Stunden xy Meilen; die Schafe machen in dieser Zeit $\frac{1}{2}$ y Meilen. Nun haben die Schafe zusammen gemacht $\frac{x}{2}+\frac{5x-1}{10x}+\frac{1}{5}y$; da B sie einholt, so ist dessen Weg derselbe, nämlich vom dritten Meilensteine ab; demnach ist:

$\frac{1}{2}x+\frac{5x-1}{10}+\frac{1}{5}y=xy$; hieraus folgt $y=\frac{5x}{10x-2}+\frac{1}{2x}$.

B holt sie auch $\frac{1}{6}$ Stunde eher ein, als er den zweiten Meilenstein erreicht. Vom dritten bis zum zweiten Meilenstein $=1$ Meile braucht er $\frac{1}{x}$ Stunde, also hat er bis zum Zusammentreffen mit den Schafen $\frac{1}{x}-\frac{1}{6}=\frac{6-x}{6x}$ Stunden nötig. Da er sie nun auch in $y=\frac{5x}{10x-2}+\frac{1}{2x}$ Stunden einholte, so ist: $\frac{6-x}{6x}=\frac{5x}{10x-2}+\frac{1}{2x}$; folglich $x_1=\frac{1}{2}$ und $x_2=\frac{3}{10}$. Also machte jeder der beiden Fußgänger in einer Stunde entweder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{10}$ Meile.

Zweite Auflösung. Hier habe x denselben Wert. A war $\frac{1}{2}$ Stunde vom dritten Meilensteine ab gegangen, also $\frac{1}{2}x$ Meilen, bis wo er die Schafe traf. In dieser halben Stunde waren die Schafe aber noch $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$ Meile weiter gegangen, also waren die Schafe den Gänsen, als diese sich am dritten Meilensteine befanden, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}$ Meilen vor. B traf die Schafe 10 Minuten früher, als er den zweiten Meilenstein erreichte, er war also noch $\frac{1}{6}x$ Meilen vom zweiten Meilensteine entfernt; mithin traf er die Schafe, nachdem er von der Mitte des dritten und zweiten Meilensteines ab $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x=\frac{3-x}{6}$ Meilen gegangen war, welche Strecke er in $\frac{3-x}{6x}$ Stunden abmachte. Da die Schafe in 1 Stunde $\frac{1}{5}$ Meile machten, so machten sie in dieser Zeit $\frac{3-x}{30x}$ Meilen. Also waren die Schafe zu der Zeit, wo die Gänse in der Mitte des dritten und zweiten Meilensteines waren, $\frac{3-x}{6}-\frac{3-x}{30x}$ Meilen den Gänsen voran. Ehe die Gänse vom dritten Meilensteine bis in die Mitte gekommen waren, hatten sie, da sie in jeder Stunde $\frac{1}{6}$ Meile machten, 3 Stunden ge-

braucht. Die Gänse machten in jeder Stunde $\frac{1}{6}$ Meile, die Schafe $\frac{1}{5}$ Meile, also kommen die Schafe den Gänsen in jeder Stunde $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ Meile mehr vor, demnach waren sie in den 3 Stunden $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Meile mehr vorgekommen. Es muß daher die Entfernung der Schafe von den Gänsen, als diese am dritten Meilensteine waren, nebst $\frac{1}{10}$ Meile, gleich der Entfernung sein, wo die Gänse $\frac{1}{2}$ Meile weiter waren. Es ist daher:

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{10}=\frac{3-x}{6}-\frac{3-x}{30x} \text{ oder } \tfrac{1}{2}x=\frac{3-x}{6}-\frac{3-x}{30x}.$$

Hieraus folgt $x_1=\frac{1}{2}$ und $x_2=\frac{3}{10}$.

70. x Sekunden nach Abgang des ersten Körpers mögen beide Körper 275 *m* voneinander entfernt sein, so hat der erste in jeder Sekunde 7 *m* zurücklegende Körper 7x *m*, und der zweite in x+22 Sekunden 8(x+22) *m* gemacht. Da sich nun beide Körper auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen, dessen Katheten 7x und 8(x+22) und dessen Hypotenuse 275 *m* beträgt, so hat man:

$$(7x)^2+64(x+22)^2=275^2;$$

folglich x=11 Minuten nach Abgang des ersten.

71. Es sei nach x Sekunden, so hat der eine cx und der andere c'(x+t) gemacht, und es ist daher nach der Auflösung 70:

$$(cx)^2+c'^2(x+t)^2=d^2;$$
$$x^2(c^2+c'^2)+2c'^2tx=d^2-c'^2t^2;$$
$$x^2+\frac{2c'^2tx}{c^2+c'^2}+\frac{c'^4t^2}{(c^2+c'^2)^2}=\frac{c'^4t^2}{(c^2+c'^2)^2}+\frac{d^2-c'^2t^2}{c^2+c'^2};$$

folglich $x=\pm\frac{\sqrt{(c'^4t^2+(d^2-c'^2t^2)(c^2+c'^2)}-c'^2t}{c^2+c'^2}$ Sekunden.

72. Angenommen beide Körper hätten nach x Sekunden die Entfernung d, so hat der eine in dieser Zeit cx und der andere c'x Raumeinheiten zurückgelegt. Da ihre anfänglichen Entfernungen von dem Durchschnittspunkte a und b sind, so sind ihre jetzigen Entfernungen von demselben a—cx und b—c'x. Es ist daher mit Bezug auf Auflösung 70:

$$(a-cx)^2+(b-c'x)^2=d^2;$$
$$x^2(c^2+c'^2)-2x(ac+bc')=d^2-a^2-b^2;$$
$$\left(x-\frac{ac+bc'}{c^2+c'^2}\right)^2=\left(\frac{ac+bc'}{c^2+c'^2}\right)^2+\frac{d^2-a^2-b^2}{c^2+c'^2}$$
$$=\frac{d^2(c^2+c'^2)-(ac'-bc)^2}{(c^2+c'^2)^2};$$

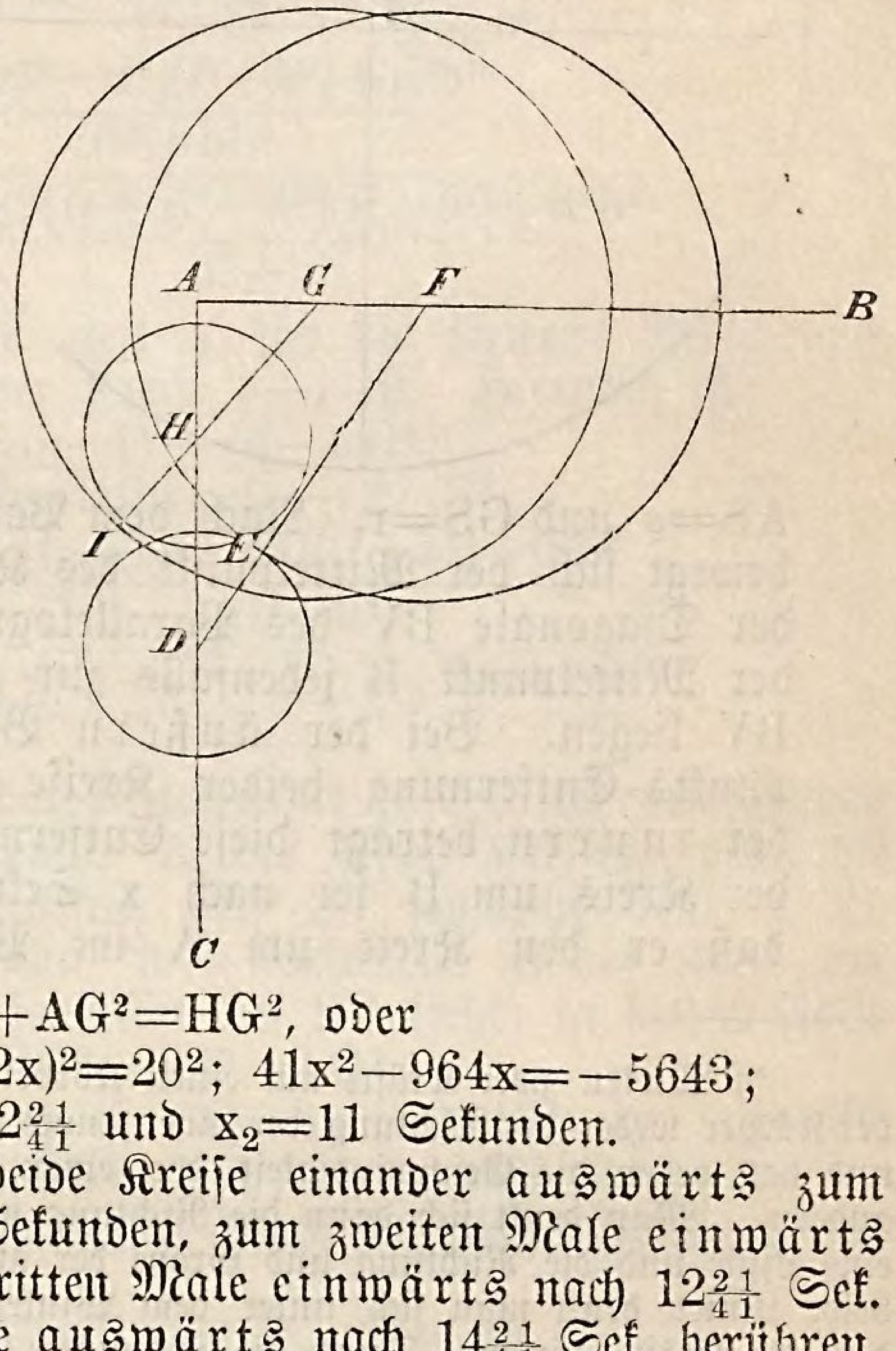
folglich $x=\frac{ac+bc'\pm\sqrt{d^2(c^2+c'^2)-(ac'-bc)^2}}{c^2+c'^2}$ Sekunden.

75. Die beiden Kreise um D und F mögen sich nach x Sekunden a u s w ä r t s berühren, so hat der Kreis um D, der in jeder

Sekunde 18 *cm* abmacht, 18x *cm* und der um F, welcher in jeder Sekunde 2 *cm* zurücklegt, 2x *cm* gemacht. Da nun AC=210 und AB=38 *cm* ist, so ist der eine vom Scheitelpunkte A um 210−18x und der andere um 38−2x *cm* entfernt, oder mit Bezug auf die Figur, so ist die Kathete AD=210−18x und die Kathete AF=38−2x *cm*. Da nun der Radius des Kreises um F=36 und der Radius des Kreises um D=16 *cm* beträgt und die beiden Radien DE+EF die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks ADF ausmachen, so ist:

$$(210-18x)^2+(38-2x)^2=(16+36)^2;$$

folglich $x_1=14\frac{21}{41}$ und $x_2=9$ Sekunden.



Nimmt man ferner an, daß beide Kreise sich nach x Sekunden einwärts berühren, so hat der Kreis um H 210−18x nnd der um G 38−2x *cm* gemacht, oder die Kathete AH=210−18x und AG=38−2x. Da die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks AGH aus der Differenz der beiden Radien der Kreise um G und H besteht, so ist GH=36−16=20 *cm*. Es ist also:

$$AH^2+AG^2=HG^2, \text{ oder}$$

$$(210-18x)^2+(38-2x)^2=20^2;\ 41x^2-964x=-5643;$$

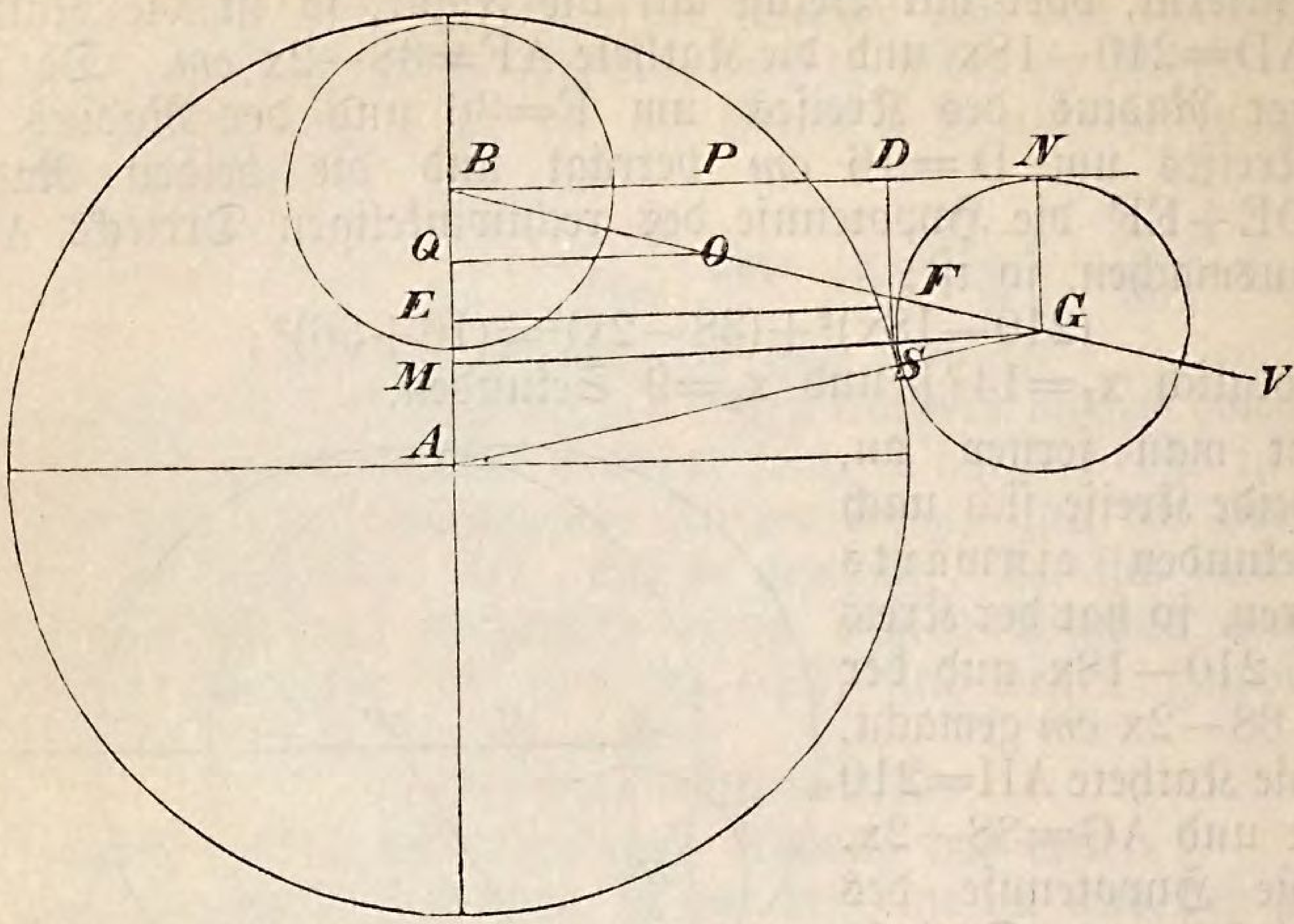
folglich $x_1=12\frac{21}{41}$ und $x_2=11$ Sekunden.

Mithin werden beide Kreise einander auswärts zum ersten Male nach 9 Sekunden, zum zweiten Male einwärts nach 11 Sek., zum dritten Male einwärts nach $12\frac{21}{41}$ Sek. und zum vierten Male auswärts nach $14\frac{21}{41}$ Sek. berühren.

Ferner ist mit Bezug auf die 74. Aufgabe die Zeit, nach welcher die Mittelpunkte beider Kreise einander am nächsten sind, $\frac{2\times38+18\times210}{(2)^2+(18)^2}=\frac{9+14\frac{21}{41}}{2}=11\frac{31}{41}$ Sekunden und der Abstand der Mittelpunkte beider Kreise beträgt um diese Zeit $\frac{38\times18-2\times210}{\sqrt{(2)^2+(18)^2}}=\frac{264}{18,1107}=14,577$ *cm*.

Die Auflösung von 77 folge zuerst.

76 und 77. Es sei in nachstehender Figur die Entfernung der beiden Mittelpunkte in vertikaler Richtung AB=d, die Geschwindigkeit nach der horizontalen Richtung BD=1 und nach der vertikalen Richtung BE=b; die Radien beider Kreise



AS=ϱ und GS=r. Nach dem Parallelogramm der Kräfte*) bewegt sich der Mittelpunkt des Kreises um B oder G in der Diagonale BV des Parallelogramms BDFE; also muß der Mittelpunkt B jedenfalls zur Zeit der Berührung auf BV liegen. Bei der äußern Berührung ist die Mittelpunkts-Entfernung beider Kreise AS+GS=ϱ+r und bei der innern beträgt diese Entfernung ϱ—r. Gesetzt nun, der Kreis um B sei nach x Sekunden im Punkte G, so daß er den Kreis um A im Punkte S berührt, so ist

*) Wirken zwei Kräfte auf einen Körper unter einem Winkel, so folgt der Körper weder der Richtung der einen, noch der Richtung der andern allein und hat weder die Geschwindigkeit der einen, noch die Geschwindigkeit der andern. Man denkt sich dann die Richtung und Größe der einen Kraft als eine Linie und die Richtung und Größe der andern auch als eine Linie und beide Linien denkt man sich unter dem Winkel zu einander geneigt, unter dem die Kräfte wirken. Durch die Endpunkte dieser beiden Linien denkt man sich zwei andere Linien, von denen jede mit einer der ersten parallel ist, so erhält man ein Parallelogramm. Der Körper geht nun durch die Diagonale dieses Parallelogramms. Dieselbe giebt seine Richtung und seine Geschwindigkeit an. Denn er wird sich durch diese in derselben Zeit bewegen, in welcher er blos der einen Kraft folgend durch die eine Seite des Parallelogramms und blos der andern folgend durch die daran stoßende ginge. Man kann es also auch so ansehen, als wenn er auf der einen Linie mit seiner Geschwindigkeit fortgehend, zugleich mit der ganzen Linie der andern Kraft auch folgend auf der andern Linie fortginge. Dies ist der Satz vom Parallelogramm der Kräfte.

$AG=\varrho+r$. Alsdann hat er sich nach der horizontalen Richtung um BN und nach der vertikalen um BM bewegt. Nun legt der Kreis nach der Horizontalrichtung in 1 Sekunde l, also in x Sekunden lx, und nach der Vertikalrichtung in 1 Sekunde b, also in x Sekunden bx zurück. Es ist daher:

$$BN=MG=lx;\ NG=BM=bx,$$

$$MG^2=AG^2-AM^2, \text{ oder da } AM=AB-MB=d-bx,$$

$$l^2x^2=(\varrho+r)^2-(d-bx)^2;$$

$$x^2(l^2+b^2)-2bdx=(\varrho+r)^2-d^2;$$

$$x^2-\frac{2bdx}{l^2+b^2}=\frac{(\varrho+r)^2-d^2}{l^2+b^2};$$

$$\left(x-\frac{db}{l^2+b^2}\right)^2=\frac{(\varrho+r)^2-d^2}{l^2+b^2}+\left(\frac{db}{l^2+b^2}\right)^2$$

$$=\frac{[(\varrho+r)^2-d^2](l^2+b^2)+d^2b^2}{(l^2+b^2)^2};$$

$$\text{folglich } x=\frac{db\pm\sqrt{[(\varrho+r)^2-d^2](l^2+b^2)+d^2b^2}}{l^2+b^2}.$$

Ebenso ergiebt die Zeit x für die innere Berührung, wo die Centrale beider Kreise $\varrho-r$ ist. Hiernach ist:

$$l^2x^2=(\varrho-r)^2-(d-bx)^2;$$

$$x^2(l^2+b^2)-2dbx=(\varrho-r)^2-d^2;$$

$$\left(x-\frac{db}{l^2+b^2}\right)^2=\frac{[(\varrho-r)^2-d^2](l^2+b^2)+d^2b^2}{(l^2+b^2)^2};$$

$$\text{folglich } x=\frac{db\pm\sqrt{[(\varrho-r)^2-d^2](l^2+b^2)+d^2b^2}}{l^2+b^2}.$$

Am nächsten ist der Mittelpunkt B des sich bewegenden Kreises dem Mittelpunkt A des festen Kreises, wenn die Verbindungslinie, Centrale, auf BV senkrecht steht, z. B. etwa in O. Gesetzt nun, in y Sekunden sei der Kreis um B in O, so daß AO senkrecht auf BV steht; in diesem Falle ist: $\alpha)\ BO^2=AB^2-AO^2$.

Aber für die Zeit y ist $BQ=by$ und $BP=ly$; also ist, da $BO^2=BP^2+BQ^2$; $BO^2=l^2y^2+b^2y^2=y^2(l^2+b^2)$.

Den für BO^2 gefundenen Wert in obige Gleichung α) substituiert, giebt

$$\beta)\ y^2(l^2+b^2)=d^2-AO^2. \text{ Nun ist}$$

$$AO^2=OQ^2+AQ^2=l^2y^2+(AB-BQ)^2$$

$$=l^2y^2+d^2+b^2y^2-2dby=y^2(l^2+b^2)-2dby+d^2.$$

Den für AO^2 gefundenen Wert in β) gesetzt, giebt:

$$y^2(l^2+b^2)=d^2-y^2(l^2+b^2)-d^2+2bdy; \text{ daher}$$

$$2y^2(l^2+b^2)=2dby \text{ oder durch } 2y \text{ dividiert:}$$

$$y(l^2+b^2)=db; \text{ folglich } y=\frac{bd}{l^2+b^2} \text{ Sekunden,}$$

wonach beide Kreise am nächsten sein werden.

76. Werden nun in dieser Auflösung, im Werte für x, $\varrho=1009$, $d=50$, $r=945$, $b=180$, $l=2000$ eingesetzt, so erhält man für die äußere Berührung

$$x=\frac{50\times180\pm\sqrt{[(1009+945)^2-50^2][2000^2+180^2]+50^2\times180^2}}{2000^2+180^2}$$

und für die innere Berührung

$$x=\frac{50\times180\pm\sqrt{[(1009-945)^2-50^2][2000^2+180^2]+50^2\times180^2}}{2000^2+180^2},$$

ferner für die Zeit, wo beide Kreise einander am nächsten sein werden:

$$y=\frac{50\times180}{2000^2+180^2}.$$

Nimmt man die hier angedeutete Rechnung vor, so erhält man die entsprechenden Werte für x und y.

78. Nachdem aus beiden Beuteln eine Handvoll herausgenommen, seien in dem kleinern noch x Kugeln geblieben, und daher waren in dem größern noch x^3, und weil dies soviel ausmacht, als das Quadrat einer Handvoll, so betrug die Handvoll $\sqrt{x^3}$; folglich war anfangs in dem größern Beutel $x^3+\sqrt{x^3}=x(x^2+\sqrt{x})$ und in dem kleinen $x+\sqrt{x^3}=x(1+\sqrt{x})$. Man nimmt aus dem größern jetzt so viele Kugeln heraus, daß die übrig gebliebenen dem Quadrate der Anzahl in dem kleinern gleich werden, alsdann sind in dem größern noch x^2 Kugeln. Diese schüttet man in den kleinern Beutel, welcher auf diese Weise $x^2+x=x(x+1)$ Kugeln enthält. Weil jetzt $\frac{5}{3}$mal soviel Kugeln in dem kleinern Beutel sind als anfangs, so ist:

$$x(x+1)=\tfrac{5}{3}x(1+\sqrt{x}) \text{ oder } x+1=\tfrac{5}{3}(1+\sqrt{x});$$

daher $x-\frac{5}{3}\sqrt{x}=\frac{2}{3}$. Setzt man hierin $\sqrt{x}=z$ und löst die Gleichung nach z auf, so erhält man $z=2$; folglich $\sqrt{x}=2$, also $x=4$, die Anzahl Kugeln, die noch in dem kleinern Beutel blieb, nachdem eine Handvoll herausgenommen. Die Handvoll betrug $\sqrt{x^3}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$; folglich hatte der größere Beutel anfangs $4^3+8=72$ und der kleinere $4+8=12$ Kugeln.

Zweite Auflösung. Bezeichnen wir die Handvoll Kugeln, die aus jedem Beutel herausgenommen werden, mit x, so befinden sich nach der Herausnahme, weil der Rest der Anzahl der Kugeln in dem großen Beutel gleich dem Quadrate einer Handvoll ist, jetzt in dem größern Beutel x^2 Kugeln, und daher beträgt die ursprüngliche Anzahl der Kugeln in demselben $x^2+x=x(x+1)$. Allein der Rest der Kugeln wird auch dargestellt durch den Kubus der Zahl in dem kleinern Beutel, nachdem eine Handvoll herausgenommen

ist; mithin enthält der Beutel jetzt $\sqrt[3]{x^2}$ und sonach befanden sich anfangs in diesem $x+\sqrt[3]{x^2}$. Nimmt man jetzt aus dem größern so viele Kugeln heraus, daß die übrigbleibenden soviel betragen, als das Quadrat der Anzahl Kugeln in dem kleinern, so bleiben im größern noch $(\sqrt[3]{x^2})^2$. Jetzt wird dieser Inhalt in den kleinern geschüttet, welcher noch $\sqrt[3]{x^2}$ enthält, also sind jetzt in demselben $(\sqrt[3]{x^2})^2+\sqrt[3]{x^2}$ Kugeln. Dadurch ist die ursprüngliche Anzahl in ihm um das $\frac{2}{3}$fache vermehrt; also ist

$$\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}=\tfrac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x^2}+x\right);$$ daher erhalten wir:

$$\sqrt[3]{x^4}-\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}=\tfrac{5}{3}x;$$ oder da $x=\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{x}$ und

$$\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{x^2},$$ so ist: $$\left(\sqrt[3]{x^2}-\tfrac{5}{3}\sqrt[3]{x}-\tfrac{2}{3}\right)\sqrt[3]{x^2}=0.$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt[3]{x^2}-\tfrac{5}{3}\sqrt[3]{x}-\tfrac{2}{3}=0,$$ daher $$\left(\sqrt[3]{x}-\tfrac{5}{6}\right)^2=(\tfrac{7}{6})^2;$$ daraus folgt:

$$\sqrt[3]{x}=2; \text{ daher } x=2^3=8.$$

Demnach befanden sich im ersten Beutel $8^2+8=72$ und im kleinern $4+8=12$ Kugeln.

79. α) Man habe zum ersten Male x l herausgenommen, so blieben noch im Fasse $360-x$ l Weingeist. Da er nun soviel Wasser hinzugoß, als er Weingeist abgezapft hatte, so war in jedem Liter der Mischung $\frac{360-x}{360}$ l Weingeist und $\frac{x}{360}$ l Wasser. Zum zweiten Male nimmt er $x+84$ l heraus, worin sich demnach $\frac{(x+84)(360-x)}{360}$ l Weingeist und $\frac{x}{360}(x+84)$ l Wasser befanden; mithin blieben noch im Fasse:

$$360-x-\frac{(x+84)(360-x)}{360}=$$

$$\frac{360(360-x)-(x+84)(360-x)}{360}\ l \text{ Weingeist.}$$

Er füllte das Faß wieder bis zu 360 l mit Wasser an; demnach befanden sich jetzt

$$360-\frac{360(360-x)-(x+84)(360-x)}{360}=$$

$$\frac{360x+(x+84)(360-x)}{360}\ l \text{ Wasser im Fasse.}$$

Weil nun die Mischung eben soviel Weingeist als Wasser enthält, so ist:

$$\frac{360(360-x)-(x+84)(360-x)}{360}=\frac{360x+(x+84)(360-x)}{360};$$

folglich $x=60\ l$ Weingeist.

β) Setzt man für die Zahlen 360 und 84 in der vorhergehenden Aufgabe die allgemeinen Zeichen a und b und nimmt man an, daß in der letzten Flüssigkeit nur $\frac{1}{n}$ der anfänglichen Menge des Weingeistes enthalten ist, so ist nach der vorigen Auflösung

$$a-x-\frac{(a-x)(b+x)}{a}=\frac{a}{n};\ \text{folglich}\ x=a-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\frac{a^2}{n}+\frac{b^2}{4}}.$$

80. Er habe sein Kapital zu x pCt. ausstehen, so betragen die Zinsen 1600x *M*; das Kapital mit den Zinsen am Ende des ersten Jahres 160000+1600x *M*. Hiervon nimmt er 2400 *M* weg; mithin hat er im zweiten Jahre

$$160000+1600x-2400=157600+1600x\ M$$

ausstehen. Da er dies Kapital zu denselben Prozenten ausleiht, so ist am Ende des zweiten Jahres das Kapital samt den Zinsen

$$157600+1600x+x(1576+16x),$$

und weil er sich nach Abzug von abermals 2400 *M* im Besitze von 168987 *M* sieht, so ist:

$$157600+1600x+x(1576+16x)-2400=168987;$$

folglich $x=4\frac{1}{4}$ pCt.

81. Setzt man für die Zahlen 160000, 2400, 168987 der vorigen Aufgabe die allgemeinen Zeichen k, b, k′, so ist, wenn das Kapital k zu x pCt. aussteht, das Kapital am Ende des

1. Jahres $k+\frac{k}{100}x-b-\frac{100(k-b)+kx}{100}$ und am Ende des

2. Jahres $\frac{100(k-b)+kx}{100}+\frac{100x(k-b)+kx^2}{10000}-b$, oder

$$\frac{100[100(k-b)+kx]+100x(k-b)+kx^2-10000b}{10000}\ M.$$

Da nun das Kapital am Ende des zweiten Jahres k′ beträgt, so ist:

$$100[100(k-b)+kx]+100x(k-b)+kx^2-10000b=10000k';$$

$$kx^2+100x(2k-b)=10000(k'+2b-k);$$

$$x^2+\frac{100x(2k-b)}{k}+\left(\frac{100(2k-b)}{2k}\right)^2=$$

$$\left(\frac{100(2k-b)}{2k}\right)^2+\frac{10000(k'+2b-k)}{k}; \text{ daher}$$

$$x+\frac{100(2k-b)}{2k}=100\sqrt{\frac{4k(k'+b)+b^2}{4k^2}};$$

folglich $x=[100(b-2k+\sqrt{4k(k'+b)+b^2})]:(2k)$ pCt.

82. Setzt man jährlich zu dem Kapitale samt den Zinsen b ℳ hinzu, so ist das auf Zinsen ausstehende Kapital am Ende des 1. Jahres

$\frac{100(k+b)+kx}{100}$ ℳ und am Ende des 2. Jahres

$$\frac{100[100(k+b)+kx]+100x(k+b)+kx^2+10000b}{10000} ℳ.$$

Es ist daher:

$$100[100(k+b)+kx]+100x(k+b)+kx^2+10000b=10000k';$$

$$\left(\;+\frac{100(2k+b)}{2k}\right)^2=\frac{10000[4k(k'-b)+b^2]}{(2k)^2}; \text{ also}$$

$$x+\frac{100(2k+b)}{2k}=\frac{100\sqrt{4k(k'-b)+b^2}}{2k};$$

folglich $x=[100(-b-2k+\sqrt{4k(k'-b)+b^2})]:(2k)$ pCt.

83. Er habe zum ersten Male x *hl* geerntet, so betrug dies das $\frac{x}{a}$-fache der Aussaat. Im zweiten Jahre säet er $x-b$ *hl*; er erntet also $\frac{x}{a}(x-b)=\frac{x(x-b)}{a}$ *hl*. Gemäß der Aufgabe beträgt diese Ernte das cfache seiner Aussaat nebst d *hl*; dies macht $c(x-b)+d$ *hl*. Weil nun in beiden Jahren das Feld gleich fruchtbar war, so ist:

$$\frac{x(x-b)}{a}=c(x-b)+d; \text{ oder } x^2-x(ac+b)=-(abc-ad);$$

$$\text{folglich } x=\tfrac{1}{2}[ac+b+\sqrt{(ac-b)^2+4ad}]\ hl.$$

84. Es giebt eine gewisse Klasse von Aufgaben, auf welche man besonders in der analytischen Geometrie kommt und welche darin bestehen: den größten oder kleinsten Wert zu bestimmen, welchen das Resultat gewisser mit Zahlen vorgenommenen arithmetischen Operationen bekommen kann. Die hier gegebene Aufgabe ist eine solche. Heißt der eine Summand x, so ist $a-x$ der Ausdruck des andern und $x(a-x)$ der Ausdruck ihres Produktes, welches nach der Angabe $=m$ sein muß. Die Gleichung bleibt immer dieselbe, man mag den größern oder kleinern Teil durch x bezeichnen. Es ist also kein Grund vorhanden, weswegen die Auflösung der Gleichung den einen Teil eher als den andern geben sollte. Sie muß sie beide zugleich geben, und hieraus erklärt es

sich auch, warum die Gleichung zwei direkte Auflösungen gestattet. Sollen aber die beiden Werte für x reell, d. h. die Aufgabe möglich sein, so muß $m<\frac{1}{4}a^2$ sein. Und in der That kann man, wie auch immer die beiden gesuchten Teile beschaffen sein mögen, ihre Differenz immer mit d bezeichnen und da außerdem ihre Summe $=a$ ist, so hat man für diese beiden Teile die Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{2}(a+d) \text{ und } \tfrac{1}{2}(a-d).$$

Multipliziert man diese beiden Ausdrücke mit einander, so erhält man $\frac{1}{4}(a^2-d^2)$, welches notwendig kleiner ist, als $\frac{1}{4}a^2$, wofern man nicht $d=0$ setzt, in welchem Falle die beiden Teile einander gleich sind, und ihr Produkt $=\frac{1}{4}a^2$ ist. Es wäre also ungereimt, wenn das Produkt m größer sein sollte, als $\frac{1}{4}a^2$.

Oder: Wenn man der Größe x verschiedene Werte giebt, so bekommt auch das Produkt $x(a-x)$ verschiedene Werte, und es kommt darauf an, der Größe x den Wert beizulegen, welcher dieses Produkt zu dem möglichst größten macht. Bezeichnen wir dies größte Produkt mit m, so haben wir nach der Aufgabe die Gleichung

$$x(a-x)=m.$$

Hieraus folgt $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-m}$. Aus diesem Resultate geht aber hervor, daß die beiden Werte von x nur so lange reell sein können, als $m<\frac{1}{4}a^2$ oder höchstens $m=\frac{1}{4}a^2$ ist. Folglich ist $\frac{1}{4}a^2$ der größte Wert, welchen m oder das Produkt der beiden gesuchten Teile bekommen kann. Setzt man aber $m=\frac{1}{4}a^2$, so folgt $x=\frac{1}{2}a$. Um also das größte Produkt zu erhalten, muß man die gegebene Zahl a in zwei gleiche Teile teilen und das Maximum, welches man erhält, ist das Quadrat der Hälfte der gegebenen Zahl, zu welchem Resultate wir auch schon oben auf einem andern Wege gelangt sind. Diese Aufgabe läßt indessen auch noch folgende einfachere Auflösung zu. Nennen wir die Differenz, die zwischen beiden Teilen stattfindet, x, so wird, da ihre Summe durch a ausgedrückt wird, der größere Teil durch $\frac{1}{2}(a+x)$ und der kleinere durch $\frac{1}{2}(a-x)$ ausgedrückt und wir erhalten die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(a+x)\times\tfrac{1}{2}(a-x)=m \text{ oder ausgeführt:}$$

$$\tfrac{1}{4}(a^2-x^2)=m; \text{ folglich } \tfrac{1}{2}x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-m}.$$

Soll dieser Wert von x reell sein, so darf m höchstens so groß als $\frac{1}{4}a^2$ sein; und setzt man $m=\frac{1}{4}a^2$, so erhält man $\frac{1}{2}x=\pm 0$, also auch $x=0$, welches beweist, daß die beiden Teile einander gleich sein müssen. Diese Auflösung hat den Vorzug, daß sie auf eine reine Gleichung des zweiten Grades führt. Demnach ist das größte Produkt, welches man er-

halten kann, wenn man eine absolute Zahl in zwei Teile teilt und dieselben mit einander multipliziert, das Quadrat der Hälfte dieser Zahl. Es sei 48 die zu teilende Zahl, so hat man:

$$48=36+12 \text{ und } 36\times12=432$$
$$48=30+18 \text{ „ } 30\times18=540$$
$$48=26+22 \text{ „ } 26\times22=572$$
$$48=24+24 \text{ „ } 24\times24=24^2=576.$$

Hieraus folgt, daß das Produkt der beiden Teile desto größer wird, je kleiner ihre Differenz, und dieses Produkt erreicht sein Maximum, wenn die beiden Teile einander gleich sind. Vgl. §. 172.

85. Heißt der eine Faktor x, so ist der andere $\frac{a}{x}$, die Summe derselben also $=x+\frac{a}{x}$. Heißt nun das Minimum der Summe m, so ist: $x+\frac{a}{x}=m$; folglich $x=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{1}{4}m^2-a}$.

Hier kann a keinen größeren Wert haben als $\frac{1}{4}m^2$; wodurch $x=\frac{1}{2}m$ wird. Aus der Betrachtung aber, daß $\frac{1}{4}m^2=a$ ist, erhält man $\frac{1}{2}m=\sqrt{a}$.

Substituiert man diesen Wert für $\frac{1}{2}m$ in den Wert für x, so erhalten wir: $x=\sqrt{a}$ der eine Faktor;

$$\text{folglich } \frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a^2}{a}}=\sqrt{a}$$

der andere Faktor; mithin muß x in die beiden gleichen Faktoren $\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}$ zerlegt werden.

Die Summe der beiden Zahlen, worin die Zahl zerlegt werden kann, giebt also ein Minimum, wenn die beiden Faktoren einander gleich sind. Es sei z. B. 36 die in 2 Faktoren zu zerlegende Zahl, so hat man:

$$36=2\times18 \text{ und } 2+18=20$$
$$36=3\times12 \text{ „ } 3+12=15$$
$$36=4\times9 \text{ „ } 4+9=13$$
$$36=6\times6 \text{ „ } 6+6=12.$$

Mithin wird die Summe der beiden Faktoren um so kleiner, je kleiner die Differenz der beiden Faktoren ist. Vgl. §. 172.

86 und 87. Die beiden zusammenstoßenden Seiten eines Rechtecks, dessen Umfang 36 oder allgemein n *m* hat, betragen zusammen 18 oder $\frac{1}{2}$n *m*. Die Zahl 18 oder $\frac{1}{2}$n soll in 2 Summanden zerlegt werden und zwar so, daß das Produkt aus denselben ein Größtes wird. Da nun nach der 84. Aufgabe gleiche Teile das größte Produkt geben, so muß sowohl die Länge als auch die Breite des Rechtecks 9 oder

$\frac{1}{4}n$ *m* betragen, mithin der Inhalt desselben 81 *qm* oder $\frac{1}{16}n^2$ sein.

88. Ist die Seite des 1. Würfels x *cm* lang, so beträgt die Seite des 2. Würfels $x+2\frac{1}{2}$ *cm*. Demnach beträgt der Kubikinhalt des ersten x^3 und der des zweiten $(x+2\frac{1}{2})^3$ *ccm*, und weil nun der erste Würfel $2501\frac{7}{8}$ *ccm* weniger Inhalt hat, als der zweite, so ist:

$$x^3+2501\tfrac{7}{8}=(x+2\tfrac{1}{2})^3;$$

folglich $x=17$ *cm* die Seite des ersten und daher $19\frac{1}{2}$ *cm* die Seite des zweiten Würfels; ihre Inhalte sind demnach $17^3=4913$ und $(19\frac{1}{2})^3=7414\frac{7}{8}$ *ccm*.

89. Die Höhe des aus Eisenblech verfertigten Würfels sei x *mm*, so ist der Inhalt desselben x^3. Der hohle vom Eisen umschlossene Raum ist $(x-18)^3$; mithin ist das Volumen des Eisens $=x^3-(x-18)^3$. Wird der Würfel auf allen 6 Seiten mit 5 *mm* dicken Bleiplatten belegt, so ist die Höhe des Bleiwürfels $(x+10)$ *mm* und daher sein Inhalt $=(x+10)^3$ *cmm*; folglich das Bleivolumen $=(x+10)^3-x^3$. Das Volumen 1 des Eisens wiege 1, so wiegt das Volumen 1 des Bleies $\frac{11,4}{7,8}$, weil sich Eisen zu Blei wie $7,8:11,4$ verhält; folglich wiegt das Volumen $x^3-(x-18)^3$ des Eisens auch $x^3-(x-18)^3$ und das Volumen Blei $(x+10)^3-x^3$ wiegt dagegen $[(x+10)^3-x^3]\times\frac{11,4}{7,8}$. Da nun der Aufgabe gemäß das Eisenvolumen am Würfel ebensoviel als am Bleivolumen wiegt, so ist:

$$x^3-(x-18)^3=[(x+10)^3-x^3]\times\frac{11,4}{7,8};$$

folglich $x=135,74$ *mm* beträgt die Höhe.

90. Es sei: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ldots=x.$

Erhebt man beide Teile ins Quadrat, so ist:

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=x^2.$$

Hieraus und aus der Annahme folgt, daß $2+x=x^2$; es ist also: $(x-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}$; folglich $x=2$.

91. Setzt man hier: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}=x$, so ist:

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}=x^2;\text{ also }(x-\tfrac{1}{2})^2=a+\tfrac{1}{4};$$

folglich $x=\frac{1}{2}+\sqrt{a+\frac{1}{4}}$.

II. Gleichungen vom zweiten Grade.

B. Mit mehreren Unbekannten.

1. Auflösungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 73.

§. 399. Wie bei den Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten kommt es auch bei den quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten darauf an, aus den gegebenen Gleichungen eine Endgleichung zu entwickeln, die nur noch eine Unbekannte enthält. Aus dieser bestimme man alsdann diese Unbekannte und setze die erhaltenen Werte entweder in eine der gegebenen oder in eine durch die Umformung erhaltene Gleichung. Bei ihrer Auflösung sind dieselben Gesetze maßgebend, wie bei denen vom ersten Grade. Das Verfahren beruht auch hier auf dem bekannten Grundsatze, daß gleiche Veränderungen, mit gleichen Größen vorgenommen, gleiche Resultate geben.

1. Da hier die Summe und die Differenz der Quadrate der Unbekannten gegeben ist, so addiere man die beiden Gleichungen und man erhält dadurch eine Gleichung mit nur noch einer Unbekannten. Es ist daher: $2x^2 = 2{,}88$; also $x^2 = 1{,}44$; folglich $x = \pm 1{,}2$.

   Durch Subtraktion der beiden gegebenen Gleichungen findet man: $2y^2 = 23{,}12$; also $y^2 = 11{,}56$; folglich $y = \pm 3{,}4$.

2. Um diese Gleichung nach der Additions- und Subtraktionsmethode auflösen zu können, multipliziere man zuvor die erste Gleichung mit 2, wodurch y^2 in beiden Gleichungen denselben Koeffizienten erhält. Es ist daher:

   (3) $2(13x)^2 + (2y)^2 = 354$.

   Subtrahiert man hiervon die zweite Gleichung, so hat man: $351x^2 = 351$; also $x^2 = 1$; daher $x = \pm 1$.

   Setzt man diesen für x gefundenen Wert in die zweite Gleichung, so ist: $4y^2 = 16$; also $2y = \pm 4$; folglich $y = \pm 2$.

3. Bestimmt man aus der zweiten Gleichung den Wert für $x = by$ und setzt denselben in die erste, so erhält man wieder eine Gleichung mit einer Unbekannten, nämlich:

   $by^2 = a$, also $y^2 = a : b$; folglich y_1 und $y_2 = \pm\sqrt{a : b}$; daher: x_1 und $x_2 = \pm b\sqrt{a : b} = \pm\sqrt{ab^2 : b} = \pm\sqrt{ab}$.

4. Nach §. 228. *d*) erhält man aus der ersten Gleichung, welche zunächst die Form einer Proportion hat:

   (3) $2x : 2y = 304 : 82$ oder $x : y = 152 : 41$.

   Die zweite Proportion giebt gemäß §. 223:

   (4) $xy = 171 \,.\, 328$.

Hiermit ist diese Aufgabe auf die vorhergehende zurück-

geführt. Setzt man also in die dort für x und y gefundenen Werte $a=171.328$ und $b=152:41$, so ist:
x_1 und $x_2=\pm\sqrt{(171.328.152):41}=\pm\sqrt{171.8.152}=\pm456.$
y_1 und $y_2=\pm\sqrt{(171.328.41):152}=\pm\sqrt{9.44.31}=\pm123.$

5. Wendet man wieder auf die erste Proportion §. 228. δ) an, so ist: $2x^2:2y^2=32:18$ oder $x^2:y^2=16:9$; folglich (3) $\frac{x^2}{y^2}=\frac{16}{9}$; daher (4) $\frac{x}{y}=\pm\frac{4}{3}$; mithin ist wieder, da $a=48$ und $b=\pm\frac{4}{3}$ ist, nach Beisp. 4:
x_1 und $x_2=\pm\sqrt{(48.4):3}=\pm\sqrt{16.4}=\pm8$ und
x_3 und $x_4=\pm\sqrt{48.(-\frac{4}{3})}=\pm\sqrt{-64}=\pm8\sqrt{-1}.$
y_1 und $y_2=\pm\sqrt{(48.3):4}=\pm\sqrt{36}=\pm6,$
y_4 und $y_3=+\sqrt{-36}=\pm6\sqrt{-1}.$

6. Setze aus der zweiten Gleichung den Wert für x in die erste, so ist:
$14(3y)^2-122y^2=100$; oder $4y^2=100$; also $2y=\pm10$; folglich y_1 und $y_2=\pm5$; daher x_1 und $x_2=\pm3.5=\pm15.$

7. Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen erhält man:
(3) $(x+y)^2=a+b$; also (4) $x+y=\pm\sqrt{a+b}.$
Setzt man diesen Wert für $x+y$ in die beiden gegebenen Gleichungen ein, so erhält man:
$$x_1 \text{ und } x_2=\pm\frac{a}{\sqrt{a+b}} \text{ und } y_1 \text{ und } y_2=\pm\frac{b}{\sqrt{a+b}}.$$

8. α) Multipliziere die erste Gleichung mit a und die zweite mit b, so ist:
$$(1)\ \frac{a^2}{x^2}-aby^2=a(a-b)^3 \text{ und}$$
$$(2)\ \frac{b^3}{x^2}+aby^2=b(a^2-b^2)(a-b).$$
Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:
$$\frac{a^2+b^2}{x^2}=a(a-b)^3+b(a^2-b^2)(a-b)=(a^2+b^2)(a-b)^2.$$
Dividiere diese Gleichung durch a^2+b^2, so hat man:
$$\frac{1}{x^2}=(a-b)^2;\ \text{daher}\ \frac{1}{x}=\pm(a-b);\ \text{folglich}\ x=\pm\frac{1}{a-b}.$$
Setze diesen Wert für x in (1), so ist:
$by^2=a(a-b)^2-(a-b)^3=b(a-b)^2$; daher
$y^2=(a-b)^2$; folglich $y=\pm(a-b).$

β) Multipliziere (2) mit y und ordne, so ist (3) $x=3y-\frac{2}{y}.$
Setze diesen Wert für x in (1), so ist $9y^2=21$, also $y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{21}.$
Diesen Wert für y in (2) eingesetzt, liefert $x=\pm\frac{5}{7}\sqrt{21}.$

9. Multipliziere (1) mit 3 und addiere sie zu (2), so wird:
$13(x+4)^2=1300$; also $(x+4)^2=100$; folglich
$x+4=\pm 10$; daher $x_1=6$ und $x_2=-14$.
Setze den Wert für $(x+4)^2=100$ in (2), so ist:
$15(y-7)^2=375$, also $(y-7)^2=25$; folglich
$y-7=\pm 5$; daher $y_1=12$ und $y_2=2$.

10. Setzt man aus (2) den Wert für $\frac{25}{y^2}$ in (1), so wird:
$\frac{81}{x^2}=\frac{9 \,.\, 25}{x^2}-16$. Entwickele diese Gleichung, so ist:
$16x^2=144$; also $4x=\pm 12$; daher $x=\pm 3$.
Setze diesen Wert für x in die zweite Gleichung, so hat man:
$1=\frac{25}{y^2}$; also $\frac{5}{y}=\pm 1$; daher $y=\pm 5$.

11. Durch Umformung erhält man aus der zweiten Gleichung:
$$(3)\ \left(\frac{12}{x}\right)^2-25(y-4)^2=-9.$$
Multipliziere (1) mit 25 und addiere sie zu (3), so ist:
$$25\left(\frac{24}{x}\right)^2+\left(\frac{12}{x}\right)^2=1616.$$
Hieraus ergiebt sich: $x^2=9$; also $x_1=3$ und $x_2=-3$.
Setze den Wert für $x^2=9$ in (1) so hat man:
$(y-4)^2=1$; also $y-4=\pm 1$; folglich $y_1=5$ und $y_2=3$.

12. Aus der zweiten gegebenen Gleichung folgt $x-2=y-3$.
Setze nun den Wert für $y-3$ aus der zweiten in die erste Gleichung, so hat man:
$(x-2)(x-2)=1$ oder $(x-2)^2=1$; also $x-2=\pm 1$;
daher $x_1=3$ und $x_2=1$.
Demnach ist: $y-3=\pm 1$; folglich $y_1=4$ und $y_2=2$.

13. Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen erhält man:
$x+y=(a+b)\sqrt{x+y}$, woraus sich ergiebt
(3) $\sqrt{x+y}=a+b$ und (4) $\sqrt{x+y}=0$.
Setzt man nun (4) in (1) und (2), so erhält man $x_1=0$, $y_1=0$. Setzt man (3) in (1) und (2), so erhält man ferner
$x_2=a(a+b)$ und $y_2=b(a+b)$.

14. α) Die beiden Gleichungen lassen sich umformen in:
$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \sqrt{x}\{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3\}=336\\(2)\ \sqrt{y}\{(\sqrt{y})^3+(\sqrt{x})^3\}=112\end{array}\right\}\ \text{(1) durch (2) dividiert, giebt:}$$
(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=3$; also $\sqrt{x}=+3\sqrt{y}$; daher $x=(+3)^2y$.
Setze diesen Wert für x in (1), so wird:
$3^4y^2+3y^2=336$; also $28y^2=112$; daher $y=\pm 2$.
Ist also $y_1=2$, so ist $x_1=(+3)^2 \,.\, 2=18$;
„ „ $y_2=-2$, so ist $x_2=(+3)^2 \,.\, (-2)=-18$.

β) Dividiere die beiden gegebenen Gleichungen durch xy, so ist:

$$(3)\ \frac{x}{y}-\frac{1}{x}\sqrt{xy}=\frac{336}{xy} \text{ oder } \frac{x}{y}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{336}{xy}.$$

$$(4)\ \frac{y}{x}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}=\frac{112}{xy} \text{ oder } \frac{y}{x}-\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{112}{xy}.$$

Multipliziere (4) mit 3 und stelle aus dieser Gleichung und aus (3) die Werte für $\frac{336}{xy}$ einander gleich, so ist:

$$(5)\ \frac{x}{y}-\sqrt{\frac{y}{x}}=3\left(\frac{y}{x}-\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Setze $\frac{x}{y}=z^2$, so ist $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{y}{x}=\frac{1}{z^2}$ und $\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Setzt man diese Werte in (5), so wird:

$z^2-\frac{1}{z}=3\left(\frac{1}{z^2}-z\right)$ oder: $z(z^3-1)=-3(z^3-1)$, daher $z=-3$; also $z^2=(-3)^2$; folglich ist $\frac{x}{y}=(-3)^2$; daher $x=(-3)^2y$. Setzt man diesen Wert in (1), so ist: $[(-3)^2y]^2-y\sqrt{(-3)^2y^2}=336$; oder $81y^2-(-3)y^2=336$; also $84y^2=336$; daher $y^2=4$; woraus $y_1=2$, $y_2=-2$; demnach $x=(-3)^2.(\pm 2)$; also $x_1=18$, $x_2=-18$.

15. Da die Summe der unbekannten Größen und ihr Produkt gegeben ist, so braucht man nur die Differenz derselben Größen zu suchen, weil sich alsdann die Unbekannten selbst leicht aus ihrer Summe und Differenz berechnen lassen. Deshalb erhebe man die Summen-Gleichung ins Quadrat und multipliziere die Produkten-Gleichung mit 4, so erhält man:

(3) $x^2+2xy+y^2=s^2$ und (4) $4xy=4p$.

Subtrahiere (4) von (3) so wird:

(5) $(x-y)^2=s^2-4p$.

Ziehe aus (5) die Quadratwurzel, so ist:

(6) $x-y=\pm\sqrt{s^2-4p}$. Da nun (1) $x+y=s$, so erhalten wir durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen:

x_1 und $x_2=\frac{1}{2}(s\pm\sqrt{s^2-4p})$ und y_1 und $y_2=\frac{1}{2}(s\mp\sqrt{s^2-4p})$.

16. Da die Differenz und das Produkt der Unbekannten gegeben ist, so suche man ihre Summe. Zu diesem Zwecke erhebe man die Differenzen-Gleichung ins Quadrat und multipliziere die andere Gleichung, welche das Produkt enthält, mit 4 und addiere diese beiden Gleichungen, so hat man:

(3) $(x+y)^2=d^2+4p$; daher: (4) $x+y=\pm\sqrt{d^2+4p}$.

Nun haben wir in (4) die Summe und in der ersten der gegebenen Gleichungen die Differenz der Unbekannten; daher

erhalten wir durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\frac{d\pm\sqrt{d^2+4p}}{2},\quad \left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\frac{-d\pm\sqrt{d^2+4p}}{2}.$$

17 α) Mit Bezugnahme auf Aufgabe 15 ist, da $s=1{,}25$ und $p=0{,}375$,

$$x=\tfrac{1}{2}(1{,}25\pm\sqrt{(1{,}25)^2-4\,.\,0{,}375})=\tfrac{1}{2}(1{,}25\pm0{,}25),$$

also $x_1=y_2=0{,}75$ und $x_2=y_1=0{,}5$,

β) Man setze $x-y=z$, so ist, da $x+y=a$,

$x=\frac{1}{2}(a+z)$ und $y=\frac{1}{2}(a-z)$. Daher ist:

$$xy=\tfrac{1}{2}(a+z)\,.\,\tfrac{1}{2}(a-z)=\tfrac{1}{4}(a^2-z^2).$$

Setze diesen Wert für xy in die zweite gegebene Gleichung, so ist:

$$\tfrac{1}{4}(a^2-z^2)=\tfrac{1}{4}(a^2-b^2);$$

Hieraus folgt, daß $z^2=b^2$; daher $z=\pm b$. Daher hat man:

(1) $x+y=a$; (2) $x-y=\pm b$,

folglich x_1 und $x_2=\frac{1}{2}(a\pm b)$ und y_1 und $y_2=\frac{1}{2}(a\mp b)$.

18. Erhebe die erste gegebene Gleichung ins Quadrat, multipliziere die zweite mit $\frac{2}{5}$ und subtrahiere diese von jener, so hat man:

$$(3)\ \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2=\tfrac{4}{225};\ \text{daher: } (4)\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm\tfrac{2}{15}.$$

Aus der ersten Gleichung, welche die Summe und aus der (4), welche die Differenz der Unbekannten enthält, folgt durch Addition und Subtraktion:

$$\frac{1}{x}=\tfrac{1}{6};\ \text{also } x_1=6;\ \text{ferner } \frac{1}{x}=\tfrac{1}{30};\ \text{also } x_2=30.$$

$$\frac{1}{x}=\tfrac{1}{30}:\ \text{also } y_1=30;\ \text{ferner } \frac{1}{y}=\tfrac{1}{6};\ \text{also } y_2=6.$$

19. Setze $7+x=z$ und $6+y=u$, so hat man:

(1) $zu=80$ und (2) $z+u=18$.

Demnach erhält man nach Aufgabe 15:

$z_1=u_2=10$ und $z_2=u_1=8$. Hiernach ist:

$7+x=10$; also: $x_1=3$; $7+x=8$; $x_2=1$

$6+y=8$; also: $y_1=2$; $6+y=10$; $y_2=4$.

20. Man setze $x^2+2y^2=z$ und $3x^2-4y^2=u$, so erhält man:

(3) $zu=48$ und (4) $z+u=14$.

Nach der in Aufgabe 15 gefundenen Formel ist daher:

$z_1=u_2=8$ und $z_2=u_1=6$. Demnach erhält man:

(5) $x^2+2y^2=6$; (6) $3x^2-4y^2=8$;

(7) $x^2+2y^2=8$; (8) $3x^2-4y^2=6$.

Nach (5) und (6) ist: x_1 und $x_2=\pm2$ und y_1 und $y_2=\pm1$.

Aus den Gleichungen (7) und (8) erhalten wir:

$x^2=4{,}4$; folglich x_3 und $x_4=\pm\sqrt{4{,}4}=\pm2{,}0976177$.

$y^2=1{,}8$; folglich y_3 und $y_4=\pm\sqrt{1{,}8}=\pm1{,}3416408$.

21. Aus der ersten Gleichung hat man: (3) $xy=60$.

Da nun in (3) und in der zweiten Gleichung das Produkt nebst der Differenz der Unbekannten gegeben ist, so braucht man nur die hier gegebenen Werte in die in Aufg. 16 gefundene Formel einzusetzen, wonach

$x_1=15$ und $y_2=-4$ und $y_1=4$ und $y_2=-15$.

22. α) Aus den gegebenen Gl. ergeben sich folgende zwei:

(1) $y-x=\frac{1}{742}$ und (2) $xy=\frac{7326}{742}$.

Gemäß der Auflösung der Aufg. 16 hat man hier, da

$d=\frac{1}{742}$ und $p=\frac{7326}{742}$,

$x_1=\frac{333}{106}$; $x_2=-\frac{22}{7}$; $y_1=\frac{22}{7}$; $y_2=-\frac{333}{106}$.

β) Nach §. 225 erhalten wir aus der ersten gegebenen Gleichung folgende Proportion: (1) $x:y=(a-y):(a-x)$.

Gemäß §. 228 erhalten wir aus dieser Proportion folgende:

(2) $(x+y):[2a-(x+y)]=(x-y):(x-y)$ oder

(3) $(x+y):[2a-(x+y)]=1:1$. Hieraus folgt:

(4) $x+y=2a-(x+y)$ oder (5) $x+y=a$.

Nun haben wir in (5) und in der zweiten gegebenen Gleichung die Summe und das Produkt der Unbekannten; folglich nach Aufgabe 15:

x_1 und $x_2=\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-3})$; y_1 und $y_2=\frac{1}{2}a(1\mp\sqrt{-3})$.

Durch Entwickelung der ersten gegebenen Gleichung erhält man: (6) $(x-y)(x+y-a)=0$.

Hieraus folgt: (7) $x-y=0$. In (7) ist die Differenz und in der zweiten gegebenen Gleichung ist das Produkt der Unbekannten gegeben, also ist nach Aufgabe 16

$x_3=y_3=a$, $x_4=y_4=-a$.

23. α) Aus der zweiten gegebenen Gleichung entsteht:

$$(3)\ \frac{x-y}{xy}=\frac{a^2-b^2}{(a-1)(b-1)}.$$

Setze hierin aus der ersten Gleichung den Wert für $x-y$, und ordne dieselbe, so hat man:

$$(4)\ xy\frac{a^2-b^2}{(a-1)(b-1)}=\frac{a^2-b^2}{(a+1)(b+1)}.$$

Dividiere (4) durch a^2-b^2 und entwickele sie, so ist:

$$(5)\ xy=\frac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}.$$

In der ersten gegebenen Gleichung und in (4) ist die Differenz und das Produkt gegeben; daher nach Aufgabe 16, da

$$d=\frac{a^2-b^2}{(a+1)(b+1)},\ \text{also}\ d^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+1)^2(b+1)^2}\ \text{und}$$

$$4p=4\frac{(a-1)(b-1)}{(a+1)(b+1)},\ \text{so ist}$$

$$d^2+4p=\frac{(a^2-b^2)^2+4(a^2-1)(b^2-1)}{(a+1)^2(b+1)^2}=\left(\frac{a^2+b^2-2}{(a+1)(b+1)}\right)^2;$$

also $\pm\sqrt{d^2+4p}=\pm\frac{a^2+b^2-2}{(a+1)(b+1)}$; demnach ist:

$$x=\frac{a^2-b^2\pm(a^2+b^2-2)}{2(a+1)(b+1)};\ \text{daher}\ x_1=\frac{a-1}{b+1}\ \text{und}$$

$$x_2=\frac{1-b}{a+1}=-\frac{b-1}{a+1};\ y_1=\frac{b-1}{a+1},\ y_2=-\frac{a-1}{b+1}.$$

β) Setze aus beiden Gleichungen die Werte für $xy-1$ einander gleich, so wird: $x=a^2y$. Setze diesen Wert für x in die erste Gleichung, so entsteht die Gleichung

$y^2-\frac{1}{a}y=\frac{1}{a^2}$, woraus y_1 und $y_2=\frac{1}{2a}(1\pm\sqrt{5})$; daher ist:

$$x_1\ \text{und}\ x_2=\tfrac{1}{2}a(\pm\sqrt{5}).$$

24. Die Summe der Unbekannten und ihre Quadratensumme ist gegeben. Man suche hieraus die Differenz derselben zu bestimmen. Deshalb quadriere man die erste Gleichung und nehme zwischen dieser und der zweiten Gleichung die Differenz, so hat man: (3) $2xy=a^2-b$.

Multipliziere diese Gleichung mit 2 und subtrahiere sie von der ins Quadrat erhobenen ersten Gleichung, so ergiebt sich:

(4) $(x-y)^2=2b-a^2$; daher

(5) $x-y=\pm\sqrt{2b-a^2}$; da nun

(1) $x+y=a$, so ist x_1 und $x_2=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b-a^2})$ und

y_1 und $y_2=\frac{1}{2}(a\mp\sqrt{2b-a^2})$.

25. Setze hier $x-4=z$ und $y+4=u$, so ist:

(1) $z^2+u^2=100$ und (2) $z+u=14$.

Es ist also wieder die Summe der Unbekannten und ihre Quadratensumme gegeben. Man suche daher hieraus das Produkt der Unbekannten zu bestimmen. Deshalb erhebe (2) ins Quadrat, nimm dann die Differenz zwischen dieser Gleichung und (1) so ist:

$2uz=96$ oder (3) $uz=48$.

Mithin haben wir in (2) die Summe und in (3) das Produkt der Unbekannten; daher ist nach 15:

$z=\frac{1}{2}(14\pm\sqrt{14^2-4\,.\,48})-\frac{1}{2}(14\pm2)$; daher $z_1=8$ und $z_2=6$; folglich $u_1=6$ und $u_2=8$.

Hiernach ist: $x-4=8$; also $x_1=12$; $y+4=6$; also $y_1=2$; $x-4=6$; also $x_2=10$; $y+4=8$; also $y_2=4$.

26. *α*) Das Produkt und die Quadratensumme der beiden Unbekannten ist gegeben. Man bestimme hieraus die Summe und die Differenz der Unbekannten. Deshalb multipliziere die erste Gleichung mit 2 und nimm zwischen dieser Gleichung und der zweiten gegebenen die Summe sowie die Differenz, so wird:

(3) $(x+y)^2=b+2a$ und (4) $(x-y)^2=b-2a$; daher:

(5) $x+y=\pm\sqrt{b+2a}$ und (6) $x-y=\pm\sqrt{b-2a}$;
folglich $x=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{b+2a}\pm\sqrt{b-2a}]$.

Der Wert für x drückt sich also aus durch die Summe zweier Quadratwurzeln, die sich nach §. 388 in eine verwandeln läßt. Es ist daher:

x_1 und $x_2=\sqrt{\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^2}}$ und y_1 und $y_2=\sqrt{\frac{1}{2}b\mp\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^2}}$

β) Man setze aus der ersten Gleichung den Wert für $y=\frac{1}{x}$. in die zweite, so ist:

$$(3)\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Da $x^2+\frac{1}{x^2}+2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$, so ist:

$$(4)\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{ab}+2=\frac{(a+b)^2}{ab};\ \text{also}$$

$$(5)\quad x+\frac{1}{x}=\pm(a+b):\sqrt{ab}=\pm(\sqrt{a:b}+\sqrt{b:a}).$$

Hieraus folgt $x^2\mp(\sqrt{a:b}+\sqrt{b:a})x+1=0$.

Da das Absolutglied dieser Gl. $1=\sqrt{a:b}\times\sqrt{b:a}$, so ist nach §. 390 in dem Koeffizienten von x die Summe der beiden Wurzeln enthalten; weshalb $x_1=\pm\sqrt{a:b}$ und $x_2=\pm\sqrt{b:a}$; daher $y_1=\pm\sqrt{b:a}$, $y_2=\pm\sqrt{a:b}$.

27. Man multipliziere (1) mit $(x-y)(x+y)$ und ordne, so ergiebt sich (3) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{a}{2}$. In diese Gl. aus (2) für $x^2+y^2=b$ und $x^2=y^2-b$ eingesetzt, giebt

$$(4)\quad \frac{b}{b-2y^2}=\frac{a}{2}\ \text{oder}\ 2b=ab-2ay^2,\ \text{woraus}$$

$$y_1\ \text{und}\ y_2=\pm\sqrt{\frac{b(a-2)}{2a}}.$$

Diesen Wert für y in (2) eingesetzt, liefert

$$x_1\ \text{und}\ x_2=\pm\sqrt{\frac{b(a+2)}{2a}}.$$

28. Aus der ersten gegebenen Gl. folgt:

$$y(at-bt+cs-ds)=x(cs+ds-at-bt);$$

$$\text{also}\ y=\frac{cs+ds-at-bt}{at-bt+cs-ds}\cdot x.$$

Setze diesen Wert für y in die zweite Gl., so hat man:

$$x^2+\left(\frac{cs+ds-at-bt}{at-bt+cs-ds}\right)^2x^2=m^2.\ \text{Daher}$$

$$x^2=\frac{m^2(at-bt+cs-ds)^2}{2(c^2s^2-2bsct+b^2t^2)+2(a^2t^2-2adts+d^2s^2)};$$

folglich $\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\pm\frac{m[(cs-bt)+(at-ds)]}{\sqrt{2(cs-bt)^2+2(at-ds)^2}}$

und daher $\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\pm\frac{m[(cs-bt)-(at-ds)]}{\sqrt{2(cs-bt)^2+2(at-ds)^2}}$.

29. Man quadriere die erste der gegebenen Gleichungen, so wird $2x+2\sqrt{x^2-y^2}=a$. In diese Gleichung setze man aus der 2. den Wert für x^2-y^2, so ist $2x+2\sqrt{b^2}=a$, also $x=\mp b+\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(a\mp 2b)$. Diesen Wert für x in die 2. Gl. eingesetzt, giebt $y^2=\frac{1}{4}a^2\mp ab$; folglich $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2\mp 4ab}$.

30. Man addiere die beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man: $x^2+2xy+y^2=a^2+2ab+b^2$ oder (3) $x+y=\pm(a+b)$. Subtrahiere jetzt (1) von (2), so wird (4) $x^2-y^2=3(b^2-a^2)$. Dividiere (4) durch (3), so ist (5) $x-y=3(b-a)$. Nimm jetzt die Summe und Differenz von (3) und (4), so ist x_1 und $x_2=\mp(a-2b)$ und y_1 und $y_2=\pm(2a-b)$.

31. Da $x^3-y^3=(x^2+y^2+xy)(x-y)$, so erhalten wir aus Gl. (1):

$$(3)\quad (x^2+y^2+xy)(x-y)=m(x^2-xy+y^2).$$

Setzt man aus Gl. (2) den Wert für $x-y=n$ in (3), so ergiebt sich nach gehöriger Entwickelung

$$x^2(n-m)+y^2(n-m)+xy(n+m)=0 \text{ oder}$$

$$(4)\quad (x^2+y^2)(n-m)+xy(n+m)=0.$$

Erhebt man nun Gl. (2) ins Quadrat und setzt den Wert für $x^2+y^2=n^2+2xy$ in (4) und entwickelt diese Gl., so erhält man (5) $xy=\frac{n^2(n-m)}{m-3n}$. Diese Gl. mit 4 multipliziert und zu der ins Quadrat erhobenen Gl. (2) addiert, giebt

$$(6)\quad x+y=\pm\sqrt{\frac{n^3-3n^2m}{m-3n}}.$$

Man hat jetzt in (6) und (2) die Summe und Differenz der Unbekannten, erhält also durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gl.

$$x=\frac{1}{2}\left(n\pm\sqrt{\frac{n^2(n-3m)}{m-3n}}\right)=\frac{1}{2}n\left[1\pm\sqrt{\frac{n-3m}{m-3n}}\right];$$

$$\text{und } y=\frac{1}{2}n\left[-1\pm\sqrt{\frac{n-3m}{m-3n}}\right].$$

32. Aus (1) ergiebt sich $xy=\frac{1}{12}$, oder $x^2y^2=\frac{1}{144}$. Setzt man diesen Wert für x^2y^2 in (2), so hat man $x^2+y^2=\frac{25}{144}$. Man hat jetzt das Produkt und die Quadratensumme der Unbekannten, weshalb nach Aufg. 26. *α*) ist

$$(3)\quad x-y=\pm\tfrac{1}{12}$$

$$(4)\quad x+y=\pm\tfrac{7}{12}, \text{ woraus}$$

$$x_1=y_2=-x_3=-y_4=\tfrac{1}{3},$$

$$x_2=y_1=-x_4=-y_3=\tfrac{1}{4}.$$

Aus der ersten Gleichung ergiebt sich, daß

(1) $xy=36$; also $\sqrt{xy}=\pm 6$; daher: (3) $2\sqrt{xy}=\pm 12$.

Erhebe die zweite Gleichung ins Quadrat, so ist:

(4) $x+2\sqrt{xy}+y=25$.

Setze aus (3) den Wert für $2\sqrt{xy}$ in (4) und ordne die Gleichung, so ist: (5) $x+y=13$ und (6) $x+y=37$.

Nun haben wir in (1) und (5) und (6) das Produkt nebst der Summe der Unbekannten; folglich ist nach Aufgabe 15: $x_1=y_2=9$; $x_2=y_1=4$; $x_3=y_4=36$ und $x_4=x_3=1$.

34. Subtrahiere und addiere die beiden gegebenen Gleichungen, so hat man: (3) $x+y=a-b$; (4) $2xy+(x-y)=a+b$.

Setze hierin $x+y=z$ und $x-y=u$, so ist $x=\frac{1}{2}(z+u)$ und $y=\frac{1}{2}(z-u)$; daher $2xy=\frac{1}{2}(z^2-u^2)$. Setze diese Werte für $x+y$, $(x-y)$, $2xy$ in (3) und (4), so ist:

(5) $z=a-b$; (6) $\frac{1}{2}(z^2-u^2)+u=a+b$.

Setze in (6) aus (5) den Wert für z und entwickele diese Gleichung, so ist:

(7) $u^2-2u=(a-b)^2-2(a+b)$; daher:

(8) $(u-1)^2=(a-b+1)^2-4a$; folglich:

(9) $u=1\pm\sqrt{(a-b+1)^2-4a}$. Daher ist:

(10) $x+y=a-b$ und

(11) $x-y=1\pm\sqrt{(a-b+1)^2-4a}$; folglich:

$x=\frac{1}{2}(a-b+1\pm\sqrt{(a-b+1)^2-4a})$ und

$y=\frac{1}{2}(a-b-1\pm\sqrt{(a-b+1)^2-4a})$.

35. Nimm die Differenz zwischen den beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man: $2x=0{,}25$ folglich $x=0{,}125$.

Setze den Wert für x in die erste Gleichung, so ist:

$y^2-y=(0{,}125)^2-0{,}25$; daher $(y-0{,}5)^2=(0{,}125)^2$;

folglich $y_1=0{,}625$ und $y_2=0{,}375$.

36. Setze $3x+4y=z$ und $7x-2y=u$, so ist:

(3) $zu+z=44$; (4) $zu-u=30$.

Demnach ist nach Aufgabe 34, da $a=44$ und $b=30$ ist $z_1=11$, $z_2=4$ und $u_1=3$, $u_2=10$. Daher ist:

(5) $\begin{Bmatrix} 3x+4y=11 \\ 7x-2y=\ 3 \end{Bmatrix}$; folglich $x_1=1$ und $y_1=2$.

(6) $\begin{Bmatrix} 3x+4y=\ 4 \\ 7x-2y=10 \end{Bmatrix}$; folglich $x_2=1\frac{7}{17}$ und $y_2=-\frac{4}{17}$.

37. α) Aus beiden hier gegebenen Gleichungen suche man die Summe sowie die Differenz der Unbekannten. Deshalb addiere sie, so ist:

(3) $(x+y)^2=a+b$, daher: (4) $x+y=\pm\sqrt{a+b}$.

Ferner nimm die Differenz zwischen der zweiten und der mit 3 multiplizierten ersten Gleichung, so ist:

(5) $(x-y)^2=b-3a$; daher (6) $x-y=\pm\sqrt{b-3a}$;

daher $x=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a+b}\pm\sqrt{b-3a}]$ und
$y=\frac{1}{2}[\pm\sqrt{a+b}\mp\sqrt{b-3a}]$, es ist also:

$$\left.\begin{matrix}x_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b-3a});\quad \left.\begin{matrix}x_2\\y_1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}(\sqrt{a+b}-\sqrt{b-3a})$$

$$\left.\begin{matrix}x_3\\y_4\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b-3a});\quad \left.\begin{matrix}x_4\\y_3\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}(\sqrt{a+b}-\sqrt{b-3a}).$$

β) Erhebe die erste gegebene Gleichung ins Quadrat, so ist:

$$(3)\quad x^2y^2=a^2(x^2+2xy+y^2).$$

Stelle jetzt aus (3) und der zweiten gegebenen Gleichung die Werte für x^2y^2 einander gleich und entwickele diese Gleichung, so findet man: (4) $x^2+y^2=xy\frac{2a^2}{b^2-a^2}$.

Setze aus (4) den Wert für x^2+y^2 in die zweite gegebene Gleichung und dividiere diese dann durch xy, so hat man:

$$(5)\quad xy=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}.$$

Setze diesen Wert für xy in die erste gegebene Gleichung und dividiere sie dann durch a, so findet man:

$$(6)\quad x+y=\frac{2ab^2}{b^2-a^2}.$$

In den Gleichungen (5) und (6) sind Produkt und Summe der Unbekannten gegeben; demnach hat man nach Aufg. 15:

$$x=y=\frac{1}{2}\left(\frac{2ab^2}{b^2-a^2}\pm\sqrt{\frac{4a^2b^4-8a^2b^2(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)^2}}\right)$$
$$=\frac{ab(b\pm\sqrt{2a^2-b^2})}{b^2-a^2}.$$

38. Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen erhält man:

$$(3)\quad (x+y)^2=\left(\frac{2a}{a^2-b^2}\right)^2;\ \text{folglich:}$$

$$(4)\quad x+y=\pm\frac{2a}{a^2-b^2}.$$

Multipliziere jetzt die erste gegebene Gleichung mit 3 und subtrahiere sie von der zweiten, so findet man:

$$(5)\quad (x-y)^2=\left(\frac{2b}{a^2-b^2}\right)^2;\ \text{folglich}\ (6)\quad x-y=\pm\left(\frac{2b}{a^2-b^2}\right).$$

Aus (4) und (6) folgt $x=\pm\left(\frac{a\pm b}{a^2-b^2}\right)$; $y=\pm\left(\frac{a\mp b}{a^2-b^2}\right)$. Daher

x_1 und $y_2=1:(a-b)$; y_1 und $x_2=1:(a+b)$,
x_3 und $y_4=-1:(a+b)$; y_3 und $y_4=-1:(a-b)$.

39. Man multipliziere die zweite gegebene Gleichung mit 2 und addiere sie zu der ersten Gleichung, so erhält man:

$$(3)\quad (x+y)^2=m+2n;\ \text{also}\ (4)\quad x+y=\pm\sqrt{m+2n}.$$

Man setze aus (4) den Wert für $x+y$ in die zweite gegebene Gleichung, so wird:

(5) $\pm y\sqrt{m+2n}=n$; also (6) y_1 und $y_2=\pm\frac{n}{\sqrt{m+2n}}$.

Man setze aus (4) den Wert für $x+y$ auch in die erste gegebene Gleichung, so ist:

(7) $x-y=\pm\frac{m}{\sqrt{m+2n}}$. Aus (6) und (7) folgt

$$x_1 \text{ und } x_2=\pm\frac{m+n}{\sqrt{m+2n}}.$$

40. α) Aus der Doppelgleichung entnehme man:

(1) $x+y=xy$ und (2) $x^2+y^2=xy$.

Stellt man die Werte für xy aus (1) und (2) einander gleich, so hat man:

$x^2+y^2=x+y$ oder $x(x-1)+y(y-1)=0$;

hieraus folgt $x_1=y_1=0$.

Erhebe (1) ins Quadrat, und subtrahiere hiervon Gleichung (2), so ist: $3xy=x^2y^2$ oder (3) $xy=3$.

Setze jetzt den Wert für xy aus (3) in (1) und (2), so hat man:

(4) $x+y=3$ und (5) $x^2+y^2=3$.

Aus (4) und (5) folgt gemäß Aufg. 24, da $a=b=3$ ist:

x_2 und $x_3=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{2.3-3^2})=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-3})$ und

y_2 und $y_3=\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{2.3-3^2})=\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{-3})$.

β) Man entnehme der Doppelgleichung:

(1) $(x+y)(x-y)=x-y$ und (2) $x-y=\frac{x}{y}$.

Durch Entwickelung erhält man aus Gleichung (2):

(3) $y^2+x(1-y)=0$.

Nun kann die Summe zweier Produkte nur in dem Falle $=0$ werden, wenn die Faktoren, also auch die Produkte Null sind. Für diesen Fall ist $x_1=y_1=0$.

Aus der Gleichung (1) folgt ferner, daß (4) $x+y=1$; folglich $y=1-x$. Setze diesen Wert für y in (2) und entwickele diese Gleichung, so hat man: $x^2-x=-\frac{1}{2}$; folglich $x_2=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ und daher $y_2=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

41. α) Man entnehme aus der gegebenen Doppelgleichung:

(1) $x+y=xy$ und (2) $x^2-y^2=xy$.

Aus (1) und (2) folgt, daß $x^2-y^2=x+y$ oder:

$(x+y)(x-y-1)=0$, folglich $x_1=y_1=0$.

Dividiere (2) durch (1), so ist: (3) $x-y=1$.

Da in (3) die Differenz der Unbekannten gegeben ist, so bestimme man die Summe derselben. Nun sei $x+y=z$, so ist $x=\frac{1}{2}(z+1)$ und $y=\frac{1}{2}(z-1)$. Setze diese Werte für $x+y$,

und x und y in (1), so ist: $z=\frac{1}{4}(z^2-1)$; daher $z^2-4z=1$; woraus folgt, daß $z=2\pm\sqrt{5}$ ist.

Daher ist x_2 und $x_3=\frac{1}{2}(2\pm\sqrt{5}+1)=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und
y_2 und $y_3=\frac{1}{2}(2\pm\sqrt{5}-1)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

β) Man entnehme der Doppelgleichung (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=x-y$ und (2) $x-\sqrt{xy}+y=x-y$. Aus (1) erhält man
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$, mithin (3) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$.
Multipliziert man (3) mit $\sqrt{y}$, so ist: (4) $\sqrt{y}=\sqrt{xy}-y$. Setzt man aus (2) den Wert für $\sqrt{xy}=2y$ in (4), so wird $\sqrt{y}=y$, also $y=y^2$. Dies ist der Fall für $y_1=0$ und $y_2=1$. Diese Werte für y in (3) eingesetzt, liefert $x_1=1$, $x_2=4$. Aus (2) folgt auch $xy=4y^2$ oder $x.y=4y.y$. Diese Gl. ist erfüllt für $y=0$, daher $x_3=y_3=0$.

42. α) Man suche die Differenz der Unbekannten. Darum erhebe man die erste Gleichung ins Quadrat und multipliziere die zweite mit 4ab. Nimmt man jetzt die Differenz der beiden entstandenen Gl., so wird:

(3) $(ax-by)^2=m^2-4abn$; also (4) $ax-by=\pm\sqrt{m^2-4abn}$; daher erhalten wir durch Addition und Subtraktion der ersten gegebenen Gleichung und (4):

$$x_1 \text{ und } x_2=[m\pm\sqrt{m^2-4abn}]:(2a) \text{ und}$$
$$y_1 \text{ und } y_2=[m\mp\sqrt{m^2-4abn}]:(2b).$$

β) Man suche die Differenz der Unbekannten. Nun sei
$ax-by=z$, so ist $x=\frac{1}{2}\left(\frac{p+z}{a}\right)$ und $y=\frac{1}{2}\left(\frac{p-z}{b}\right)$.
Setze diese Werte für x und y in die zweite gegebene Gleichung, so ist: $\frac{1}{4}c\left(\frac{p+z}{a}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{p-z}{b}\right)^2=q$ oder entwickelt:
$(a^2d+b^2c)z^2-2pz(a^2d-b^2c)=4a^2b^2q-p^2(a^2d+b^2c)$, woraus

$$z=\frac{p(a^2d-b^2c)\pm2ab\sqrt{(a^2d+b^2c)q-cdp^2}}{a^2d+b^2c}; \text{ daher:}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=\frac{adp\pm b\sqrt{(a^2d+b^2c)q-cdp^2}}{a^2d+b^2c} \text{ und}$$

$$y_1 \text{ und } y_2=\frac{bcp\mp a\sqrt{(a^2d+b^2c)q-cdp^2}}{a^2d+b^2c}.$$

43. α) Setze $\sqrt{mx}=z$, so ist $x=\frac{z^2}{m}$, und $\sqrt{ny}=u$, so ist $y=\frac{u^2}{n}$.
Daher ist, wenn diese Werte eingesetzt werden:

$$(1)\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{z^2}{m}+\frac{u^2}{n}\right)=m+n \text{ oder } nz^2+mu^2=2mn(m+n).$$
$$(2)\ z+u=m+n.$$

Setze aus (2) den Wert für u in (1) und dividiere die geordnete Gleichung durch m+n, so hat man:

$$z^2-2mz=m(n-m).$$

Hieraus folgt $z=m\pm\sqrt{mn}$ und daher $u=n\mp\sqrt{mn}$.

Mithin ist $\sqrt{mx}$ oder $\sqrt{m}.\sqrt{x}=m\pm\sqrt{mn}$; daher

$$\sqrt{x}=\frac{m\pm\sqrt{mn}}{\sqrt{m}}=\frac{m\sqrt{m}\pm\sqrt{m}\,.\sqrt{mn}}{\sqrt{m}\,.\sqrt{m}}=\sqrt{m}\pm\sqrt{n};\text{ also}$$

x_1 und $x_2=(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})^2$ und y_1 und $y_2=(\sqrt{n}\mp\sqrt{m})^2$.

β) Erhebe die erste Gleichung ins Quadrat und setze darin aus der zweiten Gleichung den Wert für x^2+y^2, so hat man:

$$2xy+bxy=a^2;\text{ folglich (3) } xy=\frac{a^2}{b+2}.$$

Nun haben wir in der ersten gegebenen Gleichung und in (3) Summe und Produkt der Unbekannten; daher nach Beispiel 15:

$$x=\tfrac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4\frac{a^2}{b+2}}\right)=\tfrac{1}{2}a\left(1\pm\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)\text{ und}$$

$$y=\tfrac{1}{2}a\left(1\mp\sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right).$$

44. α) Setze aus der ersten Gleichung den Wert für y in die zweite, so ist:

$$cx\left(\frac{m-ax}{b}\right)+dx+e\left(\frac{m-ax}{b}\right)=n;$$

$$\left(x-\frac{bd+cm-ae}{2ac}\right)^2=\frac{(bd+cm-ae)^2+4ac(em-bn)}{(2ac)^2};$$

$$\text{also } x_1 \text{ u. } x_2=\frac{bd+cm-ae\pm\sqrt{(bd+cm-ae)^2+4ac(em-bn)}}{2ac}.$$

Durch Substitution oder auf ähnliche Weise findet man:

$$y_1 \text{ und } y_2=\frac{ae+cm-bd\mp\sqrt{(ae+cm-bd)^2+4bc(dm-an)}}{2bc}.$$

β) Setzt man aus der ersten Gleichung den Wert für x in die zweite, so ist:

$$c\left(\frac{m-by}{a}\right)^2+dy\left(\frac{m-by}{a}\right)+ey^2+f\left(\frac{m-by}{a}\right)+gy=n;$$

$$(a^2e+b^2c-adb)y^2-y(2bcm-adm+abf-a^2g)=$$
$$a^2n-cm^2-afm.$$

Setze $2bcm-adm+abf-a^2g=N$ und bestimme y, so findet man:

$$y_1 \text{ und } y_2=\frac{N\pm\sqrt{(4a^2n-cm^2-afm)(a^2e+b^2c-abd)+N^2}}{2(a^2e+b^2c-abd)}.$$

Auf dieselbe Weise wird auch x gefunden.

45. α) Addiert man die beiden gegebenen Gleichungen und formt sie in eine auf Null reduzierte Gleichung um, so hat man:

$$x(x-(a+b))+y(y-(a+b))=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann nur unter der Voraussetzung Null werden, daß jedes Glied derselben gleich Null ist. Daher ist: $x_1=0$ und $y_1=0$. Ferner ist:

$$x-(a+b)=0;\ x_2=a+b$$
$$y-(a+b)=0;\ y_2=a+b.$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden gegebenen Gleichungen erhält man ferner:

$$(3)\ (a+b)(x+y)=x^2+y^2;\ (4)\ x+y=a-b.$$

Setze aus (4) den Wert für $x+y$ in (3) so hat man:

$$(5)\ x^2+y^2=a^2-b^2.$$

Erhebe (4) ins Quadrat und subtrahiere (5) hiervon, so ist:

$$(6)\ 2xy=2b^2-2ab.$$

Subtrahiere diese Gleichung von (5), so erhält man:

$$(7)\ (x-y)^2=a^2+2ab-3b^2=(a-b)(a+3b);$$
$$(8)\ x-y=\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}.$$

Aus (4) und (8) folgt, daß

$$x_3 \text{ und } x_4=\tfrac{1}{2}(a-b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)})$$
$$y_3 \text{ und } y_4=\tfrac{1}{2}(a-b\mp\sqrt{(a-b))(a+3b)}).$$

β) Aus den beiden hier gegebenen Gleichungen lassen sich durch Umformung folgende entwickeln:

$$(1)\ c(bx+ay)=xy(x+y).$$
$$(2)\ xy(bx+ay)-x^2y^2=abc(x+y-c).$$

Setze aus (1) den Wert für $bx+ay$ in (2), so ist:

$$(3)\ \frac{x^2y^2}{c}(x+y)-x^2y^2=abc(x+y-c) \text{ oder}$$
$$(4)\ x^2y^2(x+y-c)=abc^2(x+y-c).$$

Dividiere diese Gleichung durch $x+y-c$, so hat man:

$$(5)\ x^2y^2=abc^2;\ \text{also}\ (6)\ xy=c\sqrt{ab}.$$

Setze diesen Wert für xy in (1) so ist:

$$c(bx+ay)=c\sqrt{ab}(x+y) \text{ oder}$$
$$(7)\ (b-\sqrt{ab})x+(a-\sqrt{ab})y=0.$$

Setze aus (6) den Wert für x in (7), so erhält man:

$$(b-\sqrt{ab})\sqrt{ab}\,.\,\frac{c}{y}+(a-\sqrt{ab})y=0;\ \text{hieraus folgt:}$$
$$(a-\sqrt{ab})y^2=(\sqrt{ab}-b)c\sqrt{ab};\ \text{folglich}$$
$$y^2=\frac{abc-bc\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}}=\frac{bc(a-\sqrt{ab})}{a-\sqrt{ab})}=bc;\ y_1 \text{ und } y_2=\pm\sqrt{bc};$$

daher: x_1 und $x_2=\pm c\sqrt{ab:bc}=\pm\sqrt{ac}$.

Aus (4) folgt ferner, daß

$$(x^2y^2-abc^2)(x+y-c)=0;\ \text{folglich}\ (8)\ x+y-c=0.$$

Setze aus (8) den Wert für $x+y-c$ in die zweite gegebene Gleichung, so ist: (9) $ay+bx=xy$.

Hieraus folgt: $y=\frac{bx}{x-a}$ und $x=\frac{ay}{y-b}$.

Setzt man nach einander den Wert für y und x in die erste gegebene Gleichung, so erhält man:

$$x^2-x(a-b+c)+ac=0$$
$$y^2-y(b+c-a)+bc=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$x_3 \text{ und } x_4=\tfrac{1}{2}(a-b+c\pm\sqrt{(a-b+c)^2-4ac})$$
$$y_4 \text{ und } y_3=\tfrac{1}{2}(b+c-a\pm\sqrt{(b+c-a)^2-4bc}).$$

46. Zieht man aus der ersten Gleichung, nachdem man die Zeichen in die entgegengesetzten verwandelt hat, die Quadratwurzel, so erhält man:

$$x-3y-2=0; \text{ also (3) } x-2=3y.$$

Multipliziere die zweite gegebene Gleichung mit 3 und addiere dieselbe zur ersten, so erhält man:

$$(4)\ 2x^2-8x+3y=163.$$

Setze in (4) den Wert für 3y aus (3), so wird:

$$2x^2-8x+x-2=163 \text{ oder } 2x^2-7x=165.$$

Hieraus erhält man $x_1=11$, $x_2=-7\frac{1}{2}$ und daher $y_1=3$, $y_2=-3\frac{1}{6}$.

47. Multipiziert man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 5 und addiert diese beiden Gleichungen, so erhält man: $41y^2-46y=1687$, woraus $y=\frac{1}{41}(23\pm264)$. Werden diese Werte für y in die zweite gegebene Gleichung eingesetzt, so wird zuerst $3(x-2)^2+4.7^2-17.7=80$ oder $3(x-2)^2=3$ oder $x-2=\pm1$, woraus $x=2\pm1$. Es ist daher $x_1=3$, $x_2=1$; y_1 und $y_2=7$. Weiter ist $3(x-2)^2+4.(-5\frac{36}{41})^2+17.5\frac{36}{41}=80$ oder $x^2-4x=-\frac{285993}{5043}$, folglich

$$x_3 \text{ und } x_4=2\pm7{,}26022\sqrt{-1};\ y_3 \text{ und } y_4=-5\tfrac{36}{41}.$$

48. Die beiden gegebenen Gleichungen lassen sich umformen in:

$$(1)\ (x+y)^2-2(a+b)(x+y)=-4ab.$$
$$(2)\ (x-y)^2+2(a-b)(x-y)=4ab.$$

Addiere zu beiden Seiten der Gleichung (1) $(a+b)^2$ und zu beiden Seiten der Gleichung (2) $(a-b)^2$, so wird:

$$(3)\ [(x+y)-(a+b)]^2=(a-b)^2 \text{ und}$$
$$(4)\ [(x-y)+(a-b)]^2=(a+b)^2.$$

Zieht man aus (3) und (4) die Quadratwurzel, so erhält man: (5) $x+y-(a+b)=\pm(a-b)$;

$$(6)\ x-y+(a-b)=\pm(a+b).$$

Aus (5) und (6) ergiebt sich, daß

$$\alpha)\ \left.\begin{matrix} x+y=(a-b)+(a+b) \\ x-y=(a+b)-(a-b) \end{matrix}\right\} \text{ folglich } \begin{matrix} x_1=a+b \text{ und} \\ y_1=a-b. \end{matrix}$$

β) $\left.\begin{array}{l}x+y=(a-b)+(a+b)\\x-y=-(a+b)-(a-b)\end{array}\right\}$ folglich $x_2=0$ und $y_2=2a$.

γ) $\left.\begin{array}{l}x+y=-(a-b)+(a+b)\\x-y=(a+b)-(a-b)\end{array}\right\}$ folglich $x_3=2b$ und $y_3=0$.

δ) $\left.\begin{array}{l}x+y=-(a-b)+(a+b)\\x-y=-(a+b)-(a-b)\end{array}\right\}$ folglich $x_4=b-a$ und $y_4=a+b$.

49. Setzt man $y=xz$, so erhält man zur Bestimmung von z die beiden Gleichungen:

$$(1)\ x^2+ax^2z+bx^2z^2=m.$$
$$(2)\ x^2+cx^2z+dx^2z^2=n.$$

Dividiere Gleichung (1) durch (2), so erhält man:

$$(3)\ \frac{1+az+bz^2}{1+cz+dz^2}=\frac{m}{n}$$ oder entwickelt:

$$z^2-\frac{cm-an}{bn-dm}z=\frac{m-n}{bn-dm};$$ woraus:

$$z=\frac{cm-an\pm\sqrt{(cm-an)^2+4(m-n)(bn-dm)}}{2(bn-dm)}.$$

Bestimmen wir jetzt aus der Gleichung (1) den Wert für x, so ist:

$$x^2(1+az+bz^2)=m;$$ folglich

$$x=\pm\sqrt{\frac{m}{1+az+bz^2}}$$ und $$y=\pm z\sqrt{\frac{m}{1+az+bz^2}}.$$

50. α) Da hier die Summe und die Kubensumme der beiden Unbekannten gegeben ist, so suche man das Produkt derselben zu bestimmen. Daher erhebe man die Summen-Gleichung in den Kubus, so wird:

$$(3)\ x^3+y^3+3xy(x+y)=a^3.$$

Setze in diese Gleichung aus der zweiten den Wert für x^3+y^3 und aus der ersten Gleichung den Wert für $x+y$, so ist: $b+3axy=a^3$ oder (4) $xy=\frac{a^3-b}{3a}$.

In der ersten und in der (4) Gleichung ist also Summe und Produkt der Unbekannten gegeben, daher ist nach Beispiel 15:

$$\left.\begin{array}{l}x_1\\x_2\end{array}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right)$$ und $$\left.\begin{array}{l}y_1\\y_2\end{array}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(a\mp\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right).$$

β) Da die Differenz der Unbekannten gegeben, so suche man ihre Summe. Man setze daher $x+y=z$, so ist, da $x-y=a$ ist, $x=\frac{1}{2}(z+a)$ und $y=\frac{1}{2}(z-a)$. Setze diese Werte für x und y in die zweite Gleichung, so ist:

$$\tfrac{1}{8}(z+a)^3-\tfrac{1}{8}(z-a)^3=b.$$

Entwickele und ordne diese Gleichung, so erhält man:

$$z^2=\frac{4b-a^3}{3a}; \text{ also } z=\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}; \text{ daher:}$$

$$\left.\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right)=\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}+\frac{a}{2};$$

$$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(-a\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{3a}}\right)=\pm\sqrt{\frac{4b-a^3}{12a}}-\frac{a}{2}.$$

γ) Erhebe die erste Gleichung auf die dritte Potenz, so ist:

$$(3)\ a^3x^3+b^3y^3+3abxy(ax+by)=c^3.$$

Subtrahiere die Gleichung (3) von der zweiten gegebenen Gleichung, so ist: (4) $abxy(n-3)(ax+by)=d-c^3$.

Setze in (4) den Wert für $ax+by$ aus der ersten Gleichung, so hat man: (5) $abcxy(n-3)=d-c^3$; daher:

$$(6)\ abxy=\frac{d-c^3}{c(n-3)}.$$

Erhebe jetzt die erste Gleichung ins Quadrat und nimm zwischen dieser und der mit 4 multiplizierten Gleichung (6) die Differenz, so ist:

$$(7)\ (ax-by)^2=\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}; \text{ folglich}$$

$$(8)\ ax-by=\pm\sqrt{\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}}.$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichung (8) und der ersten erhält man:

$$x=\frac{1}{2a}\left[c\pm\sqrt{\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}}\right]$$

$$y=\frac{1}{2b}\left[c\mp\sqrt{\frac{c^3(n+1)-4d}{c(n-3)}}\right].$$

51. Aus der ersten Gleichung erhält man durch Umformung:

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)+xy(x+y)=a \text{ oder}$$

$$(3)\ (x^2+y^2)(x+y)=a.$$

Dividiere diese Gleichung durch die zweite gegebene Gleichung, so ist: (4) $\frac{a}{b}x^2y^2=x+y$. Erhebe diese Gleichung in den Kubus, so hat man: (5) $\frac{a^3}{b^3}x^6y^6=x^3+y^3+3xy(x+y)$.

Subtrahiere von (5) die erste Gleichung, so ist:

$$(6)\ \frac{a^3}{b^3}x^6y^6-2xy(x+y)=a.$$

Setze in (6) den Wert für $x+y$ aus (4), so hat man: $\frac{a^3}{b^3}x^6y^6-2x^3y^3\cdot\frac{a}{b}=a$ oder: (7) $x^6y^6-\frac{2b^2}{a^2}x^3y^3=\frac{b^3}{a^2}$; hieraus folgt:

(8) $x^3y^3=\frac{b^2\pm b\sqrt{a^2b+b^2}}{a^2}$; demnach (9) $xy=\sqrt[3]{\frac{b^2\pm b\sqrt{a^2b+b^2}}{a^2}}$.
Setze den für xy gefundenen Wert gleich z, so ist

$$(10)\ xy=z \text{ und } (11)\ x+y=\frac{a}{b}z^2\text{.}$$ Daher

$$\left.\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix}y_2\\x_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left[\frac{a}{b}z^2\pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}z^4-4z}\right]=\frac{az^2\pm\sqrt{a^2z^4-4b^2z}}{2b}.$$

52. Man dividiere die erste Gleichung durch x^3y und die zweite durch xy^3, so wird:

$$(3)\ x^3+\frac{1}{x^3}=a\left(y+\frac{1}{y}\right);\quad (4)\ y^3+\frac{1}{y^3}=a\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Setzt man $x+\frac{1}{x}=z$ und $y+\frac{1}{y}=u$, so ist

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z \text{ und } y^3+\frac{1}{y^3}=u^3-3u.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man aus (3) und (4): (5) $z^3-3z=au$ und (6) $u^3-3u=az$. Setzt man aus (5) den Wert für u in (6), so wird:

$$\left(\frac{z^3-3z}{a}\right)^3-\frac{3(z^3-3z)}{a}=az \text{ oder } (7)\ [z^2(z^2-3)^2-3a^2](z^2-3)=a^4.$$

Man setze $z^2-3=p$, so ist $z^2=p+3$ und man erhält aus (7): $[(p+3)p^2-3a^2]p=a^4$. Hieraus folgt $p^4+3p^3=a^4+3a^2p$ oder $p^2(p^2+3p)=a^2(a^2+3p)$, daher $p^2=a^2$, also $p=\pm a$. Es ist demnach $z^2=\pm a+3$, also $z_1=\pm\sqrt{a+3}$ und $z_2=\pm\sqrt{3-a}$. Daher $u_1=\pm\sqrt{a+3}$ und $u_2=\mp\sqrt{3-a}$. Weiter erhält man durch Addition und Subtraktion von (5) und (6):

$z^3-3z+u^3-3u=az+au$ oder (8) $[z^2-zu+u^2-(3+a)](z+u)=0$.
$z^3-3z-u^3+3u=-az+au$ „ (9) $[z^2+zu+u^2-(3-a)](z-u)=0$.

Aus (8) und (9) folgt

$$z+u=0 \text{ und } z-u=0, \text{ also } z_3=u_3=0,$$

sowie weiter $z^2-zu+u^2=3+a$ und (11) $z^2+zu+u^2=3-a$. Aus (10) und (11) folgt $(z-u)^2=3+2a$ und $(z+u)^2=3-2a$. Es ist mithin $z-u=\pm\sqrt{3+2a}$ und $z+u=\pm\sqrt{3-2a}$. Daher

$$z_4 \text{ und } z_5=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{3-2a}+\sqrt{3+2a}) \text{ und}$$
$$u_4 \text{ und } u_5=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{3-2a}-\sqrt{3+2a}).$$

Durch Substitution der verschiedenen für z und u gefundenen Werte erhält man die entsprechenden Werte für x und y.

53. α) Man addiere beide Gleichungen, so erhält man:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)(a+b) \text{ oder}$$
$$(3)\ (x+y)[x^2-xy+y^2-(a+b)]=0,$$

also (4) $x+y=0$. Ferner ist (5) $x^2-xy+y^2=a+b$. Subtrahiert man jetzt die beiden gegebenen Gleichungen, so wird:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)(a-b) \text{ oder}$$

(6) $(x-y)[x^2+xy+y^2-(a-b)]=0$, also (7) $x-y=0$. Ferner ist (8) $x^2+xy+y^2=a-b$. Aus (4) und (7) folgt $x_1=0$, $y_1=0$. Nach (7) ist $x=y$. Durch Einsetzen dieses Wertes für y in (5) erhält man $2x^2-x^2=a+b$, also $x_2=\pm\sqrt{a+b}=y_2$. Nach (4) ist $x=-y$. Setzt man diesen Wert in (8) ein, so ist $2x^2-x^2=a-b$, also $x_3=\pm\sqrt{a-b}=-y_3$. Addiert man (5) und (8), so wird: $x^2+y^2=a$; subtrahiert man (5) von (8), so ist $2xy=-2b$. Es ist also $x^2+y^2+2xy=a-2b$, daher (9) $x+y=\pm\sqrt{a-2b}$ und $x^2+y^2-2xy=a+2b$, daher (10) $x-y=\pm\sqrt{a+2b}$. Durch Addition bezw. Subtraktion von (9) und (10) erhält man:

$$x_4=y_5=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{a-2b}+\sqrt{a+2b}),\quad y_4=x_5=\pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{a-2b}-\sqrt{a+2b}).$$

β) Man setze $\sqrt{y}=z$, so ist (3) $z^3=17z+4x$ und (4) $x^3=4z+17x$. Addiert man (3) und (4), so wird $x^3+z^3=21z+21x$ oder $(x+z)[x^2-xz+z^2-21]=0$. Hieraus folgt (5) $x+z=0$ und (6) $x^2-xz+z^2=21$. Subtrahiert man (3) von (4), so ist $x^3-z^3=13(x-z)$ oder $(x-z)[x^2+xz+z^2-13]=0$, woraus (7) $x-z=0$ und (8) $x^2+xz+z^2=13$. Aus (5) und (7) folgt $x_1=0$ und $z_1=0$, daher $y_1=0$. Setzt man aus (7) $x=z$ in (6), so ist $x^2-x^2+x^2=21$, also $x_2=\pm\sqrt{21}$, $z=\pm\sqrt{21}=\sqrt{y}$, also $y_2=21$. Ferner ist nach (5) $x=-z$. Diesen Wert in (8) eingesetzt, liefert $x^2-x^2+x^2=13$, also $x_3=\pm\sqrt{13}$; $z=\mp\sqrt{13}=\sqrt{y}$, also $y_3=13$. Aus (6) und (8) erhält man durch Addition (9) $x^2+z^2=17$, durch Subtraktion (10) $2xz=-8$. Aus (9) und (10) folgt $x^2+2xz+z^2=9$, also $x+z=\pm3$. Weiter ist $x^2-2xz+z^2=25$, daher $x-z=\pm5$. Folglich $x_4=\pm4$, $z_4=\mp1=\sqrt{y}$, $y_4=1$, $x_5=\mp1$, $z_5=\pm4=\sqrt{y}$; $y_5=16$.

54. α) Aus der ersten Gl. erhält man: (3) $\frac{8x}{3}=x^2-y^2$. Setzt man den Wert für x^2-y^2 aus (3) in die zweite Gl., so ist: $2x^3+6xy^2=\frac{8}{3}x^3$ oder $x^2=9y^2$, also $x=\pm3y$. Setzt man diesen Wert für x in (3), so erhält man y_1 und $y_2=\pm1$ und daher x_1 und $x_2=3$.

β) Setzt man aus der zweiten Gleichung den Wert für y in die erste und entwickelt diese Gleichung, so findet man:

$$x^6-ax^3=-b^3 \text{ oder } (x^3)^2-a(x^3)=-b^3.$$

Diese Gleichung wird gerade so, wie auch eine quadratische Gleichung behandelt und aufgelöst, und man hat nicht einmal nötig, eine Substitution für x^3 eintreten zu lassen. Ergänzt man daher das Quadrat, so hat man:

$$(x^3-\tfrac{1}{2}a)^2=\tfrac{1}{4}(a^2-4b^3)\text{; also}$$

$$x^3=\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^3}\text{; daher}$$

$x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^3}};\ y=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}a\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4b^3}}.$

55. α) Erhebe die erste Gleichung auf die vierte Potenz, so ist:

$$(3)\ x^4+y^4+4xy(x+y)^2-2x^2y^2=a^4.$$

Setze hierin aus der ersten Gleichung den Wert für $x+y$ und aus der zweiten den Wert für x^4+y^4 und ordne die Gleichung, so erhält man:

$$(4)\ x^2y^2-2a^2xy=\tfrac{1}{2}(b-a^4);\ \text{daher:}$$
$$(5)\ (xy-a^2)^2=\tfrac{1}{2}(a^4+b);\ \text{folglich}$$
$$(6)\ xy=a^2\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4+b)}.$$

Subtrahiere von der ins Quadrat erhobenen ersten Gleichung die mit 4 multiplizierte Gleichung (6), so hat man:

$$(7)\ (x-y)^2=a^2-[4a^2\pm4\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^4+b)}];\ \text{daher:}$$
$$(8)\ x-y=\pm\sqrt{-3a^2\mp\sqrt{8(a^4+b)}}.$$

In der ersten Gleichung und in (8) haben wir die Summe und die Differenz der Unbekannten; daher erhält man durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}x_1 \text{ und } x_3\\ x_2 \text{ und } x_4\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}[a\pm\sqrt{-3a^2\mp\sqrt{8(a^4+b)}}]\ \text{und}$$
$$\left.\begin{matrix}y_1 \text{ und } y_3\\ y_2 \text{ und } y_4\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}[a\mp\sqrt{-3a^2\mp\sqrt{8(a^4+b)}}].$$

β) Setzt man hier, da die Differenz der Unbekannten gegeben ist, die Summe $x+y=z$, so ist $x=\tfrac{1}{2}(d+z)$ und $y=\tfrac{1}{2}(d-z)$. Substituiert man diese Werte für x und y in die zweite gegebene Gleichung, entwickelt und ordnet dieselbe, so erhält man:

$$z^4+6d^2z^2=8m-d^4;\ \text{daher}$$
$$(z^2+3d^2)^2=8(m+d^4);\ \text{also}$$
$$z^2=-3d^2\pm2\sqrt{2(m+d^4)};\ \text{folglich}$$
$$z=\pm\sqrt{-3d^2\pm2\sqrt{2(m+d^4)}}.$$

Mithin ist: $x=\tfrac{1}{2}[d\pm\sqrt{-3d^2\pm2\sqrt{2(m+d^4)}}]$,

$$y=\tfrac{1}{2}d[\mp\sqrt{-3d^2\pm2\sqrt{2(m+d^4)}}].$$

56. α) Da $\sqrt{x}+\sqrt{y}=12$, so setze $\sqrt{x}-\sqrt{y}=z$, so ist:

$$x=\tfrac{1}{4}(12+z)^2 \text{ und } y=\tfrac{1}{4}(12-z)^2.$$

Setze diese Werte für x und y in die zweite Gleichung, so ist: $\tfrac{1}{16}[(12+z)^4+(12-z)^4]=3026$ oder: $z^4+6\,.\,12^2\,.\,z^2=3472$; also $(z^2+3\,.\,12^2)^2=(436)^2$; daher $z^2=\pm436-432$; also $z^2=4$; folglich z_1 und $z_2=\pm2$. Ferner $z^2=-868$; also z_3 und $z_4=\pm\sqrt{-868}=\pm2\sqrt{-217}$. Daher ist: $x=\tfrac{1}{4}(12\pm2)^2$; also $x_1=7^2=49$, und $x_2=5^2=25$; $y=\tfrac{1}{4}(12\mp2)^2$; also $y_1=5^2=25$ und $y_1=7^2=49$.

Ferner x_3 und $x_4=\tfrac{1}{4}(12\pm2\sqrt{-217})^2=\pm12\sqrt{-217}-181$

y_3 und $y_4=\tfrac{1}{4}(12\mp2\sqrt{-217})^2=\mp12\sqrt{-217}-181.$

Dieses Beispiel kann auch nach dem Beisp. 55. α) auf-

gelöst werden, wenn man $\sqrt{x}=z$ und $\sqrt{y}=u$ setzt und diese bestimmt.

β) Setze $\sqrt{x+y}=z$, so ist: $x+y=z^2$; daher erhalten wir, wenn wir diese Werte für $x+y$ und $\sqrt{x+y}$ in die erste Gleichung einsetzen: $z^2+z=12$; folglich $z_1=3$ und $z_2=-4$. Hieraus folgt: (1) $x+y=9$ und (2) $x+y=16$.

Formt man die zweite gegebene Gleichung um und setzt darin aus (1) und (2) die verschiedenen Werte für $x+y$, so erhält man: (3) $x^2-xy+y^2=21$ und (4) $x^2-xy+y^2=\frac{189}{16}$. Erhebe (1) ins Quadrat und subtrahiere hiervon (3), so ist: $xy=20$; also (5) $4xy=80$; daraus folgt dann:

(6) $(x-y)^2=1$; folglich (7) $x-y=\pm 1$.

Aus (1) und (7) ergiebt sich $x_1=5$ und $y_1=4$; $x_2=4$ und $y_2=5$.

Verfährt man bei der Gleichung (4) ebenso, so erhält man:

$$(8)\ (x-y)^2=-\frac{2505}{36};\ \text{also}\ (9)\ x-y=\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{-2505}.$$

Daher haben wir ferner aus (2) und (9):

x_3 und $x_4=8\pm\frac{1}{12}\sqrt{-2505}=8\pm 4{,}17083\sqrt{-1}$ und

y_3 und $y_4=8\mp\frac{1}{12}\sqrt{-2505}=8\mp 4{,}17083\sqrt{-1}$.

Nachdem man den Wert in (1) und (2) für die Summe der Unbekannten gefunden, kann man auch auf folgende Weise verfahren. Man setze $x-y=u$, so ist:

$$\begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2}(9+u) \\ y=\frac{1}{2}(9-u) \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2}(16+u) \\ y=\frac{1}{2}(16-u) \end{Bmatrix}.$$

Setzen wir diese Werte für x und y in die zweite Gleichung und entwickeln dieselbe, so haben wir im ersten Falle $u=\pm 1$ und im andern Falle $u=\pm\frac{1}{6}\sqrt{-2505}$ u. s. w.

57. α) Da $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ und dieses Produkt dem Produkte $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ gleich ist, so erhalten wir nach §. 225 folgende Proportion:

$$1:\sqrt{x}=(\sqrt{x}+\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

Hieraus erhalten wir nach §. 228:

$$(1+\sqrt{x}):2\sqrt{x}=(1-\sqrt{x}):2\sqrt{y}.$$

Aus dieser Proportion folgt, daß

$$(3)\ \sqrt{y}(1+\sqrt{x})=\sqrt{x}(1-\sqrt{x}).$$

Zieht man aus der zweiten gegebenen Gleichung die Quadratwurzel, so hat man:

$$(4)\ (\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}-1)y=0$$

oder $(x-y)(\sqrt{2}-1)=0$, daher $x_1=y_1=0$.

Setze $\sqrt{x}=z$, so ist $x=z^2$; $\sqrt{y}=u$, so ist $y=u^2$; wir erhalten alsdann, wenn wir diese Werte in (4) und (3) einsetzen, (5) $u(1+z)=z(1-z)$,

$$(6)\ (\sqrt{2}-1)z^2-(\sqrt{2}-1)u^2=0.$$

Setze aus (5) den Wert für u in (6) und ordne diese Gleichung, so ist: $z^2-2z\sqrt{2}=-1$; daher $z=\sqrt{2}\pm1$; folglich $u=(\sqrt{2}\pm1)^2$
Daher x_2 und $x_3=(\sqrt{2}\pm1)^2$ und y_2 und $y_3=(\sqrt{2}\pm1)^4$.

β) Man dividiere die erste Gleichung durch $x-y$, so erhält man
$$(3)(x-y)^2=\tfrac{4}{49}(x^2+y^2+xy)$$
Setzt man aus der zweiten Gleichung den Wert für y in (3), so wird $117x^2-594x=-45$ oder $13x^2-66x=-5$, woraus $x_1=5$ und daher $y_1=3$; $x_2=\frac{1}{13}$ und $y_2=\frac{5}{39}$. Da die erste gegebene Gleichung sich umformen läßt in $[(x-y)^2-\frac{4}{49}(x^2+y^2+xy)](x-y)=0$, so ist auch $x-y=0$, also $x=y$, daher nach der zweiten gegebenen Gleichung $7x+1=12x$, folglich $x_3=y_3=\frac{1}{5}$.

58. α) Dividiere die erste Gleichung durch die zweite, so ist:
$$(3)\ (x^2+y^2)(x^2+y^2-xy)=91.$$
Erhebe die zweite Gleichung ins Quadrat und setze daraus den Wert für x^2+y^2 in (3), so ist:
$$(4)\ (25-2xy)(25-3xy)=91;\text{ daher}$$
$$(5)\ (xy-\tfrac{125}{12})^2=(\tfrac{53}{12})^2;\ (6)\ xy=6;\ (7)\ xy=14\tfrac{5}{6}.$$
In der zweiten und (6) und (7) haben wir die Summe und das Produkt der beiden Unbekannten; daher ist nach Aufg. 15:
$$x_1=3,\ x_2=2,\ x_3 \text{ und } x_4=\tfrac{1}{6}[15\pm\sqrt{-309}]=2{,}5\pm2{,}9297326\sqrt{-1}.$$
$$y_1=2,\ y_2=3,\ y_3\ \text{„}\ y_4=\tfrac{1}{6}[15\mp\sqrt{-309}]=2{,}5\mp2{,}9297326\sqrt{-1}.$$
β) Da hier die Summe der Unbekannten gegeben ist, so suche man die Differenz derselben. Man setze deshalb $x-y=z$, so ist: $x=\frac{1}{2}(a+z)$ und $y=\frac{1}{2}(a-z)$; daher:
$$x^2+y^2=\tfrac{1}{4}(a+z)^2+\tfrac{1}{4}(a-z)^2=\tfrac{1}{2}(a^2+z^2)$$
$$x^3+y^3=\tfrac{1}{8}(a+z)^3+\tfrac{1}{8}(a-x)^3=\tfrac{1}{4}a(a^2+3z^2);\text{ daher:}$$
$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=\tfrac{1}{8}a(a^4+4a^2z^2+3z^4).\text{ Es ist also:}$$
$$\tfrac{1}{8}a(a^4+4a^2z^2+3z^4)=b\text{ oder:}$$
$$z^4+\tfrac{4}{3}a^2z^2=\frac{8b-a^5}{3a};\text{ daher:}$$
$$(z^2+\tfrac{2}{3}a^2)^2=\frac{a^5+24b}{9a};\text{ folglich:}$$
$$z^2=-\tfrac{2}{3}a^2\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{a^5+24b}{a}}\text{ und}$$
$$z=\pm\sqrt{-\tfrac{2}{3}a^2\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{a^5+24b}{a}}};\text{ folglich}$$
$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\tfrac{1}{3}\left(2a^2\mp\sqrt{\frac{a^5+24b}{a}}\right)}$$
$$\text{oder } x=\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{-6a^2\pm3\sqrt{\frac{a^5+24b}{a}}}\text{ und}$$

$$y=\frac{1}{2}a\mp\frac{1}{6}\sqrt{-6a^2\pm3\sqrt{\frac{a^5+24b}{a}}}.$$

59. α) Da die Differenz der Unbekannten gegeben ist, so suche man die Summe derselben. Setze daher $x+y=z$, so ist:

$$x=\frac{1}{2}(z+m) \text{ und } y=\frac{1}{2}(z-m); \text{ ferner ist:}$$

$$x^5-y^5=\frac{1}{32}[(z+m)^5-(z-m)^5].$$

Setze diesen Wert für x^5-y^5 in die zweite Gleichung ein und entwickele dieselbe, so hat man:

$$z^4+2m^2z^2=\frac{16n-m^5}{5m};\; z^2=-m^2\pm2\sqrt{\frac{m^5+4n}{5m}};$$

$$\text{also } z=\pm\sqrt{-m^2\pm2\sqrt{\frac{m^5+4n}{5m}}}; \text{ daher}$$

$$x=\frac{1}{2}\left[m\pm\sqrt{-m^2\pm2\sqrt{\frac{m^5+4n}{5m}}}\right] \text{ und}$$

$$y=-\frac{1}{2}\left[m\mp\sqrt{-m^2\pm2\sqrt{\frac{m^5+4n}{5m}}}\right].$$

β) Erhebe die erste Gl. auf die fünfte Potenz, so wird:

$$(3)\; x^5-y^5+5xy(x+y)^3-5x^2y^2(x+y)=p^5.$$

Setze in (3) den Wert für x^5+y^5 aus der zweiten und den Wert für $x+y$ aus der ersten, so ist:

$$(4)\; q+5p^3xy-5px^2y^2=p^5; \text{ hieraus folgt:}$$

$$(5)\; xy=\frac{1}{2}\left(p^2\pm\sqrt{\frac{p^5+4q}{5p}}\right).$$

Hiernach kann es nicht schwer fallen, aus der ersten Gleichung und aus (5), in welchen Summe und Produkt der Unbekannten gegeben sind, nach Aufgabe 15 die Werte für x und y zu bestimmen.

γ) Die zweite gegebene Gleichung läßt sich umformen in:

$$(2)\; x^5+y^5+axy(x^3+y^3)+bx^2y^2(x+y)=n.$$

Setze hierin den Wert für $x+y$ aus der ersten Gleichung, so hat man:

$$(3)\; x^5+y^5+axy(x^3+y^3)+bmx^2y^2=n.$$

Erhebe die erste Gleichung auf die fünfte Potenz, so ist:

$$(4)\; x^5+y^5+5xy(x+y)^3-5x^2y^2(x+y)=m^5 \text{ oder}$$

$$(5)\; x^5+y^5+5m^3xy-5mx^2y^2=m^5.$$

Setze aus (5) den Wert für x^5+y^5 in (3), so ist:

$$(6)\; m^5+5mxy(xy-m^2)+axy(x^3+y^3)+bmx^2y^2=n.$$

Erhebe jetzt die erste Gleichung in den Kubus und setze daraus den Wert für x^3+y^3 in Gleichung (6), so hat man:

$$(7)\; m^5+5mxy(xy-m^2)+axy(m^3-3mxy)+bmx^2y^2=n.$$

Entwickele und ordne diese Gleichung, so haben wir:

$$(8)\ x^2y^2 - \frac{m^2(5-a)}{b+5-3a}xy = \frac{n-m^5}{m(b+5-3a)}.$$

Hieraus ergiebt sich, daß:

$$(9)\ xy = \frac{m^3(5-a) \pm \sqrt{m^6(5-a)^2+4m(n-m^5)(b+5-3a)}}{2(b+5-3a)m}.$$

Nun hat man in der ersten Gleichung und in (9) die Summe und das Produkt der Unbekannten, weshalb sich dieselben nach der mehrfach erwähnten Aufgabe 15 leicht bestimmen lassen.

60. Entwickele die erste hier gegebene Gleichung, so ist:

$$(3)\ x^2y^2[x^2y^2+2b(x^3+y^3)+4b^2xy+a^4]$$
$$+xy[2a^2b(x^3+y^3)]+a^2(x^6+y^6)=4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2.$$

Setze in (3) den Wert für x^3+y^3 aus der zweiten Gleichung, so ist:

$$(4)\ x^2y^2[xy(xy+4bc+4b^2)+a^2(a^2+4bc)]+a^2(x^6+y^6)$$
$$=4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2.$$

Erhebe die zweite Gleichung ins Quadrat und setze daraus den Wert für x^6+y^6 in (4), so ist:

$$(5)\ x^2y^2[xy(xy+4bc+4b^2)+2a^2(2c^2-xy)+a^2(a^2+4bc)]$$
$$=4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2.$$

Dividiere diese Gleichung durch x^2y^2 und ordne sie, so haben wir:

$$(6)\ x^2y^2-2xy(a^2-2bc-2b^2)+(a^2-2bc-2b^2)^2=0;$$

daher: $(7)\ xy-(a^2-2bc-2b^2)=0$; folglich

$$(8)\ xy=a^2-2bc-2b^2.$$

Setze diesen Wert für xy in die zweite Gleichung, so hat man: $(9)\ x^3+y^3=2c(a^2-2bc-2b^2)$.

Erhebe (9) ins Quadrat und subtrahiere hiervon die in den Kubus erhobene und mit 4 multiplizierte Gleichung (8) so ist: $(10)\ (x^3-y^3)^2=4(a^2-2bc-2b^2)^2(c^2-a^2+2bc+2b^2)$;

daher: $(11)\ x^3-y^3=\pm 2(a^2-2bc-2b^2)\sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2}$.

Durch Addition und Subtraktion der Gleichung (9) und (11) hat man: $x^3=(a^2-2bc-2b^2)[c\pm\sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2}]$

$y^3=(a^2-2bc-2b^2)[c\mp\sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2}]$; folglich

$$x=\sqrt[3]{(a^2-2bc-2b^2)(c\pm\sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2})}$$
$$y=\sqrt[3]{(a^2-2bc-2b^2)(c\mp\sqrt{c^2-a^2+2bc+2b^2})}.$$

Aus Gleichung (6) folgt auch, daß $x=y=0$.

61. α) Erhebe die zweite hier gegebene Gleichung in den Kubus, so hat man: $(3)\ x^3y^3[x^3+y^3+3xy(x+y)]=b^3$.

Setze in (3) aus der ersten Gleichung den Wert für x^3+y^3 und aus der zweiten den Wert für $xy(x+y)$, so erhält man:

(4) $x^3y^3(a+3b)=b^3$; also (5) $x^3y^3=\frac{b^3}{a+3b}$;

daher: (6) $xy=\frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}$. Setze diesen Wert für xy in die zweite Gleichung und bestimme $x+y$, so findet man:

$$(7)\ x+y=\sqrt[3]{a+3b}.$$

Um nun die Differenz der Unbekannten zu finden, setze man $x-y=z$, so ist:

$$x=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}+z\right) \text{ und } y=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}-z\right).$$

Setze diese Werte für x und y in die erste gegebene Gleichung, so hat man:

$$\tfrac{1}{8}\left(\sqrt[3]{a+3b}+z\right)^3+\tfrac{1}{8}\left(\sqrt[3]{a+3b}-z\right)^3=a; \text{ daher:}$$

$$z^2=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}; \text{ also } z=\pm\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[6]{a+3b}}; \text{ folglich}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{a+3b}\pm\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt[6]{a+3b}}\right\}=\frac{\sqrt{a+3b}\pm\sqrt{a-b}}{2\sqrt[6]{a+3b}}$$

$$\text{und daher } y_1 \text{ und } y_2=\frac{\sqrt{a+3b}\mp\sqrt{a-b}}{2\sqrt[6]{a+3b}}.$$

β) Setze $x=zy$, so ist, wenn dieser Wert in die beiden Gleichungen eingesetzt wird:

$$(3)\ y^5(z^5+z^3-z^2-1)=a,$$
$$(4)\ y^5(z^5-z^3+z^2-1)=b.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man

$$(5)\ 2y^5(z^5-1)=a+b \text{ und } (6)\ 2y^5z^2(z-1)=a-b.$$

Wird (5) durch (6) dividiert, so ist

$$(7)\ z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1=\frac{a+b}{a-b}.$$

Setzt man in (7) $z+\frac{1}{z}=u$, so ist

$$u=-\tfrac{1}{2}\left(1\mp\sqrt{(9a-b):(a-b)}\right) \text{ und } z=\tfrac{1}{2}(u\pm\sqrt{u^2-4}).$$

Nach (3) ist daher $y^5=\frac{1}{2}(a+b):(z^5-1)$,

folglich $y=\sqrt[5]{\frac{1}{2}(a+b):(z^5-1)}$ und daher $x=z\sqrt[5]{\frac{1}{2}(a+b):(z^5-1)}$.

62. Setzt man $y=xz$, so wird: $x^3=(a+b)x^2+(a-b)x^2z^2$ oder (1) $x^2[x-(a+b)-(a-b)z^2]=0$, und $x^3z^3=(a+b)x^2z^2+(a-b)x^2$ oder (2) $x^2[xz^3-(a+b)z^2-(a-b)]=0$.

Folglich $x_1=0$ und weil $y=xz$, auch $y_1=0$.

Aus (1) folgt (3) $x=(a+b)+(a-b)z^2$ und aus (2) folgt (4) $xz^3=(a+b)z^2+(a-b)$.

Setzt man den Wert für x aus (3) in (4), so erhält man: $z^3[(a+b)+(a-b)z^2]=(a+b)z^2+(a-b)$ oder entwickelt:

$$(z^5-1)+\frac{a+b}{a-b}z^2(z-1)=0 \text{ oder}$$

$$(5)\ (z-1)\left[z^4+z^3+\frac{2a}{a-b}z^2+z+1\right]=0, \text{ woraus } z=1.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes für z in (3) erhält man $x_2=2a$, daher auch $y_2=2a$. Weiter ist

$z^4+z^3+\frac{2a}{a-b}z^2+z+1=0$. Diese Gleichung durch z^2 geteilt und geordnet giebt: $z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+\frac{2a}{a-b}=0$.

Setze $z+\frac{1}{z}=u$, $z^2+\frac{1}{z^2}=u^2-2$, so ist $u^2+u=-\frac{2b}{a-b}$, woraus $u=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{a-9b}{a-b}}\right)$ und $z=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a-9b}{a-b}}\pm$

$$\sqrt{-1+\left(-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a-9b}{a-b}}\right)^2}.$$

Dieser Wert für z ist in (3) einzusetzen.

63. Man forme die zweite Gleichung um in

(3) $x^2(y^4+1)(y^4-1)=3280(y+1)(y-1)$.

Dividiert man jetzt (3) durch (1), so wird: $x(y^4+1)=41(y+1)$. Wird von dieser Gleichung die erste subtrahiert, so bleibt

$$(5)\ 2x+39y=121, \text{ also } (6)\ x=\frac{121-39y}{2}.$$

Setzt man diesen Wert für x in (1) und dividiert das Resultat durch $(y-1)$, so wird:

$$\left(\frac{121-39y}{2}\right)(y^3+y^2+y+1)=80 \text{ oder}$$

$$(7)\ 39y^4+39-82y^3-82y^2-82=0.$$

Setzt man (8) $y+\frac{1}{y}=z$, und $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$, so wird aus (7):

$$39(z^2-2)-82z-82=0 \text{ oder } 39z^2-82z=160,$$

$$\text{mithin } z_1=3\tfrac{1}{3},\ z_2=-1\tfrac{3}{13}.$$

Setzt man den ersten Wert für z in (8), so erhält man $y_1=3$ und $y_2=\frac{1}{3}$. Durch Einsetzen dieser Werte für y in (6) erhält man $x_1=2$ und $x_2=54$.

Die Einsetzung des zweiten Wertes für z in (8) liefert $y+\frac{1}{y}=-\frac{16}{13}$, woraus y_3 und $y_4=\frac{1}{13}(-8\pm\sqrt{-105})$.

64. α) Man entnehme der Doppelgleichung (1) $x^3+y^3=(x+y)xy$ und (2) $(x+y)xy=axy$.

Aus (1) erhält man: $(x+y)[(x^2+y^2-xy)-xy]=0$, woraus folgt (3) $x+y=0$ und (4) $x^2+y^2-xy=xy$. Aus (2) erhält man $xy[(x+y)-a]=0$, woraus folgt (5) $xy=0$ und (6) $x+y=a$. Aus (3) und (5) ergiebt sich $x_1=y_1=0$. Aus (4) und (5) folgt $x_2=y_2=0$. Aus (4) und (6) folgt $x_3=y_3=\frac{1}{2}a$.

β) Man erhält aus der 1. Gl.:

$$\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{x+y}{x^2+y^2} \text{ oder } (x+y)\left(\frac{x-y}{xy}\right)=(x+y)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Hieraus folgt (3) $x+y=0$ und (4) $\frac{x-y}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}$. Setzt man aus (3) $x=-y$ und $y=-x$ in die zweite Gl. ein, so findet man $x_1=y_1=0$. Aus (4) folgt (5) $x^4-y^4=(x+y)xy$ und nach der zweiten Gl. ist auch (6) $x^4-y^4=(x-y)x^2$, mithin ist (7): $(x+y)xy=(x-y)x^2$. Hieraus folgt $x_2=y_2=0$ und weiter $(x+y)y=(x-y)x$, woraus: $(x-y)^2=2y^2$, daher (8) $x-y=\pm\sqrt{2}\,.\,y$, mithin $x=y(1\pm\sqrt{2})$. Durch Einsetzen dieses Wertes für x in (4) erhält man y_3 und $y_4=\frac{1}{4}$, daher x_3 und $x_4=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{2})$.

γ) Man entnehme der Doppelgleichung (1) $(x:y)-(y:x)=axy$ und (2) $x-y=axy$. Aus (1) folgt $x^2-y^2=ax^2y^2$ oder (3) $(x+y)(x-y)=ax^2y^2$. Setzt man aus (2) den Wert für $x-y$ in (3), so erhält man (4) $(x+y)axy=axy\,.\,xy$. Hieraus folgt $xy=0$, also $x_1=0$, $y_1=0$. Aus (4) folgt auch (5) $x+y=xy$. Addiert man (5) und (2), so erhält man $2x=xy(a+1)$, also $y_2=\frac{2}{a+1}$. Setzt man diesen Wert für y in (2), so folgt $x=\frac{2}{a+1}+\frac{2a}{a+1}x$, also $x_2=\frac{2}{1-a}$.

65. Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so wird

$$(3)\quad (x^2+y^2)(x+y)=40xy.$$

Subtrahiert man hiervon die erste, so erhält man: $xy(x+y)=12xy$ oder $xy(x+y-12)=0$, woraus folgt (4) $xy=0$ und (5) $x+y=12$. Aus (4) ergiebt sich $x_1=y_1=0$.

Addiert man die erste Gleichung zu (3), so ist $2x^3+2y^3=56xy$ oder $x^3+y^3=28xy$. Diese Gleichung, durch (5) dividiert, liefert (6) $x^2-xy+y^2=\frac{7}{3}xy$. Die Gl. (5) quadriert, giebt (7) $x^2+2xy+y^2=144$. Wird (6) von (7) subtrahiert, so erhält man $3xy=144-\frac{7}{3}xy$ oder (8) $xy=27$. Aus (5) und (8) findet sich (gemäß Aufgabe 15) $x_2=y_3=9$, $x_3=y_2=3$.

66. α) Multipliziere die erste Gleichung mit $\sqrt{x+y}$, so erhält man:

$$(3)\quad 17-\frac{7(x+y)}{x}=\frac{10x}{x+y}.$$

Entwickele diese Gleichung und ordne sie, so ist: (4) $x=\frac{7}{3}y$.
Erhebe die zweite Gleichung ins Quadrat und setze darin aus (4) den Wert für x, so hat man: $(y-1)^2=\frac{4}{3}y$; hieraus folgt $y_1=3$ und $y_2=\frac{1}{3}$. Daher ist $x_1=7$ und $x_2=\frac{7}{9}$. Durch die Entwickelung der Gleichung (3) erhält man auch

$$(5)\quad 3xy-7y^2=0 \text{ oder } y(3x-7y)=0.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn sowohl y, als auch $2x-7y=0$ gesetzt wird. Setzt man den Wert für $y_3=0$ in die zweite Gleichung, so erhält man als dritten Wert für x: $\sqrt{x}=-1$; folglich $x_3=(-1)^2=1$.

β) Entwickele die beiden Gleichungen und ordne sie, so ist:

$$(3)\quad y^2-81=2(y+9)x\sqrt{x}.$$
$$(4)\quad y-9=(\sqrt{y}-3)x\sqrt{x}.$$

Dividiere Gleichung (3) durch (4), so wird:

$$(5)\quad y+9=\frac{2(y+9)}{\sqrt{y}-3} \text{ oder}$$
$$(6)\quad 1=\frac{2}{\sqrt{y}-3}=\frac{2(\sqrt{y}+3)}{y-9}; \text{ daher}$$
$$(7)\quad 2(\sqrt{y}+3)=y-9. \text{ Hieraus erhält man:}$$
$$(8)\quad 4y=(y-15)^2 \text{ oder } (y-25)(y-9)=0; \text{ daher}$$
$$y_1=9 \text{ und } y_2=25.$$

Dividiere jetzt (3) durch $y+9$, so erhalten wir:

$$(9)\quad y-9=2x\sqrt{x}.$$

Setze in diese Gleichung die beiden für y gefundenen Werte, so ergiebt sich $x_1=0$ und $x_2=4$.

Da $y+9$ ein Faktor der Gleichung (3) ist, so haben wir ferner die Bestimmungsgleichung $y+9=0$; folglich $y_3=-9$. Setzt man diesen Wert für y in (4), so erhalten wir nach gehöriger Entwickelung:

$$x^3=-18.\sqrt{-1}; \text{ also } x_3=-\sqrt[3]{18}.\sqrt{-1}=-2{,}62074\sqrt{-1}.$$

67. Addiert man zu beiden Seiten der Gleichung (1) $\frac{1}{4}$ und zieht danach aus (1) und (2) die Quadratwurzel, so erhält man:

$$(3)\quad x^2-3y^2=\pm 11\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} \text{ und } (4)\quad y^2-5x=\pm 1.$$

Man hat also jetzt folgende Systeme von Gleichungen:

α) $x^2-3y^2=12,\ y^2-5x=1.$ γ) $x^2-3y^2=-11,\ y^2-5x=1,$
β) $x^2-3y^2=12,\ y^2-5x=-1.$ δ) $x^2-3y^2=-11,\ y^2-5x=-1.$

Hieraus ergeben sich folgende Wertpaare:

δ) $x_1=1,\ x_2=14;\ y_1=\pm 2,\ y_2=\pm\sqrt{69};$

γ) x_3 und $x_4=\frac{1}{2}(15\pm\sqrt{193});\ y_3$ und $y_4=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(77\pm 5\sqrt{193})};$

β) x_5 und $x_6=\frac{1}{2}(15\pm 3\sqrt{29});\ y_5$ und $y_6=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(73\pm 15\sqrt{29})};$

α) $x_7=\frac{1}{2}(15\pm\sqrt{285});\ y_7=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(77\pm 5\sqrt{285})}.$

68. α) Man bestimme aus beiden Gleichungen a und b durch x und y und entwickele aus den für a und b gefundenen Werten die Unbekannten x und y. Deshalb dividiere man die erste Gleichung durch x+y und multipliziere die zweite mit x, so ist: (3) $\frac{ax}{x+y}+\frac{by}{x+y}=2(x-y)$,

(4) $\frac{bx}{x-y}-\frac{ax}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{y}$.

(3) und (4) addiert giebt:

(5) $\frac{by}{x+y}+\frac{bx}{x-y}=2(x-y)+\frac{x^2+y^2}{y}$.

Entwickele Gleichung (5) und ordne sie, so wird:

$by=x^2-y^2$; also $b=\frac{x^2-y^2}{y}$.

Substituiere den Wert für b in die erste Gleichung, so ist:

$ax+x^2-y^2=2(x^2-y^2)$; folglich $a=\frac{x^2-y^2}{x}$.

Es ist also: (6) $ax=x^2-y^2$ und (7) $by=x^2-y^2$.

Aus (6) und (7) folgt, daß $ax=by$ oder (8) $ax-by=0$.

Da in (8) die Differenz der Unbekannten gegeben ist, so suche man die Summe $ax+by$ zu bestimmen. Setze daher $ax+by=z$, so ist:

$x=\frac{1}{2a}z$ und $y=\frac{1}{2b}z$; daher: $\frac{1}{2}z=\frac{1}{4a^2}z^2-\frac{1}{4b^2}z^2$ oder

$(b^2-a^2)z^2-2a^2b^2z=0$ oder

$z[(b^2-a^2)z-2a^2b^2]=0$. Hieraus folgt, daß

$z_1=0$ und $(b^2-a^2)z-2a^2b^2=0$; daher:

$z_2=\frac{2a^2b^2}{b^2-a^2}$; mithin ist: $x_1=y_1=0$;

$x_2=(1:2a)(2a^2b^2:b^2-a^2)=ab^2:(b^2-a^2)$,

$y_2=(1:2b)(2a^2b^2:b^2-a^2)=a^2b:(b^2-a^2)$.

β) Entwickele die beiden gegebenen Gleichungen und ordne sie, so ist: (1) $y^2-x^2=2ax+a^2-m^2$.

(2) $x^2-y^2=-2by+b^2+n^2$.

Addiere diese beiden Gleichungen, so ist:

(3) $ax-by=\frac{1}{2}(m^2-n^2-a^2-b^2)$.

Bestimme hieraus den Wert für x und setze denselben in (1), so hat man nach gehöriger Entwickelung:

$$y^2-by\frac{m^2-n^2+a^2-b^2}{a^2-b^2}=$$

$$\frac{(m^2-n^2)^2-2m^2(a^2+b^2)-2n^2(a^2-b^2)+(a^2-b^2)^2}{4(a^2-b^2)};$$

$$\left(y-\frac{1}{2}b\frac{m^2-n^2+a^2-b^2}{a^2-b^2}\right)^2=$$

$$\tfrac{1}{4}a^2\frac{(m^2-n^2)^2-2(m^2+n^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

Setze hierin $a^2-b^2=p^2$, so ist:

$$\left(y-\frac{b}{2p^2}(m^2-n^2+p^2)\right)^2=\frac{a^2}{4p^2}[(m^2-n^2)^2-2p^2(m^2+n^2)+p^4].$$

Da nun $(m^2-n^2)^2-2p^2(m^2+n^2)+p^4=(m+n+p)(m+n-p)(m-n+p)(m-n-p)=N^2$, so ist:

$$\left(y-\frac{b}{2p^2}(m^2-n^2+p^2)\right)^2=\frac{a^2N^2}{4p^4}; \text{ folglich}$$

$$y=\frac{1}{2p^2}[b(m^2-n^2+p^2)\pm aN],$$

$$\text{oder } y=\tfrac{1}{2}\frac{b(m^2-n^2+a^2-b^2)\pm aN}{a^2-b^2}.$$

Setzen wir diesen Wert für y in (3), so haben wir:

$$x=\frac{1}{2p^2}[a(m^2-n^2+p^2)\pm bN],$$

$$\text{oder } x=\tfrac{1}{2}\frac{a(m^2-n^2+a^2-b^2)\pm bN}{a^2-b^2}.$$

γ) Wird Gl. (1) mit y, Gl. (2) mit x multipliziert, so erhält man (3) $ax^5y+by^6=cxy$ und (4) $ay^5x+bx^6=cxy$. Subtrahiert man (4) von (3), so wird:

$$axy\,(x^4-y^4)-b(x^6-y^6)=0 \text{ oder}$$
$$(x^2-y^2)[axy(x^2+y^2)-b(x^4+x^2y^2+y^4)]=0.$$

Hieraus folgt $x^2-y^2=0$, also (5) $x=\pm y$. Aus (1) und (5) ergiebt sich (6) $ax^5+bx^5=cx$, woraus $x_1=0$ und $y_1=0$.

Aus (6) folgt auch $x^4(a+b)=c$, daher $x_2=\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}}=y_2$.

Ferner ergiebt sich aus (1) und (5) $ax^5-bx^5=cx$ oder

$x^4(a-b)=c$, folglich $x_3=\sqrt[4]{\frac{c}{a-b}}=-y_3$.

δ) Hier ist: (1) $\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{y^2}=3x$; (2) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}=x$.

Multipliziere (2) mit 3 und setze die Werte für 3x aus den beiden Gleichungen einander gleich, so erhalten wir:

(3) $x\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}\,.\sqrt[3]{y}=3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}$ oder (4) $(x-3)\sqrt{x}=\sqrt[3]{y}(3-\sqrt[3]{y})$.

Setze $\sqrt{x}=z$, so ist $x=z^2$, und $\sqrt[3]{y}=u$, so ist $y=u^3$.

Setze diese Werte für $\sqrt{x}$, x und $\sqrt[3]{y}$ in (2) und (4), so ist:

(5) $z+u=z^2$ und (6) $(z^2-3)z=u(3-u)$.

Setze aus (5) den Wert für u in (6), so ist nach gehöriger Entwickelung:

$z^2-z=2$; daraus folgt $z_1=2$ und $z_2=-1$; daher u_1 u. $u_2=2$.

Mithin ist: $\sqrt{x}=2$; also $x_1=4$; ferner $\sqrt{x}=-1$, also $x_2=(-1)^2=1$.

Ferner ist: $\sqrt[3]{y}=2$; also $y_1=2^3=8$.

Aus (4) folgt auch, daß $(x-3)\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y}-3)=0$, weshalb $\sqrt{x}=\sqrt[3]{y}=0$ und daher $x_3=y_2=0$ ist.

69. α) Vergleicht man diese Aufgabe mit der Aufgabe 23 nebst den in derselben gefundenen Resultaten, so wird man sich leicht überzeugen, daß

$$(1)\ a_1=\frac{x-1}{y+1} \text{ und } (2)\ a_2=-\frac{y-1}{x+1}; \text{ ferner}$$

$$(2)\ b_1=\frac{y-1}{x+1} \text{ und } (4)\ b_2=-\frac{x-1}{y+1}.$$

Aus (1) und (3) erhält man $x_1=\frac{2a+ab+1}{1-ab}$ und

„ (2) „ (4) „ „ $x_2=\frac{1+ab-2b}{1-ab}$.

Daher ist: $y_1=\frac{ab+2b+1}{1-ab}$ und $y_2=\frac{ab-2a+1}{1-ab}$.

β) Aus der zweiten Gleichung folgt, daß $x=\frac{\frac{1}{4}y^4+1}{y^2}$. Bestimme jetzt die Werte für $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x^2-1}$, setze dieselben in die erste Gleichung ein, so erhält man nach gehöriger Entwickelung:

$$\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}y^2+1)=\tfrac{1}{2}y^2+1 \text{ oder } y^2=4; \text{ also } y=\pm 2.$$

$$\text{Daher } x=\frac{\frac{1}{4}(\pm 2)^4+1}{(\pm 2)^2}=\tfrac{5}{4}=1\tfrac{1}{4}.$$

γ) Quadriert man die erste der gegebenen Gl., so erhält man: (3) $2x-2\sqrt{x^2-y^2}=\frac{9}{4}$, woraus sich ergiebt: $\sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{9}{8}$. Diesen Wert für $\sqrt{x^2-y^2}$ in die zweite Gl. eingesetzt, liefert $x-\frac{9}{8}-\sqrt{x^2+y^2}=-2$ oder (4) $x+\frac{7}{8}=\sqrt{x^2+y^2}$. Diese Gleichung quadriert, giebt: $x^2+\frac{7}{4}x+\frac{49}{64}=x^2+y^2$ oder (5) $y^2=\frac{7}{4}x+\frac{49}{64}$. Setzt man diesen Wert für y^2 in die zweite der gegebenen Gl., so wird: $\sqrt{x^2-\frac{7}{4}x-\frac{49}{64}}-\sqrt{x^2+\frac{7}{4}x+\frac{49}{64}}=-2$ oder

$$\sqrt{x^2-\tfrac{7}{4}x-\tfrac{49}{64}}=x+\tfrac{7}{8}-2=x-\tfrac{9}{8}.$$

Diese Gleichung quadriert, giebt: $x^2-\frac{7}{4}x-\frac{49}{64}=x^2-\frac{9}{4}x+\frac{81}{64}$, woraus $\frac{1}{4}x=\frac{65}{64}$ und $x=4\frac{1}{16}$. Den Wert für x in Gl. (5) eingesetzt, giebt $y^2=\frac{126}{16}$, also $y=\pm\frac{1}{4}\sqrt{126}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{14}$.

70. α) Die hier gegebenen Gleichungen lassen sich umformen in:

$$(1)\ \frac{(2x-1)(2y-1)+1}{(x-y+1)(x+y-1)}=a+b.$$

$$(2)\ \frac{y-x+1}{x-y+1}=ab.$$

Setze aus (2) den Wert für x in (1) und entwickele diese Gleichung, so ist:

$$y^2-\frac{a+b+2ab}{1+ab}y=-\frac{ab(a+b)+ab(1+ab)}{(1+ab)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, daß $y=\frac{(a+b+2ab)\pm(a-b)}{2(1+ab)}$;

folglich $y_1=\frac{a(1+b)}{1+ab}$ und $y_2=\frac{b(1+a)}{1+ab}$.

Mithin: $x_1=\frac{a(1+b)}{1+ab}+\frac{1-ab}{1+ab}=\frac{a+1}{1+ab}$

$$x_2=\frac{b(1+a)}{1+ab}+\frac{1-ab}{1+ab}=\frac{b+1}{1+ab}.$$

β) Durch Umformung der zweiten Gleichung erhält man:

$$(3)\quad (x+y)(x^3+y^3)=6\tfrac{3}{4}x^2y^2.$$

Da in der ersten Gleichung $x-y=2$ die Differenz der Unbekannten gegeben ist, so suche man ihre Summe zu bestimmen. Es sei nun $x+y=z$, so ist:

$x=\frac{1}{2}(z+2)$ und $y=\frac{1}{2}(z-2)$; daher ist:

$x^3+y^3=\frac{1}{8}[(z+2)^3+(z-2)^3]=\frac{1}{4}z(z^2+12)$; also

$(x+y)(x^3+y^3)=\frac{1}{4}z^2(z^2+12)$;

$x^2y^2=\frac{1}{16}(z+2)^2(z-2)^2=\frac{1}{16}(z^2-4)$; daher ist:

$\frac{1}{4}z^2(z^2+12)=6\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}(z^2-4)^2$. Hieraus folgt:

$z^4-\frac{408}{11}z^2+\frac{432}{11}=0$; folglich

$z^2=\frac{204\pm192}{11}$; daher $z^2=36$; also $z_1=+6$ und $z_2=-6$;

ferner $z^2=4\,.\,\frac{3}{11}$; also z_3 und $z_4=\pm2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Demnach ist: $x_1=4$, $x_2=-2$, x_3 und $x_4=\pm\sqrt{\frac{3}{11}}+1$,

$y_1=2$, $y_2=-4$, y_3 und $y_4=\pm\sqrt{\frac{3}{11}}-1$.

γ) Nach gehöriger Entwickelung der gegebenen Gleichungen erhält man:

$$(1)\quad x^4+y^4+xy(x^2+y^2)=mx^2y^2;$$

(2) $x+y=n$. Erhebe diese Gleichung auf die 4. Potenz, so wird (3) $x^4+{}^4y+4xy(x+y)^2-2x^2y^2=n^4$.

Setze aus (1) den Wert für x^4+y^4 und aus (2) den Wert für $x+y$ in (3), so ist:

$$(4)\quad (m-2)x^2y^2-xy(x^2+y^2)+4n^2xy=n^4.$$

Bestimme aus dem Quadrat der Gleichung (2) den Wert für x^2+y^2 und setze denselben in (4), so ist:

$$(5)\quad (m-2)x^2y^2-xy(n^2-2xy)+4n^2xy=n^4 \text{ oder}$$

(6) $x^2y^2+\frac{3n^2}{m}xy=\frac{n^4}{m}$; hieraus folgt: (7) $xy=\frac{n^2}{m}[-3\pm\sqrt{4m+9}]$.

In (2) und (7) haben wir Summe und Produkt der Unbekannten; bestimmen wir hieraus die Differenz derselben,

so haben wir: (8) $x-y=\pm n\sqrt{\frac{m+6\mp2\sqrt{4m+9}}{m}}$.

Aus (2) und (8) folgt

$$x=\tfrac{1}{2}n\left\{1\pm\sqrt{\frac{m+6\mp2\sqrt{4m+9}}{m}}\right\}$$

$$y=\tfrac{1}{2}n\left\{1\mp\sqrt{\frac{m+6\mp2\sqrt{4m+9}}{m}}\right\}.$$

71. α) Aus der zweiten Gleichung erhält man durch Entwickelung und Umformung:

$$(3)\ 4n^2x^2=[m+(x+y)][m+(x-y)][m-(x-y)]\times[-m+(x+y)].$$

Setze $x+y=z$ und $x-y=u$, so ist $x=\tfrac{1}{2}(z+u)$ und $y=\tfrac{1}{2}(z-u)$.

Es ist also, wenn wir diese Werte für x und y in (3) einsetzen:

$4n^2\,.\,\tfrac{1}{4}(z+u)^2=(m+z)(m+u)(m-u)(-m+z)$ oder:

$$(4)\,n^2(z+u)^2=m^2(z^2-m^2)-(z^2-m^2)u^2.$$

Nun ist nach der Aufgabe $nx=py$ oder $n(z+u)=p(z-u)$; folglich

$u=-\frac{n-p}{n+p}z$, also $u^2=\left(\frac{n-p}{n+p}\right)^2z^2$; daher hat man aus (4):

$$\frac{4n^2p^2z^2}{(n+p)^2}=m^2(z^2-m^2)-(z^2-m^2)\left(\frac{n-p}{n+p}\right)^2z^2.$$

Entwickele diese Gleichung und ordne sie, so hat man:

$$z^4-2z^2\frac{p^2(m^2-n^2)+n^2(m^2-p^2)}{(n-p)^2}=-\frac{m^4(n+p)^2}{(n-p)^2};\text{ also}$$

$$z^2=\frac{p^2(m^2-n^2)+n^2(m^2-p^2)\pm2np\sqrt{(m^2-n^2)(m^2-p^2)}}{(n-p)^2};\text{ folglich}$$

$$z=\frac{\pm\sqrt{p^2(m^2-n^2)+n^2(m^2-p^2)\pm2np\sqrt{(m^2-n^2)(m^2-p^2)}}}{n-p}.$$

Die für z gefundene Wurzelgröße läßt sich, da

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b}}$$

nach §. 339 in die Summe zweier Wurzeln auf folgende Weise umändern. Setze mit Bezug auf vorstehende Formel:

$$a=p^2(m^2-n^2)+n^2(m^2-p^2)\text{ und}$$

$\sqrt{b}=2np\sqrt{(m^2-n^2)(m^2-p^2)}$, so ist

$a^2=p^4(m^2-n^2)^2+2n^2p^2(m^2-n^2)(m^2-p^2)+n^4(m^2-p^2)^2$ und

$b=4n^2p^2(m^2-n^2)(m^2-p^2)$; daher ist:

$$a^2-b=[p^2(m^2-n^2)-n^2(m^2-p^2)]^2;$$

$$\sqrt{a^2-b}=\pm[p^2(m^2-n^2)-n^2(m^2-p^2)];$$

$$a+\sqrt{a^2-b}=2p^2(m^2-n^2)\text{ und}$$

$a-\sqrt{a^2-b}=2n^2(m^2-p^2)$; daher

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}}=$

$\pm\sqrt{p^2(m^2-n^2)}\pm\sqrt{n^2(m^2-p^2)}=$

$\pm p\sqrt{m^2-n^2}\pm n\sqrt{m^2-p^2}$. Es ist also:

$$z=\pm\frac{p\sqrt{m^2-n^2}\pm\sqrt{m^2-p^2}}{n-p}=x+y;$$

$$u=\frac{\pm p\sqrt{m^2-n^2}\mp n\sqrt{m^2-p^2}}{n-p}=x-y; \text{ folglich}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=p\frac{\pm p\sqrt{m^2-n^2}\pm n\sqrt{m^2-p^2}}{n^2-p^2}$$

$$y_1 \text{ und } y_2=n\frac{\pm n\sqrt{m^2-n^2}\pm n\sqrt{m^2-p^2}}{n^2-p^2}.$$

β) Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen erhält man: (3) $\frac{1+x}{1-y}+\frac{1+x}{1+y}+\frac{2}{1-x}=a+b$ oder

$$(4)\quad \frac{1+x}{(1-y)(1+y)}+\frac{1}{1-x}=\tfrac{1}{2}(a+b).$$

Dividiere die zweite gegebene Gleichung durch $1-y$, so ist:

$$(5)\quad \frac{1+x}{(1-y)(1+y)}+\frac{1}{1-x}=\frac{b}{1-y}.$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$(6)\quad \frac{b}{1-y}=\tfrac{1}{2}(a+b); \text{ daher } y_1 \text{ und } y_2=\frac{a-b}{a+b}.$$

Setze diesen Wert für y in die erste gegebene Gleichung und ordne sie, so ist:

$$x^2-\frac{2ab}{a+b}x=\frac{4ab}{(a+b)^2}+1-\frac{2ab}{a+b}; \text{ daher}$$

$$\left(x-\frac{ab}{a+b}\right)^2=\frac{(a+b-ab)^2+4ab}{(a+b)^2}; \text{ folglich}$$

$$x_1 \text{ und } x_2=\frac{ab\pm\sqrt{(a+b-ab)^2+4ab}}{a+b}.$$

γ) Aus den beiden hier gegebenen Gleichungen erhält man folgende zwei: (1) $(x+y)^2=xy$; (2) $x^2+y^2=\frac{x^2y^2}{a^2}$.

Setze aus (1) den Wert für x^2+y^2 in (2), so ist:

$$(3)\quad \frac{x^2y^2}{a^2}=-xy; \text{ also } (4)\quad xy=-a^2.$$

Man setze diesen Wert für xy in (1), so hat man:

$$(5)\quad (x+y)^2=-a^2; \text{ also } (6)\quad x+y=a\sqrt{-1}.$$

In (4) und (6) haben wir Produkt und Summe der Unbekannten, daher ist nach Aufgabe 15:

x_1 und $y_2=\pm\frac{1}{2}a(\sqrt{-1}+\sqrt{3})$ und y_1 und $x_2=\pm\frac{1}{2}a(\sqrt{-1}-\sqrt{3})$.

δ) Man setze (1) $x+y=u$ und (2) $xy=v$, so erhält man, wenn man diese Werte für $x+y$ und xy in die beiden gegebenen Gleichungen einsetzt:

(3) $v(5\frac{5}{6}-u)=u$; (4) $v^2+u^2-2v+1=8\frac{1}{3}v$.

Durch Elimination von u hat man:

(5) $v^4-8\frac{1}{3}v^3+15\frac{13}{36}v^2-8\frac{1}{3}v+1=0$.

Dividiere diese Gleichung durch v^2 und ordne sie, so wird:

$$(6)\quad v^2+\frac{1}{v^2}-8\frac{1}{3}\left(v+\frac{1}{v}\right)+15\frac{13}{36}=0.$$

Setze in (6) $v+\frac{1}{v}=z$, so erhält man $z_1=6\frac{1}{6}$ und $z_2=2\frac{1}{6}$.

Daher ist: (8) $v+\frac{1}{v}=6\frac{1}{6}$ und (9) $v+\frac{1}{v}=2\frac{1}{6}$.

Aus den beiden Gleichungen (8) und (9) folgt, daß

$v_1=6$, $v_2=\frac{1}{6}$, $v_3=1\frac{1}{2}$ und $v_4=\frac{2}{3}$.

Setze diese 4 verschiedenen Werte für v in Gleichung (3) und bestimme u.

Ist nun $v_1=6$, so ist $u_1=5$;
" " $v_2=\frac{1}{6}$, " " $u_2=\frac{5}{6}$;
" " $v_3=1\frac{1}{2}$ " " $u_3=3\frac{1}{2}$;
" " $v_4=\frac{2}{3}$, " " $u_4=2\frac{1}{3}$;

Nun ist in den beiden Gleichungen (1) und (2) die Summe nebst dem Produkte der Unbekannten gegeben; daher ist nach Aufgabe 15:

$$x=\tfrac{1}{2}(u\pm\sqrt{u^2-4v});\quad y=\tfrac{1}{2}(u\mp\sqrt{u^2-4v}).$$

Setzt man hierin zur Bestimmung von x und y die verschiedenen für v und u gefundenen Werte, so erhält man:

Ist $v_1=6$ und $u_1=5$, so ist $\begin{cases}x_1=3, & y_1=2\\ x_2=2, & y_2=3\end{cases}$

" $v_2=\frac{1}{6}$ und $u_1=\frac{5}{6}$, " " $\begin{cases}x_3=\frac{1}{2}, & y_3=\frac{1}{3}\\ x_4=\frac{1}{3}, & y_4=\frac{1}{2}\end{cases}$

" $v_3=1\frac{1}{2}$ und $u_3=3\frac{1}{2}$, " " $\begin{cases}x_5=3, & y_5=\frac{1}{2}\\ x_6=\frac{1}{2}, & y_6=3\end{cases}$

" $v_4=\frac{2}{3}$ und $u_4=2\frac{1}{3}$, " " $\begin{cases}x_7=2, & y_7=\frac{1}{3}\\ x_8=\frac{1}{3}, & y_8=2\end{cases}$.

72. α) Aus der ersten hier gegebenen Gleichung erhält man:

$$(1)\quad x+\frac{y^2}{x}=m-ay.$$

Erhebe diese Gleichung ins Quadrat, so hat man:

$$(2)\quad x^2+\frac{y^4}{x^2}+2y^2=m^2-2amy+a^2y^2.$$

Setze hierin aus der zweiten gegebenen Gleichung den Wert für $x^2+\frac{y^4}{x^2}$ und ordne diese Gleichung, so ist:

(3) $(a^2+b-2)y^2-2amy=-(m^2-n)$; hieraus

$$\left(y-\frac{am}{a^2+b-2}\right)^2=\left(\frac{am}{a^2+b-2}\right)^2-\frac{m^2-n}{a^2+b-2}$$

$$=\frac{a^2n+(2-b)(m^2-n)}{(a^2+b-2)^2}; \text{ daher}$$

$$y=\frac{am\pm\sqrt{a^2n+(2-b)(m^2-n)}}{a^2+b-2}.$$

Setzt man den für y gefundenen Wert $=M$ in Gleichung (1) und entwickelt dieselbe, so hat man:

$$x^2-(m-aM)x=-M^2; \text{ folglich}$$

$$x=\tfrac{1}{2}[m-aM\pm\sqrt{m(m-2aM)+(a^2-4)M^2}].$$

β) Aus den beiden gegebenen Gleichungen ergeben sich folgende zwei: (1) $x^2+y^2=x(m-ay)$;

(2) $x^6+y^6=x^3(m-by^3)$.

Erhebe Gleichung (1) in den Kubus, so ist:

(3) $x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)$

$=x^3[m^3-a^3y^3-3amy(m-ay)]$.

Setze in Gleichung (3) den Wert für x^2+y^2 aus (1) und den Wert für x^6+y^6 aus (2), so ist:

(4) $x^3(m^3-by^3)+3x^3y^2(m-ay)$

$=x^3[m^3-a^3y^3-3amy(m-ay)]$.

Entwickele diese Gleichung, so hat man:

(5) $(a^3-3a-b)y^2-3my(a^2-1)=-3am^2$; daher

$$y=3m\frac{a^2-1\pm\sqrt{(a^2-1)^2-\frac{4}{3}a(a^3-3a-b)}}{2(a^3-3a-b)}.$$

Setzt man diesen Wert für y in Gleichung (1), so ist, wenn wir denselben mit M bezeichnen:

$$x=\tfrac{1}{2}[m-aM\pm\sqrt{m(m-2an)+(a^2-4)M^2}].$$

73. α) Addiere die 3 gegebenen Gleichungen und subtrahiere von der Summe derselben nach einander die 3 gegebenen Gleichungen, so ist: (4) $yz=\frac{1}{2}(-m+n+o)$ oder $=\frac{1}{2}p$

(5) $xz=\frac{1}{2}(m-n+o)$ oder $=\frac{1}{2}q$

(6) $xy=\frac{1}{2}(m+n-o)$ oder $=\frac{1}{2}s$.

Multipliziere diese 3 Gleichungen mit einander und ziehe aus diesem Produkte die Quadratwurzel, so hat man:

(7) $xyz=\pm\sqrt{\frac{1}{8}pqs}$.

Dividiere nacheinander die Gleichung (7) durch (4), (5) und (6), so erhält man:

$$x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{8}pqs:\tfrac{1}{4}p^2}=\pm\sqrt{qs:2p}$$

$$\text{oder } x = \pm\sqrt{\frac{(m-n+o)(m+n-o)}{2(-m+n+o)}};$$

$$y = \sqrt{ps:2q} = \pm\sqrt{\frac{(m+n-o)(-m+n+o)}{2(m-n+o)}};$$

$$z = \pm\sqrt{pq:2s} = \pm\sqrt{\frac{(m-n+o)(-m+n+o)}{2(m+n-o)}}.$$

β) Addiert man die drei gegebenen Gleichungen, so wird $(x+y+z)^2 = m+n+p$, folglich $x+y+z = \pm\sqrt{m+n+p}$.

Setzt man $1:\sqrt{m+n+p} = N$, so ist $x+y+z = \frac{1}{N}$. Wird dieser Wert für $x+y+z$ in jede der drei gegebenen Gl. eingesetzt, so ist $x = mN$, $y = nN$, $z = pN$.

74. α) Man addiere die drei Gleichungen so wird:

$$(4)\ x+y+z = xyz[ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2].$$

Hiervon subtrahiere man der Reihe nach die drei gegebenen Gleichungen, so resultieren sowohl daraus die Werte $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, als auch

$$(5)\ yz(a-b)(b-c) = 1,\quad (6)\ xz(c-a)(b-c) = 1,$$

$$(7)\ xy(a-b)(c-a) = 1.$$

Werden diese drei Gleichungen mit einander multipliziert, so erhält man (8) $x^2y^2z^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 1$; daher

$$(9)\ xyz(a-b)(b-c)(c-a) = \pm 1.$$

Wird Gl. (9) nacheinander durch (5), (6) und (7) dividiert, so ist x_2 und $x_3 = \pm 1:(c-a)$, y_2 und $y_3 = \pm 1:(a-b)$, z_2 und $z_3 = \pm 1:(b-c)$.

β) Man forme die Gleichungen um in:

$$x(y+1)+(y+1) = a \text{ oder } (4)\ (x+1)(y+1) = a$$

$$y(z+1)+(z+1) = b \text{ oder } (5)\ (z+1)(y+1) = b$$

$$z(x+1)+(x+1) = c \text{ oder } (6)\ (x+1)(z+1) = c.$$

Dividiert man Gl. (4) durch Gl. (6), so wird: $\frac{y+1}{z+1} = \frac{a}{c}$.

Diese Gleichung mit Gl. (5) multipliziert, liefert:

$$(y+1)^2 = \frac{ab}{c}, \text{ woraus } y = -1 \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Setzt man diesen Wert für y in die Gl. (4) und (5), so erhält man:

$$x+1 = \frac{a}{\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}} = \pm\sqrt{\frac{a^2.c}{ab}}, \text{ also } x = -1 \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}$$

$$z+1 = \frac{b}{\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}} = \pm\sqrt{\frac{b^2.c}{ab}}, \text{ also } z = -1 \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

75. *α*) Dividiere (2) und (3) durch (1), so erhält man:

$$(4)\quad x+y=\frac{b}{a}(n+z).$$

$$(5)\quad a(x^2+y^2+xy)=c(n^2+z^2+nz).$$

Erhebe (4) ins Quadrat und setze daraus den Wert für x^2+y^2 in (5), so ist:

$$\frac{b^2}{a^2}(z^2+2nz+n^2)-xy=ac(n^2+nz+z^2) \text{ oder}$$

$$(6)\quad a^2xy=(b^2-ac)z^2+nz(2b^2-ac)+n^2(b^2-ac).$$

Nun ist in der ersten gegebenen Gleichung die Differenz $x-y$ und in (4) die Summe $x+y$ gegeben; bestimmt man hieraus den Wert für x und y, so findet man:

$$(7)\quad x=\frac{(b-a^2)z+n(b+a^2)}{2a} \text{ und}$$

$$(8)\quad y=\frac{(b+a^2)z+n(b-a^2)}{2a}; \text{ daher ist:}$$

$$(9)\quad xy=\frac{(b^2-a^4)z^2+2nz(b^2+a^4)+n^2(b^2-a^4)}{4a^2}.$$

Setze diesen Wert für xy in (6), so erhält man:

$$(b^2-a^4)z^2+2nz(b^2+a^4)+n^2(b^2-a^4)$$
$$=4(b^2-ac)z^2+4nz(2b^2-ac)+4n^2(b^2-ac) \text{ oder:}$$
$$(a^4+3b^2-4ac)z^2-2nz(a^4-3b^2+2ac)$$
$$=-n^2(a^4+3b^2-4ac); \text{ also:}$$
$$\left(z-n\frac{a^4-3b^2+2ac}{a^4+3b^2-4ac}\right)^2$$
$$=n^2\frac{(a^4-3b^2+2ac)^2-(a^4+4b^2-4ac)^2}{(a^4+3b^2-4ac)^2};$$
$$=4n^2\frac{3a(a^3-c)(ac-b^3)}{(a^4+3b^2-4ac)^2}; \text{ folglich}$$
$$z=n\frac{a^4-3b^2+2ac\pm2\sqrt{3a(a^3-c)(ac-b^3)}}{a^4+3b^2-4ac}.$$

Setze diesen Wert für z in (7) und (8), so erhält man die Werte für x und y.

β) Durch Umformung der dritten hier gegebenen Gleichung erhält man: (4) $(x+y)(x-y)=z^2$.

Setze den Wert für $x+y$ aus der ersten Gleichung in (4), so ist: (5) $x-y=\frac{z^2}{a}$. Aus der ersten Gleichung und aus (5) folgt, daß (6) $x=\frac{a^2+z^2}{2a}$ und (7) $y=\frac{a^2-z^2}{2a}$.

Setze den Wert für x in die zweite Gleichung, so ist:

$$\frac{a^2+z^2}{2a}+z=b; \text{ folglich } z=\pm\sqrt{2ab}-a; \text{ daher:}$$

$$x=a+b\mp\sqrt{2ab} \text{ und } y=\pm\sqrt{2ab}-b.$$

γ) Erhebe die erste Gleichung ins Quadrat, so ist:

(4) $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=a^2$.

Addiere zu (4) die auf Null reduzierte dritte Gleichung, so ist: (5) $2(x^2+xy+xz+yz)=a^2$,

Setze aus der zweiten Gleichung den Wert für yz in (5), so hat man: (6) $2x(x+y+z+b)=a^2$.

Setze aus (1) hierin den Wert für $x+y+z$, so ist:

(7) $2x(a+b)=a^2$; folglich $x=a^2:2(a+b)$.

Setze den für x gefundenen Wert in die erste und dritte Gl., so ist: (8) $y+z=\frac{a(a+2b)}{2(a+b)}$; (9) $y^2+z^2=\left(\frac{a^2}{2(a+b)}\right)^2$.

In diesen beiden letzten Gleichungen ist die Summe nebst der Quadratensumme der Unbekannten gegeben; daher ist nach Aufg. 24: $y=z=a\frac{a+2b\pm\sqrt{3a^2-2ab-4b^2}}{4(a+b)}$.

δ) Die erste Gleichung, ins Quadrat erhoben, giebt:

(4) $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=a^2$.

Subtrahiere die zweite Gleichung von der (4), so ist:

(5) $2z(x+y+z)+2xy=a^2-b$,

Setze aus der ersten Gleichung den Wert für $x+y+z$ in (5), so ist: (6) $xy+az=\frac{1}{2}(a^2-b)$.

Die erste Gleichung, in den Kubus erhoben, giebt:

(7) $x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)+3z(x+y)(x+y+z)=a^3$.

Setze aus (3) den Wert für $x^3+y^3+z^3$ und aus (1) den Wert für $x+y+z$ in (7), so ist:

(8) $3(xy+az)(x+y)=a^3-c$.

Setze aus (6) den Wert für $xy+az$ in (8), so ist:

(9) $x+y=\frac{2(a^3-c)}{3(a^2-b)}$.

Jetzt addiere die zweite Gleichung zu (4), so hat man:

(10) $x(x+y+z)+y(y+z)=\frac{1}{2}(a^2+b)$.

Setze aus der ersten Gleichung den Wert für $x+y+z$ und auch den Wert für $y+z$ in (10), so hat man:

(11) $a(x+y)-xy=\frac{1}{2}(a^2+b)$.

Setze aus (9) den Wert für $x+y$ in (11) und ordne die Gleichung, so ist: (12) $xy=\frac{a^4-4ac+3b^2}{6(a^2-b)}$.

Setze aus (12) den Wert für xy in (6), so hat man:

$$az-\frac{1}{2}(a^2-b)-\frac{a^4-4ac+3b^2}{6(a^2-b)}=\frac{2a(a^2-3ab+2c)}{6(a^2-b)};$$

$$\text{folglich } z=\frac{a^3-3ab+2c}{3(a^2-b)}.$$

Da nun in (9) und (12) die Summe und das **Produkt** der Unbekannten x und y gefunden sind, so lassen diese sich leicht nach Aufgabe 15 bestimmen.

76. α) Erhebe die erste Gleichung ins Quadrat, so ist:

$$(5)\ x^2+2xy+y^2=u^2+2uv+v^2.$$

Multipliziere die zweite gegebene Gleichung mit 4 und subtrahiere sie von (5), so ist:

(6) $(x-y)^2=(u-v)^2$; daher (7) $(x-y)=\pm(u-v)$.

Wenn das obere Zeichen + gilt, so folgt aus (7) und der ersten gegebenen Gl., daß $x=u$ und $y=v$.

Setzen wir diese Werte für u und v in die beiden letzten gegebenen Gleichungen, so erhalten wir zur Bestimmung von x und y, also auch von u und v folgende zwei Gleichungen:

$$(6)\ ay=2x;\ \text{also}\ y=\frac{2}{a}x$$

(7) $x^2+y^2=\frac{1}{2}b^2$. Setze den Wert von y aus (6) in (7), so ist:

$$x^2=\frac{a^2b^2}{2(a^2+4)};\ \text{also}\ x=\pm\frac{ab}{\sqrt{2(a^2+4)}}=\pm\frac{ab\sqrt{2(a^2+4)}}{2(a^2+4)};$$

$$\text{also}\ \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\pm ab\sqrt{\frac{2(a^2+4)}{4(a^2+4)^2}}=\pm\tfrac{1}{2}ab\sqrt{\frac{2}{a^2+4}};$$

$$\text{daher}\ \begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\end{Bmatrix}=\pm b\sqrt{\frac{2}{a^2+4}}.$$

Gilt in (7) das untere Vorzeichen, so daß also $x-y=-(u-v)$ ist, so folgt hieraus und aus der ersten gegebenen Gleichung, daß $x=v$ und $y=u$ ist.

Setze jetzt diese Werte für u und v in die beiden letzten gegebenen Gleichungen, so hat man:

$$(9)\ x^2+y^2=axy;\ (10)\ x^2+y^2=\tfrac{1}{2}b^2;\ \text{daher}$$

$$(11)\ 2xy=\frac{b^2}{a}.$$

Aus (10) und (11) ergeben sich durch Addition und Subtraktion folgende Gleichungen:

$$(12)\ (x+y)^2=b^2\left(\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}\right);\ (13)\ (x-y)^2=b^2\left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{a}\right);\ \text{folglich}$$

$$(14)\ x+y=\pm b\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}}\ \text{und}\ (15)\ x-y=\pm b\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{a}},$$

$$\text{daher}\ x=v=\tfrac{1}{2}b\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{a}}\right)$$

$$y=u=\tfrac{1}{2}b\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}}\mp\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{a}}\right).$$

Nach §. 338 ist: $\sqrt{\tfrac{1}{2}+\frac{1}{a}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}-\frac{1}{a}}=\sqrt{2\left(\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}-\frac{1}{a}}\right)}$

$=\sqrt{1\pm\sqrt{1-\frac{4}{a}}}=\sqrt{1\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2-4}}$; daher ist:

$$\begin{Bmatrix}x_3 \text{ und } x_5\\ x_4 \phantom{\text{ und }} x_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}v_3 \text{ und } v_5\\ v_4 \phantom{\text{ und }} v_6\end{Bmatrix}=\pm\tfrac{1}{2}b\sqrt{1\pm\frac{1}{a}\sqrt{a^2-4}}$$

$$\begin{Bmatrix}y_3 \text{ und } y_5\\ y_4 \phantom{\text{ und }} y_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_3 \text{ und } u_5\\ u_4 \phantom{\text{ und }} u_6\end{Bmatrix}=\pm\tfrac{1}{2}b\sqrt{1\mp\frac{1}{a}\sqrt{a^2-4}}.$$

β) Setze $x+y-(u+z)=v$. Hieraus und aus der in (2) gegebenen Summengleichung ergiebt sich:

$$(4)\ x+y=\frac{b+v}{2} \text{ und } (5)\ u+z=\frac{b-v}{2}.$$

Aus (1) folgt: (6) $xy=a$ und (7) $uz=a$.

In den Gl. (4), (5), (6), (7) ist die Summe und das Produkt der Unbekannten gegeben; daher erhalten wir nach Nr. 15:

$$x=\tfrac{1}{4}\{b+v+\sqrt{(b+v)^2-16a}\}$$
$$y=\tfrac{1}{4}\{b+v-\sqrt{(b+v)^2-16a}\}$$
$$u=\tfrac{1}{4}\{b-v+\sqrt{(b-v)^2-16a}\}$$
$$z=\tfrac{1}{4}\{b-v-\sqrt{(b-v)^2-16a}\}.$$

Zur Bestimmung von v haben wir die Gl. (4), (5), (6), (7). Quadriere die Gl. (5) und (6), setze hierin den Wert für xy und uz aus (6) und (7), so ist:

$$(8)\ x^2+y^2+2a=\tfrac{1}{4}(b^2+2bv+v^2)$$
$$(9)\ u^2+z^2+2a=\tfrac{1}{4}(b^2-2bv+v^2)$$

(8) und (9) addiert: (10) $x^2+y^2+u^2+z^2+4a=\tfrac{1}{2}(b^2+v^2)$.

Setze hierin aus (3) den Wert für $x^2+y^2+u^2+z^2$, so wird:

$$v^2=8a-b^2+2c;\ \text{also}\ v=\sqrt{8a-b^2+2c}.$$

γ) Verfährt man hier, wie in der vorigen Nummer, so erhält man für x, y, u, z dieselben Werte, wobei aber v bestimmt werden muß. Zu diesem Zwecke erhebe man

$$(4)\ x+y=\tfrac{1}{2}(b+v) \text{ und } (5)\ u+z=\tfrac{1}{2}(b-v)$$

in den Kubus und addiere diese beiden Gl., so wird:

$$(6)\ x^3+y^3+u^3+z^3+3xy(x+y)+3uz(u+z)=\tfrac{1}{4}(b^3+3bv^2).$$

Hieraus erhalten wir durch Einsetzen der Werte für $x^3+y^3+u^3+z^3$ aus (3), für $xy=uz=a$ aus (1) und für $x+y+u+z$ aus (2)

$$\frac{12ab-b^3+4c}{3b}=v^2;\ \text{also}\ v=\sqrt{\frac{12ab-b^3+4c}{3b}}.$$

77. Man forme die gegebenen Gleichung auf folgende Weise um:

$$(3)\ (x-1)(u-2)=(y-3)(z-4),$$
$$(4)\ (x-2)(u-5)=(y-6)(z-1),$$
$$(5)\ (x-3)(u-2)=(y-1)(z-5),$$
$$(6)\ (x-2)(u-3)=(y-4)(z-6).$$

Aus (3) folgt (7) $x=\frac{(y-3)(z-4)}{u-2}+1$. Durch Einsetzen dieses Wertes für x in (4), (5) und (6) erhält man:

$$(8)\ [(y-3)(z-4)-u+2](u-5)=(y-6)(z-1)(u-2)$$

(9) $[(y-3)(z-4)-2(u-2)]=(y-1)(z-5)$
(10) $[(y-3)(z-4)-u+2](u-3)=(y-4)(z-6)(u-2)$.

Aus (9) folgt (11) $y=2z+2u-11$. Durch Einsetzen dieses Wertes für y in (8) und (10) erhält man:

$$(12)\ [(2z+2u-14)(z-4)-u+z](u-5)= (2z+2u-17)(z-1)(u-2)$$

$$(13)\ [(2z+2u-14)(z-4)-u+2](u-3)= (2z+2u-15)(z-6)(u-2).$$

Subtrahiert man (12) von (13) so wird nach gehöriger Entwickelung:

$$(14)\ 4z^2+12uz-60z+10u^2-111u+262=0.$$

Dividiert man (12) durch (13), so erhält man

$$(15)\ -4z^2-12zu+78z-10u^2+127u-399=0.$$

(14) und (15) addiert, giebt (16) $u=\frac{137-18z}{16}$. Diesen Wert für u in (14) eingesetzt, giebt $808z^2-6408z=-11450$, woraus $z=\frac{801}{202}\pm\frac{251,7459}{202}$, also $z_1=5,2116$, $z_2=2,719$. Durch Einsetzen dieser Werte für z in (16) erhält man $u_1=\frac{137-18\,.\,5,2116}{16}=2,699$; $u_2=\frac{137-18.2,719}{16}=5,502$. Durch Einsetzen der Werte für z und u in (11) erhält man $y_1=10,4232+5,398-11=4,882$ und $y_2=5,445$. Aus (7) ergiebt sich durch Einsetzen der für y, z und u gefundenen Werte $x_1=4,156$ und $x_2=0,106$.

78. Aus der ersten Gleichung erhält man:

(3) $a^x\,.\,a^y=a^{13}\,.\,a^5$ oder (4) $a^{x+y}=a^{18}$ nach §. 244.

Da ferner nach §. 258 eine Potenz mit einer Zahl potenziert wird, indem man ihren Exponent mit der Zahl multipliziert, so erhält man aus der zweiten Gleichung:

$$(5)\ a^{xy}=a^{77}.$$

Wenn nun Potenzen gleich sind und gleiche Grundzahlen haben, so sind auch ihre Exponenten gleich; demnach erhalten wir aus den beiden Gleichungen (4) und (5):

$$(6)\ x+y=18 \text{ und } (7)\ xy=77.$$

In diesen beiden Gleichungen ist die Summe und das Produkt der Unbekannten gegeben, daher nach Aufg. 15

$$x_1=y_2=7 \text{ und } x_2=y_1=11.$$

79. Nach §. 258 ist $(a^{x+2})^{y-2}=a^{(x+2)(y-2)}$ und $(a^2)^{-4}=a^{-8}$; also ist: (3) $a^{(x+2)(y-2)}=a^{-8}$.

Nach §. 243 erhält man aus der zweiten gegebenen Gleichung: (4) $a^{3x+3y-14}=a^{x+5y-10}$.

Aus (3) und (4) ergiebt sich daher:

(5) $(x+2)(y-2)=-8$ oder $xy-2(x-y)=-4$.

(6) $3x+3y-14=x+5y-10$ oder $x-y=2$.

Setze aus (6) den Wert für x—y in (5), so ist: (7) $xy=0$.

In (6) und (7) ist die Differenz und das Produkt der Unbekannten gegeben; daher ist nach Aufgabe 16:

$x_1=2$ und $y_2=0$; $x_2=0$ und $y_1=-2$.

80. Multipliziere die erste Gleichung mit $\sqrt[y]{b}$, so ist:

$$(3)\ \sqrt[x]{a}\,.\,\sqrt[y]{b}\,.\,\sqrt[y]{a:b}=\left(\sqrt[15]{a^2}\right)^4.$$

Nun ist nach §. 280: $\sqrt[y]{b}\,.\,\sqrt[y]{a:b}=\sqrt[y]{b(a:b)}=\sqrt[y]{a}$ (§. 72); und nach §. 275 und 290 ist: $\left(\sqrt[15]{a^2}\right)^4=\sqrt[15]{a^8}$; daher erhalten wir aus (3): $\quad (4)\ \sqrt[x]{a}\,.\,\sqrt[y]{a}=\sqrt[15]{a^8}$.

Nun ist nach §. 294: $\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}$; $\sqrt[y]{a}=a^{\frac{1}{y}}$ und $\sqrt[15]{a^8}=a^{\frac{8}{15}}$; demnach verwandelt sich Gleichung (4) in folgende:

$$(5)\ a^{\frac{1}{x}}\,.\,a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{8}{15}} \text{ oder nach §. 244: } (6)\ a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{\frac{8}{15}}.$$

Da ferner $a^2:\sqrt[y]{a^7}=\sqrt[y]{(a^2)^y:a^7}$, so erhält man aus der zweiten gegebenen Gleichung: (7) $\sqrt[y]{a^x}=\sqrt[y]{(a^2)^y:a^7}$.

Erhebe Gleichung (7) auf die yte Potenz, so ist:

$$(8)\ a^x=(a^2)^y:a^7 \text{ oder } (9)\ a^{x+7}=a^{2y}.$$

Aus (6) und (9) folgt: (10) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{15}$; (11) $x+7=2y$;

folglich: $x_1=3$ und $x_2=-4\frac{3}{8}$; $y_1=5$ und $y_2=1\frac{5}{16}$.

81. Vermittels der Logarithmen erhalten wir aus den beiden Gleichungen: (3) $\log x+\log y=\log a$ und

(4) $\log x \log y=\log b$.

In (3) und (4) ist die Summe und das Produkt der Unbekannten gegeben, daher ist nach Aufg. 15

$\log x_1$ und $\log y_2=\frac{1}{2}[\log a+\sqrt{(\log a)^2-4\log b}]$ und

$\log y_1$ und $\log x_2=\frac{1}{2}[\log a-\sqrt{(\log a)^2-4\log b}]$.

82. Man potenziere die erste Gleichung mit x, so ist: (3) $y=1{,}5^x$.

Setze diesen Wert für y in die zweite Gl. so ist:

$(1{,}5^x)^x=32768$ oder $1{,}5^{xx}=32768$.

Daher erhält man unter Anwendung von Logarithmen:

$$x^2=\frac{\log 32768}{\log 1{,}5}=\frac{4{,}5154499}{0{,}1760913}=25{,}642663209374;$$

daher x_1 und $x_2=\pm\sqrt{25{,}642663209374}=\pm 5{,}063858$; daher $\log y=(\pm 5{,}063858)\,.\,0{,}1760913=\pm 0{,}8917013$.

Zu diesem Logarithmus gehört die Zahl 7,792943, wenn der positive Wert für x genommen wird, daher in diesem Falle $y_1=7{,}792943$; gilt aber der negative Wert, so heißt der Logarithmus: $-0{,}8917013=0{,}1082987-1$.

Hierzu gehört die Zahl 1,28321 : 10=0,128321, welches der zweite Wurzelwert für y ist; daher $y_2=0,128321$.

---

2. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekannten Größen in Heis, Sammlung §. 75.

§. 400. 1. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

(1) $xy=576$ und (2) $\frac{x}{y}=2\frac{1}{4}$. Multipliziert man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man $x^2=1296$; folglich $x=\pm 36$ und daher $y=\pm 16$.

2. Die Zahlen seien x und y, so ist (1) $xy=p$; (2) $x:y=q$. Werden diese Gleichungen mit einander multipliziert, so erhält man $x^2=pq$, also $x=\pm\sqrt{pq}$ und daher $y=\pm\sqrt{p:q}$.

3. Kommen auf jede Seite des Quadrates 29 ℳ zu liegen, so beträgt die Anzahl Mark, die in einem solchen Quadrate liegen können, $29^2=841$ ℳ. Aus diesen 841 ℳ sollen nun zwei neue Quadrate gebildet werden, und zwar so, daß das zweite im ganzen 41 ℳ mehr enthalte, als das erste. Angenommen an jeder Seite des ersten Quadrates kämen x ℳ und an jeder Seite des zweiten Quadrates y ℳ zu liegen, so befinden sich im ersten x^2 und im zweiten y^2. Hiernach erhalten wir:

(1) $x^2+y^2=841$ und (2) $x^2-y^2=-41$; daher $x=20$ und $y=21$. Vgl. Aufl. der Aufg. 1. §. 399 Seite 389.

4. Sind die beiden Katheten x und y *cm* lang, so ist, weil die Hypotenuse 17 *cm* beträgt,

$$(1)\ x^2+y^2=(17)^2.$$

Konstruiert man aber aus den beiden Linien ein rechtwinkeliges Dreieck, so daß die Linie, welche x *cm* beträgt, Hypotenuse und die andere, y, Kathete wird, so ist, weil das Quadrat über der andern Kathete 161 *qcm* beträgt:

(2) $x^2-y^2=161$; folglich $x=15$ *cm* und $y=8$ *cm*.

5. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist:

$x:y=11:13$ oder (1) $13x-11y=0$.

(2) $x^2+y^2=14210$;

folglich $x=\pm 77$ und $y=\pm 91$. Vgl. Aufl. der Aufg. 2. §. 399. Seite 389.

6. Die beiden Zahlen seien x und y, so ist:

(1) $(x+y)(x-y)=a$ oder (2) $x^2-y^2=a$;

(3) $(x+y):(x-y)=p:q$ oder (4) $(p+q)y-(p-q)x=0$;

folglich $x = \pm\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{a:(pq)}$ und
$y = \pm\frac{1}{2}(p-q)\sqrt{a:(pq)}$.

7. Der erste quadratische Platz sei x und der zweite y *m* lang. Kommen auf dem ersten die Bäume $2\frac{1}{2}$ *m* auseinander zu stehen, so gehen auf die Seite $\frac{2}{5}x$ und man kann auf dem ganzen Platze $(\frac{2}{5}x)^2$ Bäume pflanzen. Auf dem zweiten Platze sollen die Bäume $2\frac{1}{4}$ *m* weit von einander stehen; folglich gebraucht man zu dessen Bepflanzung $(\frac{4}{9}y)^2$ Bäume, und weil in diesem Falle 11113 Bäume zu beiden Plätzen nötig sind, so ist: (1) $(\frac{2}{5}x)^2 + (\frac{4}{9}y)^2 = 11113$.
Setzt man aber auf dem ersten Platze die Bäume $2\frac{3}{4}$ und auf dem zweiten 3 *m* weit auseinander, so hat man $(\frac{4}{11}x)^2$ und $(\frac{1}{3}y)^2$ Bäume notwendig, und weil man jetzt nur 7816 Stück gebraucht, so ist: (2) $(\frac{4}{11}x)^2 + (\frac{1}{3}y)^2 = 7816$; folglich $x = 192\frac{1}{2}$ *m* und $y = 162$ *m*.

8. Liegen auf dem ersten Brette x Zweimarkstücke und auf dem zweiten y Einmarkstücke in jeder Reihe, so ist: (1) $x^2 + y^2 = 340$.
Da ferner 6 Zweimarkstücke neben einander gelegt, dieselbe Länge geben, wie 7 Einmarkstücke, so ist: (2) $7x = 6y$; folglich $x = 12$ Zweimarkstücke und $y = 14$ Einmarkstücke.

9. Das Zimmer sei x *m* lang, y *m* breit und z *m* hoch, so ist: (1) $xy = 30\frac{1}{3}$; (2) $xz = 21$; (3) $yz = 13$.
Man vgl. die Auflösung der Aufgabe 73. α) S. 425.
Aus den 3 Gleichungen ergiebt sich, daß $x = 7$ *m* lang, $y = 4\frac{1}{3}$ *m* breit und $z = 3$ *m* hoch.

10. Der Stein sei x *cm* lang, y *cm* breit und z *cm* hoch. Weil nun Länge, Breite und Höhe des Steines in dem Verhältnisse 5 : 3 : 1 stehen, so ist:
$x : y : z = 5 : 3 : 1$. Hieraus erhält man:
$x : y = 5 : 3$ oder (1) $3x = 5y$.
$y : z = 3 : 1$ oder (2) $y = 3z$.
Da ferner die ganze Oberfläche des Steines 2,0286 *qm* = 20286 *qcm* beträgt, so ist:
(3) $2(xy + xz + yz) = 20286$ oder (4) $xz + xy + yz = 10143$.
Aus diesen Gleichungen folgt $x = 105$ *cm* Länge, $y = 63$ *cm* Breite und $z = 21$ *cm* Höhe.
Oder: Ist die Höhe x, so ist die Breite 3x und die Länge 5x; daher ist die Oberfläche
$2(5x \cdot 3x + 5x \cdot x + 3x \cdot x) = 2 \cdot 23x^2$; daher ist:
$23x^2 = 10143$; $x^2 = 441$; $x = 21$; $3x = 63$, $5x = 105$.

11. Die drei Zahlen heißen x, y, z, so ist:
(1) $xy = m$; (2) $xz = n$; (3) $yz = p$.
Multipliziere diese 3 Gleichungen miteinander und ziehe alsdann die Quadratwurzel aus derselben, so ist:
(4) $xyz = \pm\sqrt{mnp}$.

Dividiere nacheinander die Gleichungen (3), (2), (1) in (4), so ist: $x=\pm\sqrt{mn:p}$; $y=\pm\sqrt{mp:n}$; $z=\pm\sqrt{np:m}$.

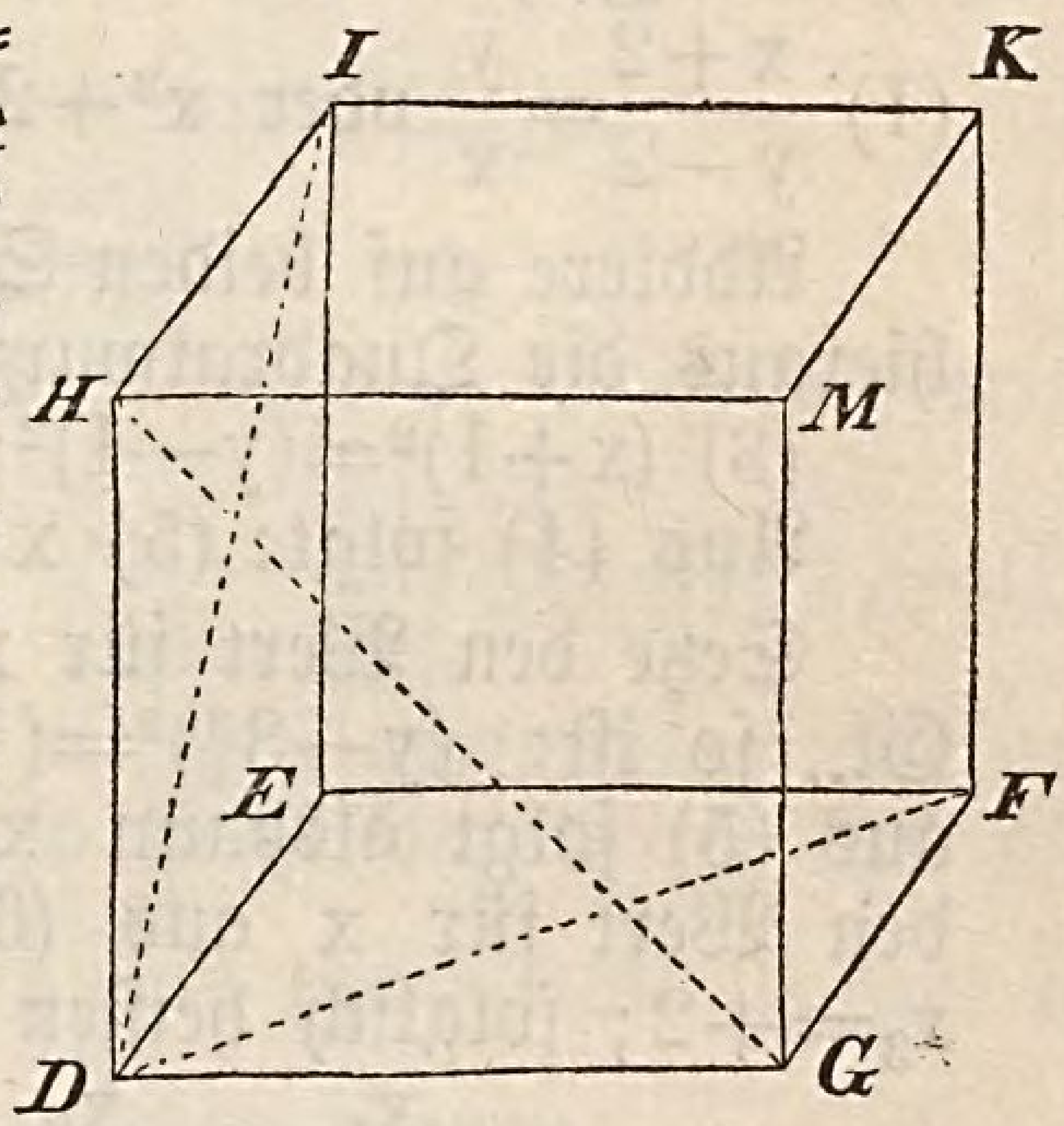
12. Heißen die 4 Zahlen x, y, z, u, so ist:

(1) $xyz=m$; (2) $yzu=n$; (3) $xyu=p$; (4) $xzu=q$.

Ziehe aus dem Produkte dieser 4 Gl. die Kubikwurzel, so wird: (5) $xyzu=\sqrt[3]{mnpq}$.

Dividiere Gleichung (5) durch die vier ersten Gleichungen, so erhält man: $x=\sqrt[3]{mpq:n^2}$; $y=\sqrt[3]{mnp:q^2}$;

$z=\sqrt[3]{mnq:p^2}$; $u=\sqrt[3]{npq:m^2}$.



13. In nebenstehendem rechtwinkeligen Parallelepipedon seien die Diagonalen $HG=a$, $DI=b$, $DF=c$; ferner sei $DH=x$ und $DG=y$ und $DE=z$, so ist der Inhalt des Rechtecks $MDHG=xy$, der Inhalt des Rechtecks $HDIE=xz$ und des Rechtecks $DEGF=yz$. Da nun die Diagonale das Rechteck in zwei rechtwinkelige Dreiecke teilt, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$DH^2+DG^2=HG^2$.

$IE^2+DE^2=ID^2$; $DG^2+GF^2=DF^2$;

oder: (1) $x^2+y^2=a^2$; (2) $x^2+z^2=b^2$; (3) $y^2+z^2=c^2$.

Die Summe dieser 3 Gleichungen ist:

(4) $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Subtrahiere nacheinander (1), (2) und (3) von (4), so ist:

$z^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$; folglich $z=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}$;

$y^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)$; folglich $y=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)}$;

$x^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$; folglich $x=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}$.

Demnach ist der Inhalt des Rechteckes:

$MHDG=xy=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}\times\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}$;

$HIED=xz=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}\times\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}$;

$DGFE=yz=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}\times\sqrt{(\frac{1}{2}a^2+c^2-b^2)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$.

14. Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist:

(1) $x+y=50$; (2) $x^2+y^2=1258$:

Aus (1) und (2) folgt gemäß Aufg. 24 §. 399 Seite 395 $x_1=27$ und $x_2=23$; $y_1=23$ und $y_2=27$.

15. Die Höhe des einen kubischen Gefäßes sei x *cm* und die des andern y *cm*, so beträgt der Kubikinhalt des ersten x^3 und des zweiten y^3. Hiernach ist:

$$(1)\ x^3+y^3=407;\ (2)\ x+y=11.$$

Gemäß Aufl. zu Aufg. 50 α) §. 399 Seite 405 ist

$$x_1=4 \text{ und } x_2=7;\ y_1=7 \text{ und } y_2=4.$$

Die kubischen Inhalte der beiden Gefäße sind demnach:

$$7^3=343 \text{ und } 4^3=64\ ccm.$$

16. Bezeichnen wir die beiden Zahlen mit x und y, so ist:

$$(1)\ x+y=xy;\ (2)\ x+y=x^2-y^2.$$

Siehe Aufl. der Aufg. 41 α) § 399 Seite 400.

17. α) Der Zähler des Bruches heiße x, und der Nenner y, so ist:

$$(1)\ \frac{x+2}{y-2}=\frac{y}{x} \text{ oder } x^2+2x=y^2-2y;\ (2)\ \frac{x-2}{y+2}+\tfrac{16}{15}=\frac{y}{x}.$$

Addiere auf beiden Seiten der Gl. (1) 1 hinzu und ziehe hieraus die Quadratwurzel, so wird:

$$(3)\ (x+1)^2=(y-1)^2;\ \text{also } (4)\ x+1=\pm(y-1).$$

Aus (4) folgt: (5) $x=y-2$ und (6) $x=-y$.

Setze den Wert für x aus (5) in (2) und entwickele die Gl., so ist: $(y-3\tfrac{3}{4})^2=(\tfrac{13}{4})^2$; daher $y_1=7$, $y_2=\tfrac{1}{2}=0{,}5$ und aus (5) folgt alsdann $x_1=5$, $x_2=-1{,}5$. Setzt man aber den Wert für x aus (6) in (2), so wird $y_3=-2$, daher $x_3=+2$; folglich heißen die Brüche:

$$\frac{x_1}{y_1}=\tfrac{5}{7},\ \frac{x_2}{y_2}=\frac{-1{,}5}{0{,}5},\ \frac{x_3}{y_3}=\frac{+2}{-2}.$$

β) Setzt man für 2 und $1\tfrac{1}{15}$ der vorhergehenden Aufgabe die allgemeinen Zeichen a und b, so ist:

$$(1)\ \frac{x+a}{y-a}=\frac{y}{x}.$$

Hieraus folgt: $(x+a):(y-a)=y:x$ und nach §. 228:

$$(x+y):(x+y)=(x-y+2a):(y-x)$$

oder: $\quad 1:\ 1=(x-y+2a):(y-x).$

Daher (2) $y-x=a$. Ferner hat man (3) $\dfrac{x-a}{y+a}+b=\dfrac{y}{x}$.

Setze aus (2) den Wert für y in (3) und entwickele diese Gleichung, so erhält:

$$x^2-2\frac{a(2-b)}{b}x=\frac{2a^2}{b};\ \text{folglich heißt}$$

der Zähler $x=\dfrac{a}{b}(2-b\pm\sqrt{b^2+4-2b})$ und daher

der Nenner $y=\dfrac{a}{b}(2\pm\sqrt{b^2+4-2b})$.

18. Die Zehner der zweizifferigen Zahl seien x und die Einer

y, so heißt die gesuchte Zahl $10x+y$. Weil das Produkt aus den beiden Ziffern die Hälfte der Zahl ausmacht, so ist:

(1) $xy=\frac{1}{2}(10x+y)$.

Kehre ich die Ziffern der Zahl um, so entsteht die Zahl $10y+x$, und subtrahiere ich die gegebene Zahl $10x+y$ von der neu entstandenen $10y+x$, so habe ich den Rest

$$10y+x-(10x+y)=9(y-x),$$

welcher das $1\frac{1}{2}$fache des Produktes der beiden gegebenen Ziffern der Zahl ausmacht; demnach ist:

(2) $1\frac{1}{2}xy=9(y-x)$.

Durch die Gleichstellung der Werte für xy aus beiden Gleichungen erhält man $x=\frac{1}{2}y$. Diesen Wert für x etwa in (1) gesetzt, liefert:

$$y^2-6y=0;\ \text{also}\ y(y-6)=0;\ \text{folglich}\ y=6$$

und daher $x=3$;

die Zahl heißt also $10\times3+6=36$.

19. Der erste Summand heiße x, der zweite y, so ist der dritte $1\frac{1}{2}x$; daher ist: (1) $x+y+1\frac{1}{2}x=102$; (2) $1\frac{1}{2}x^2=102y$.

Hieraus folgt $x_1=34$, $x_2=-204$; daher $y_1=17$, $y_2=612$, der dritte Summand also $=51$ und -306.

Löst man die Aufgabe mit einer Unbekannten auf und heißt der erste Summand x, so heißt der dritte $1\frac{1}{2}x$ und der zweite $\frac{1\frac{1}{2}x^2}{102}$; daher ist: $x+\frac{1\frac{1}{2}x^2}{102}+1\frac{1}{2}x=102$; woraus die 3 Summanden leicht gefunden werden können.

20. Die drei Stücke seien x, y, z, so ist: (1) $x+y+z=a$;

(2) $x:y=a:z$ oder $xz=ay$; (3) $z=nx$.

Multipliziert man (1) mit a und addiert (2) hinzu, so ist:

(4) $ax+xz+az=a^2$.

Den Wert für z aus (3) in (4) gesetzt, giebt:

$$na^2+x(n+1)a=a^2;\ \text{daher:}$$

$$\left(x+\frac{a(n+1)}{2n}\right)^2=\frac{a^2}{n}+\left(\frac{a(n+1)}{2n}\right)^2=a^2\left(\frac{n^2+6n+1}{4n^2}\right);$$

folglich $x=\frac{a[\sqrt{n^2+6n+1}-n-1]}{2n}$ der erste Teil;

also $z=nx=a\frac{\sqrt{n^2+6n+1}-n-1}{2}$ der dritte,

und $y=a\frac{n^2+4n+1-(n+1)\sqrt{n^2+6n+1}}{2n}$ der zweite Teil.

21. Heißt die Ziffer der Zehner x und die der Einer y, so ist die gesuchte Zahl $10x+y$. Kehrt man die Ziffern der Zahl um, so erhält man $10y+x$ und weil das Produkt aus diesen beiden Zahlen gleich 5092 ist, so erhält man

(1) $(10x+y)(10y+x)=5092$.

Giebt die erste Zahl, durch die zweite dividiert, zum Quotienten 1 und zum Reste eine einzifferige Zahl, die wir mit z bezeichnen wollen, so ist: $10x+y=10y+x+z$,

oder $9(x-y)=z$; durch 9 geteilt, giebt: $x-y=\frac{z}{9}$.

Hieraus erhellt, daß, da z als Rest eine einziffrige ganze Zahl sein muß, z nicht größer und auch nicht kleiner als 9 sein kann. Hiernach ist also: (2) $x-y=1$.

Setze $x+y=z$, so ist $x=\frac{1}{2}(z+1)$ und $y=\frac{1}{2}(z-1)$; daher $(10x+y)(10y+x)=\frac{1}{4}(121z^2-81)$. Es ist also $\frac{1}{4}(121z^2-81)=5092$; daher $z=13$; folglich

$$x=\tfrac{1}{2}(13+1)=7 \text{ und } y=\tfrac{1}{2}(13-1)=6.$$

Die Zahl heißt also 76.

22. Heißt die sechszifferige Zahl x und die nach der Vertauschung der ersten mit der vierten, der zweiten mit der fünften und der dritten mit der sechsten Ziffer derselben entstandene Zahl y, so ist: (1) $xy=122448734694$

(2) $y-x=5x$; also $y=6x$.

Daher ist: $6x^2=122448734694$; $x^2=20408122449$; folglich

$$x=142857.$$

23. Das Rechteck sei x *m* lang und y *m* breit, so ist, da die Diagonale des Rechtecks 20,4 *m* beträgt: (1) $x^2+y^2=(20{,}4)^2$.

Vermehrt man die Länge um 14 *m* und vermindert man die Breite um 2,4 *m*, so hat das Rechteck eine Länge von $x+14$ *m* und eine Breite von $y-2{,}4$ *m*, und weil nun die Diagonale um 12,4 *m* zunimmt, also jetzt $20{,}4+12{,}4=32{,}8$ *m* beträgt, so ist: (2) $(x+14)^2+(y-2{,}4)^2=(32{,}8)^2$; folglich

$$x=18\ m \text{ und } y=9{,}6\ m.$$

24. Das Rechteck habe eine Länge von x *m* und eine Breite von y *m*, so ist: (1) $x^2+y^2=a^2$; (2) $(x+n)^2+(y+p)^2=b$.

Entwickele die Gl. (2) und nimm die Differenz zwischen (1) und (2), so wird: (3) $2(nx+py)=b^2-a^2-n^2-p^2$.

Setzt man zur Abkürzung:

$$b^2-a^2-n^2-p^2=M, \text{ so ist } x=\frac{M-2py}{2n}.$$

Setze diesen Wert für x in (1), entwickele diese Gl. und bestimme y, so wird

$$y=\frac{Mp\pm n\sqrt{4a^2(n^2+p^2)-M^2}}{2(n^2+p^2)}\ m \text{ breit.}$$

Durch Substitution des Wertes für y erhält man:

$$x=\frac{Mn\mp p\sqrt{4a^2(n^2+p^2)-M^2}}{2(n^2+p^2)}\ m \text{ lang.}$$

25. Das Vorderrad habe x *m* und das Hinterrad y *m* im Umfange. Um die Strecke von 1732,5 *m* zu machen, muß das

Vorderrad $\frac{1732{,}5}{x}$, und das Hinterrad $\frac{1732{,}5}{y}$ Umläufe machen. Weil nun aber auf jeder Strecke das Vorderrad 165 Umläufe mehr macht, als das Hinterrad, so ist:

$$\frac{1732{,}5}{x} = \frac{1732{,}5}{y} + 165 \text{ oder (1) } 10{,}5(y-x) = xy.$$

Werden beide Räder um 0,75 *m* vergrößert, so hat das Vorderrad einen Umfang von $x+0{,}75$ und das Hinterrad einen Umfang von $y+0{,}75$ *m*, weshalb das erstere $\frac{1732{,}5}{x+0{,}75}$ und das zweite $\frac{1732{,}5}{y+0{,}75}$ Umläufe macht. Da in diesem Falle auf derselben Strecke das Vorderrad 112 Umläufe mehr macht, als das hintere, so ist:

$$(2)\ \frac{1732{,}5}{x+0{,}75} = \frac{1732{,}5}{y+0{,}75} + 112;$$

folglich $x=3$ *m* und daher $y=4{,}2$ *m*.

26. Das Stück Tuch sei x *m* lang und y *m* breit, so ist der Inhalt des Stückes xy *qm*. Zieht sich dasselbe durch Benetzung in der Länge um den 8. und in der Breite um den 16. Teil zusammen, so ist es noch $x-\frac{1}{8}x=\frac{7}{8}x$ *m* lang und $y-\frac{1}{16}y=\frac{15}{16}y$ *m* breit; mithin beträgt jetzt der Inhalt des Stückes $\frac{7}{8}x \times \frac{15}{16}y = \frac{105}{128}xy$ *qm*. Da es auf diese Weise 3,68 *qm* verliert, so ist:

$$(1)\ \tfrac{105}{128}xy + 3{,}68 = xy.$$

Der Umfang des Stückes beträgt $2(x+y)$. Durch die Benetzung verliert es aber am Umfange 3,4 *m*; danach ist:

$$(2)\ 2(x+y) - 3{,}4 = 2(\tfrac{7}{8}x + \tfrac{15}{16}y);$$

folglich $x=12{,}8$ *m* lang, daher $y=1{,}6$ *m* breit.

27. Die Besatzung sei x Mann stark und jeder erhalte täglich y *kg* Brod, so verzehren dieselben in 12 Tagen 12xy *kg* Brod. Ziehen aber 120 Mann ab und erhält jeder täglich $\frac{5}{16}$ *kg* weniger, so verzehren $x-120$ Mann $(x-120)(y-\frac{5}{16})$ *kg* in 1 Tage, also in 16 Tagen $16(x-120)(y-\frac{5}{16})$ *kg*. Da der Vorrat beidemale derselbe bleibt, so ist

$$(1)\ 16(x-120)(y-\tfrac{5}{16}) = 12xy.$$

Durch dieselben Schlüsse, wie oben, erhält man

$$(2)\ 16(x-200)(y-\tfrac{3}{16}) = 12xy,$$

folglich $x=1200$ Mann und $y=1\frac{7}{8}$ *kg* Brod.

28. Es seien x Arbeiter beschäftigt gewesen und jeder habe bei jedem Gange y *kg* Steine getragen, so trugen sie zusammen bei jedem Gange xy *kg* Steine. Sind aber $(x+8)$ Arbeiter, wovon jeder bei jedem Gange $(y-2\frac{1}{2})$ *kg* trägt, so tragen diese zusammen bei jedem Gange $(x+8)(y-2\frac{1}{2})$ *kg*. Die $x+8$ Arbeiter gebrauchen nun zur Fortschaffung der Steine 7 Stunden, während jene 8 Stunden gebrauchen; mithin

müssen $x+8$ Arbeiter bei jedem Gange $\frac{1}{8}$ der Steine mehr tragen als jene. Hiernach ist (1) $\frac{7}{8}(x+8)(y-2\frac{1}{2})=xy$.

Sind nun $x-8$ Arbeiter beschäftigt, wovon jeder bei jedem Gange $(y+5\frac{1}{2})$ *kg* trägt, so tragen sie zusammen bei jedem Gange $(x-8)(y+5\frac{1}{2})$ *kg*. Weil sie aber zu der nämlichen Zeit 9 Stunden gebrauchen, zu welcher die x Arbeiter nur 8 Stunden nötig haben, so tragen $(x-8)$ Mann bei jedem Gange $\frac{1}{9}$ der Steine weniger. Es ist daher

$$(2)(x-8)(y+5\tfrac{1}{2})=\tfrac{8}{9}\ xy.$$

Aus (1) und (2) folgt, daß $x=36$ oder 28 Mann und $y=22\frac{1}{2}$ *kg* oder $38\frac{1}{2}$ *kg* Steine, die bei jedem Gange getragen wurden.

29. Das erste Kapital betrage x *M* und es habe y Jahre gestanden, so giebt dasselbe in y Jahren zu 8 pCt. $\frac{8}{100}xy=\frac{2}{25}xy$ *M* Zinsen. Da nun die mehrjährigen Zinsen samt dem Kapitale 2574 *M* betragen, so ist:

$$(1)\ x+\tfrac{2}{25}xy=2574.$$

Das zweite Kapital von $x-975$ *M* ist, wenn es $y+12\frac{1}{2}$ Jahre steht, zu 8 pCt., ebenfalls mit den Zinsen 2574 *M*. Demnach ist:

$$(2)\ x-975+\frac{2(x-975)(y+12\frac{1}{2})}{25}=2574;$$

folglich $x=2145$ *M* Kapital und $y=2\frac{1}{2}$ Jahre.

30. Heißen die beiden Katheten des rechtwinkeligen Feldes x und y, so ist die Hypotenuse $=\sqrt{x^2+y^2}$. Begegnen sie sich auf der Mitte der Hypotenuse, so hat der eine $x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ und der andere $y+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ *m* gemacht und da sich ihre Geschwindigkeiten wie 13 : 11 verhalten, so ist:

$$(x+\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}):(y+\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})=13:11, \text{ oder}$$
$$(1)\ 11(x+\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})=13(y+\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}).$$

Begegnen sich die Beiden zum zweiten Male 20 *m* vom Ausgangspunkte, also von der Spitze des rechten Winkels, so hat der eine $(x-20)$ und der andere $(y+20)$ *m* gemacht und daher ist:

$$(2)\ (x-20)^2+(y+20)^2=x^2+y^2.$$

Hieraus folgt $x=80$, $y=60$ und die Hypotenuse $=$

$$\sqrt{80^2+60^2}=100\ m.$$

31. Bacchus habe das Faß allein in x Stunden und Silen allein in y Stunden geleert, so trank jener $\frac{1}{x}$ und dieser $\frac{1}{y}$ des Weines in 1 Stunde. Bacchus trank während zwei Drittel der Zeit, die Silen zur Ausleerung des ganzen Fasses gebraucht hätte; also brauchte er $\frac{2}{3}y$ Stunden, in

welchen er $\frac{2y}{3x}$ des Weines trank; es blieb demnach für den Silen noch $\frac{3x-2y}{3x}$ des Weines übrig, wozu er $\frac{(3x-2y)y}{3x}$ Stunden gebrauchte. Beide trinken in 1 Stunde zusammen $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$ des Weines; zur Ausleerung des ganzen Fasses aber haben sie $\frac{xy}{x+y}$ Stunden nötig. Auf diese Weise werden sie 2 Stunden früher fertig mit dem Fasse als vorher. Es ist daher:

$$(1)\quad \frac{xy}{x+y}+2=\frac{2y}{3}+\frac{(3x-2y)y}{3x}.$$

Da Bacchus aber, wenn beide zusammen getrunken, nur halb so viel getrunken hätte, als er vorher dem Silen übrig gelassen, so trank er in Vereinigung mit Silen $\frac{xy}{x(x+y)}=\frac{y}{x+y}$ des Weines. Es ist daher:

$$(2)\quad \frac{y}{x+y}=\frac{3x-2y}{6x}.$$

Hieraus folgt x=6 Stunden und x=3 Stunden.

32. Die erste Röhre fülle den leeren Behälter in x Stunden und die zweite leere den vollen Behälter in y Stunden, so wird die erste in 12 Stunden $\frac{12}{x}$ des Behälters füllen, dagegen die zweite in derselben Zeit $\frac{12}{y}$ desselben ausleeren. Da nun der Behälter bis zur Hälfte gefüllt war, so wurde derselbe $\frac{12}{x}+\frac{1}{2}$ Mal gefüllt, was durch die zweite Röhre ausgeleert wird. Hiernach ist: (1) $\frac{12}{x}+\frac{1}{2}=\frac{12}{y}$.

Gebraucht dagegen die eine Röhre zur Füllung, die andere zur Ausleerung eine Stunde mehr, so ist vermittels derselben Schlüsse, wenn der Behälter bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren in $15\frac{3}{4}$ Stunden leer wird,

$$(2)\quad \frac{15\frac{3}{4}}{x+1}+\frac{1}{2}=\frac{15\frac{3}{4}}{y+1};$$

folglich x=8 Stunden und daher y=6 Stunden.

33. Nach den in der vorigen Auflösung angestellten Betrachtungen ist, wenn x und y dieselbe Geltung haben und für 12 und $15\frac{3}{4}$ die allgemeinen Zeichen t und u gesetzt werden:

$\frac{t}{x}-\frac{t}{y}=-\frac{1}{2}$ oder: (1) $xy+2ty-2tx=0.$

$\frac{u}{x+1}-\frac{u}{y+1}=-\frac{1}{2}$ oder

(2) $xy+y+x+2uy-2ux=-1.$

Bestimmt man aus (1) den Wert für x und setzt denselben in (2) und entwickelt diese Gleichung, so ist:

$$y^2+\frac{1-4t}{2u-2t+1}y+\left(\frac{1-4t}{2(2u-2t+1)}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1-4t}{2(2u-2t+1)}\right)^2+\frac{2t}{2u-2t+1}=\frac{16tu+1}{4(2u-2t+1)^2};$$

folglich $y=[4t-1+\sqrt{16tu+1}]:[4u-4t+2].$

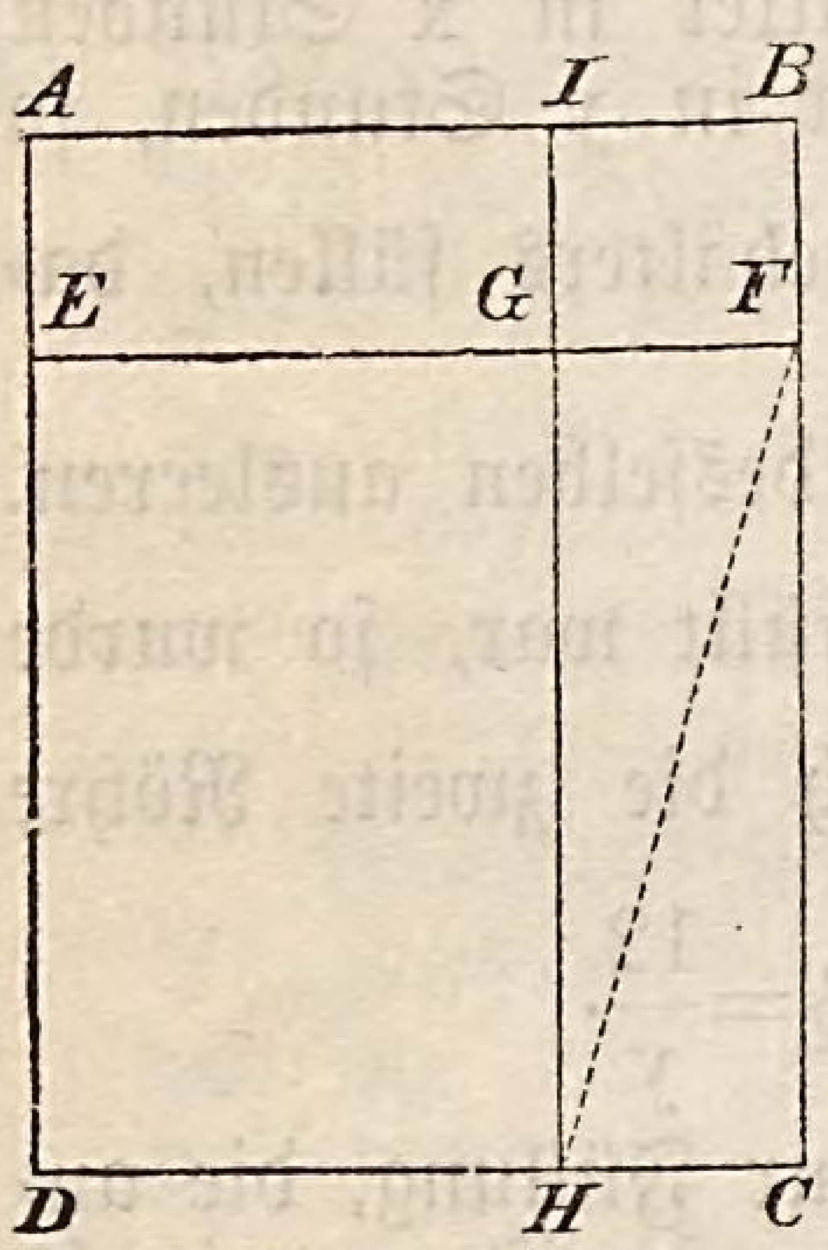
Daher $x=[4t+1+\sqrt{16tu+1}]:[4u-4t-2].$

34. Man setze zu der Breite des Rechtecks x *m* und nehme von der Länge y *m*, so ist die jetzige Breite $19+x$ und die Länge $119-y$; also der Quadratinhalt des Rechtecks $(19+x)(119-y)$ *qm*. Weil nun der Inhalt desselben derselbe bleiben soll, so ist: (1) $(19+x)(119-y)=19\times119.$

Da nun ferner hierdurch der Umfang des Rechtecks um 24 *m* zunimmt, so erhält man:

(2) $2(19+x)+2(119-y)=2(19+119)+24$; also:

$y=102$ *m* und daher $x=114$ *m*.



35. In nebenstehender Figur sei $AB=DC=18$ *m*, $AD=BC=23$ *m*, mithin beträgt der Inhalt des Rechtecks ABCD, $AD\times AB=18\times23=414$ *qm*. Zieht man in dem Rechtecke ABCD die sich rechtwinkelig schneidenden Linien EF und IH, so entstehen die 4 Rechtecke, AG, BG, DG und CG, von denen nach der Aufgabe $CG=90$ *qm* sei. Die Seite des diesem Rechtecke gegenüberstehenden Rechtecks AG, welche mit AD parallel ist, nämlich IG, sei x *m* lang und die mit DC parallellaufende Seite $EG=y$ *m*. Da nun die beiden Seiten $IG=x$ und $EG=y$ in dem Verhältnisse wie $2:3$ stehen, so erhält man:

$x:y=2:3$ oder (1) $3x=2y.$

Untersucht man jetzt, wie viel Flächeninhalt die 3 Rechtecke DG, AG, BG haben, so findet man:

$AG=xy$ *qm*; $DG=y(23-x)$ *qm*; $BG=x(18-y)$ *qm*.

Demnach ist: $xy+y(23-x)+x(18-y)+90=414,$

oder: (2) $23y+18x-xy=324;$

folglich $x=8$ *m* und $y=12$ *m*.

36. α) Haben hier x und y dieselbe Geltung, wie in der vorhergehenden Auflösung, so ist nach den dort angestellten Betrachtungen, wenn $23=m$, $18=n$, $90=p$, $2=r$ und $3=s$ gesetzt wird: (1) $sx=ry$; (2) $my+nx-xy=mn-p$.

Den Wert für x aus (1) in (2) substituiert und entwickelt liefert:

$$y=[ms+nr\pm\sqrt{(ms-nr)^2+4prs}]:(2r).$$

Daher $x=[ms+nr\pm\sqrt{(ms-nr)^2+4prs}]:(2s)$.

β) Ist statt des Inhaltes p des Rechteckes FGHC die Diagonale $GC=d$ gegeben, so ist mit Bezug auf die Figur in Aufg. 35 nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$(1)\ (m-x)^2+(n-y)^2=d^2;\ (2)\ sx=ry.$$

Setzt man aus (2) $x=ry:s$ in (1), entwickelt und ordnet, so erhält man: $(r^2+s^2)y^2-2(mr+ns)sy=s^2(d^2-m^2-n^2)$.

Hieraus ist

$$y=s[mr+ns\pm\sqrt{(r^2+s^2)d^2-(ms-nr)^2}]:[r^2+s^2]$$

die Länge der Seite EG und folglich

$$x=r[mr+ns\pm\sqrt{(r^2+s^2)d^2-(ms-nr)^2}]:[r^2+s^2]$$

die Länge der Seite IG.

37. Es seien für die erste Wagenklasse x Billets, so sind für die zweite $x+64$ und für die dritte $x+64+166=x+230$ verkauft worden. Da die zweite Klasse 163,20 ℳ und die dritte $163{,}20+40{,}80=204$ ℳ mehr einbringt, als die erste, so bringen alle 3 Klassen, wenn jede ebenviel eingebracht hätte, $669{,}60-(163{,}20+204)=302{,}40$ ℳ ein; also hat die erste Kl. $302{,}40:3=100{,}80$ ℳ; daher die zweite $163{,}20+100{,}80=264$ ℳ und die dritte Kl. $204+100{,}80=304{,}80$ ℳ eingebracht. Kostet nun 1 Billet der ersten Kl. y, und 1 Billet der zweiten Kl. z ℳ, so kostet ein solches der dritten Kl. $y-z$ ℳ. Aus den x Billets der ersten Kl. wurden demnach xy ℳ, aus den $x+64$ Billets der zweiten Kl. $(x+64)z$ ℳ und aus denen der dritten Kl. $(x+230)(y-z)$ ℳ gelöst. Da nun der Ertrag jeder der 3 Klassen bezügl. 100,80, 264 und 304,80 ℳ ist, so erhalten wir hiernach die drei folgenden Gleichungen:

$$(1)\ xy=100{,}80;\ (2)\ (x+64)z=264;$$
$$(3)\ (x+230)(y-z)=304{,}80.$$

$x=24$ Billets in der ersten Kl.; $y=4{,}20$ ℳ Preis eines Billets in der ersten Kl.; $z=3$ ℳ für 1 Billet in der zweiten Kl. und $y-z=1{,}20$ ℳ für 1 Billet in der dritten Kl. Demnach betrug die Anzahl der Billets in der ersten Kl. 24, in der zweiten $24+64=88$ und in der dritten $24+230=254$.

Zweite Auflösung. Die Anzahl der Billets in der ersten Kl. betrage x, so wurden aus x Billets 100,80 ℳ; aus $x+64$ Billets der zweiten Kl. 264 ℳ, aus $x+230$

Billets der dritten Kl. 304,20 *M* gelöst, also kostet 1 Billet in jeder der 3 Klassen bezüglich $\frac{100,80}{x}$, $\frac{264}{x+64}$, $\frac{204,20}{x+230}$ *M*.
Da nun 1 Billet der ersten Kl. so viel kostet, als 1 Billet der zweiten und dritten Kl. zusammen, so ist:

$$\frac{100,80}{x}=\frac{264}{x+64}+\frac{304,20}{x+230}.$$

x=24 Billets der ersten Klasse, 88 für die zweite und 254 für die dritte Klasse. Demnach kostet

1	Billet	der ersten	Klasse	100,80 : 24=4,20 *M*
1	„	„ zweiten	„	264 : 88=3 „
1	„	„ dritten	„	304,20 : 254=1,20 „

38\. Der eine Körper lege in 1 Sekunde x *m* und der andere y *m* zurück. Nach 7 Sekunden hat der eine also 7x und der andere 7y *m* gemacht; mithin hat der eine bis zum Scheitelpunkte noch 50—7x und der andere $136\frac{1}{2}-7y$ *m* zu machen. Da nun nach 7 Minuten die wechselseitige Entfernung beider Punkte 85 *m* beträgt (=der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten 50—7x und $136\frac{1}{2}-7y$ *m* betragen), so ist:

$$(1)\ (50-7x)^2+(136\tfrac{1}{2}-7y)^2=85^2.$$

Vermittels derselben Schlüsse erhält man, wenn nach 9 Sekunden die wechselseitige Entfernung 68 *m* beträgt:

$$(2)\ (50-9x)^2+(136\tfrac{1}{2}-9y)^2=68^2;$$

folglich x=2 und $3\frac{81455}{84529}$ *m* und $y=8\frac{1}{2}$ und $7\frac{131987}{169058}$ *m*.

39\. Nach den bei der vorhergehenden Auflösung angestellten Betrachtungen ist, wenn $50=a$, $136\frac{1}{2}=b$, $7=t$, $85=d$, $9=u$, $68=e$ ist: $(a-tx)^2+(b-ty)^2=d^2$, oder

$$(1)\ t^2x^2-2atx+t^2y^2-2bty=d^2-(a^2+b^2),$$

$$(a-ux)^2+(b-uy)^2=e^2, \text{ oder}$$

$$(2)\ u^2x^2-2aux+u^2y^2-2buy=e^2-(a^2+b^2).$$

Multipliziert man (1) mit u^2 und (2) mit t^2, nimmt dann zwischen diesen beiden Gl. die Differenz und dividiert diese durch $2(abu^2t-abt^2u)=2abtu(u-t)$, so ist:

$$(3)\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{t^2[e^2-(a^2+b^2)]-u^2[d^2-(a^2+b^2)]}{2abtu(u-t)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(u^2-t^2)-d^2u^2+e^2t^2}{2abtu(u-t)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(a^2+b^2)(u^2-t^2)-d^2u^2+e^2t^2}{2abtu(u-t)}=N, \text{ so ist:}$$

$$(4)\ ax+by=abN;\ \text{also}\ x=\frac{abN-by}{a}.$$

Diesen Wert für x in (1) substituiert, liefert:

$$\frac{t^2[abN-by]^2}{a^2}-\frac{2at(abN-by)}{a}+t^2y^2-2bty$$
$$=d^2-(a^2+b^2).$$ Hieraus folgt:

$$y=\frac{ab^2tN\pm a\sqrt{(a^2+b^2)[d^2-b^2-(a-btN)^2]+b^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}.$$

Auf ähnliche Art findet man:

$$x=\frac{a^2btN\pm b\sqrt{(a^2+b^2)[d^2-b^2-(a-btN)^2]+a^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}.$$

40. Haben beide Punkte nach t Sekunden die Entfernung d und nach t′ Sekunden die kürzeste Entfernung, so müssen sie offenbar nach $t'+(t'-t)=2t'-t$ Sekunden ebenfalls die Entfernung d haben, weil die Zeit, wo sie die kürzeste Entfernung erlangen, in der Mitte zwischen den Zeiten liegt, wo die Punkte zwei gleiche Entfernungen von einander haben. Angenommen, die beiden Körper haben die Geschwindigkeiten x und y, so ist mit Bezug auf die vorhergehende Auflösung:

$$(a-tx)^2+(b-ty)^2=d^2, \text{ oder}$$
$$(1)\quad t^2x^2-2atx+t^2y^2-2bty=d^2-a^2-b^2.$$
$$[a-x(2t'-t)]^2+[b-y(2t'-t)]^2=d^2, \text{ oder}$$
$$(2)\quad x^2(2t'-t)^2-2ax(2t'-t)+y^2(2t'-t)^2-2by(2t'-t)$$
$$=d^2-a^2-b^2.$$

Multipliziert man (1) mit $(2t'-t)^2$ und (2) mit t^2, subtrahiert diese beiden Gl. von einander und dividiert die Differenz durch $2abt[t(2t'-t)-(2t'-t)^2]$, so ist:

$$(3)\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{4t'(t'-t)(d^2-a^2-b^2)}{2abt[t(2t'-t)-(2t'-t)^2]}=\frac{t'(a^2+b^2-d^2)}{abt(2t'-t)}.$$

Setzt man $\frac{t'(a^2+b^2-d^2)}{abt(2t'-t)}=N$, so ist: (4) $ax+by=abN$.

Die fernere Auflösung ist nun wie bei der vorhergehenden Aufgabe 39 und man findet daher, daß

$$x=b\frac{a^2tN\pm\sqrt{(a^2+b^2)[d^2-a^2-(b-atN)^2]+a^4t^2N^2}}{ta(^2+b^2)}$$

$$y=a\frac{b^2tN\pm\sqrt{(a^2+b^2)[d^2-b^2-(a-btN)^2]+b^4t^2N^2}}{t(a^2+b^2)}.$$

41. Der erste mache in 1 Sekunde x *m* und der andere y *m*, so haben sie nach t Sekunden tx und ty *m* gemacht; also ist der eine (a—tx) *m* und der andere (b—ty) *m* vom Durchschnittspunkte entfernt. Da sie nun d *m* entfernt sind, so ist die Hypotenuse=d, folglich ist:

$$(1)\quad (a-tx)^2+(b-ty)^2=d^2.$$

Da nun ferner die bezüglichen Geschwindigkeiten x und y sind und nach Aufg. 74 S. 246 und S. 253 der Beispielsammlung die Zeit, wo beide Punkte das Minimum ihrer

Entfernung haben, $=\frac{ax+by}{x^2+y^2}$ ist, so ist: $\frac{ax+by}{x^2+y^2}=t$ oder

(2) $t(x^2+y^2)=ax+by$.

Werden (1) und (2) entwickelt und hiernach von einander subtrahiert, so findet sich (3) $ax+by=(a^2+b^2-d^2):t$. Setzt man aus (3) den für $ax+by$ gefundenen Wert in (2), so ist (4) $tx^2+ty^2=(a^2+b^2-d^2):t$. Aus (3) und (4) folgt

$x=[a(a^2+b^2-d^2)-bd\sqrt{a^2+b^2-d^2}]:[t(a^2+b^2)]$,

$y=[b(a^2+b^2-d^2)+ad\sqrt{a^2+b^2-d^2}]:[t(a^2+b^2)]$.

42. Der eine Punkt lege in jeder Sekunde x *m* und der andere Punkt y *m* zurück, so hat der erste, n Sekunden früher abgehende Punkt schon nx *m* gemacht, ehe der zweite sich zu bewegen anfängt. In t Sekunden nach Abgang des zweiten hat demnach der erste $(n+t)x$ und der zweite ty *m* gemacht und in t' Sekunden nach Abgang des zweiten hat der erste $(n+t')x$ und der zweite t'y *m* zurückgelegt. Da nun ihre respektiven wechselseitigen Entfernungen d und d' *m* betragen, so ist:

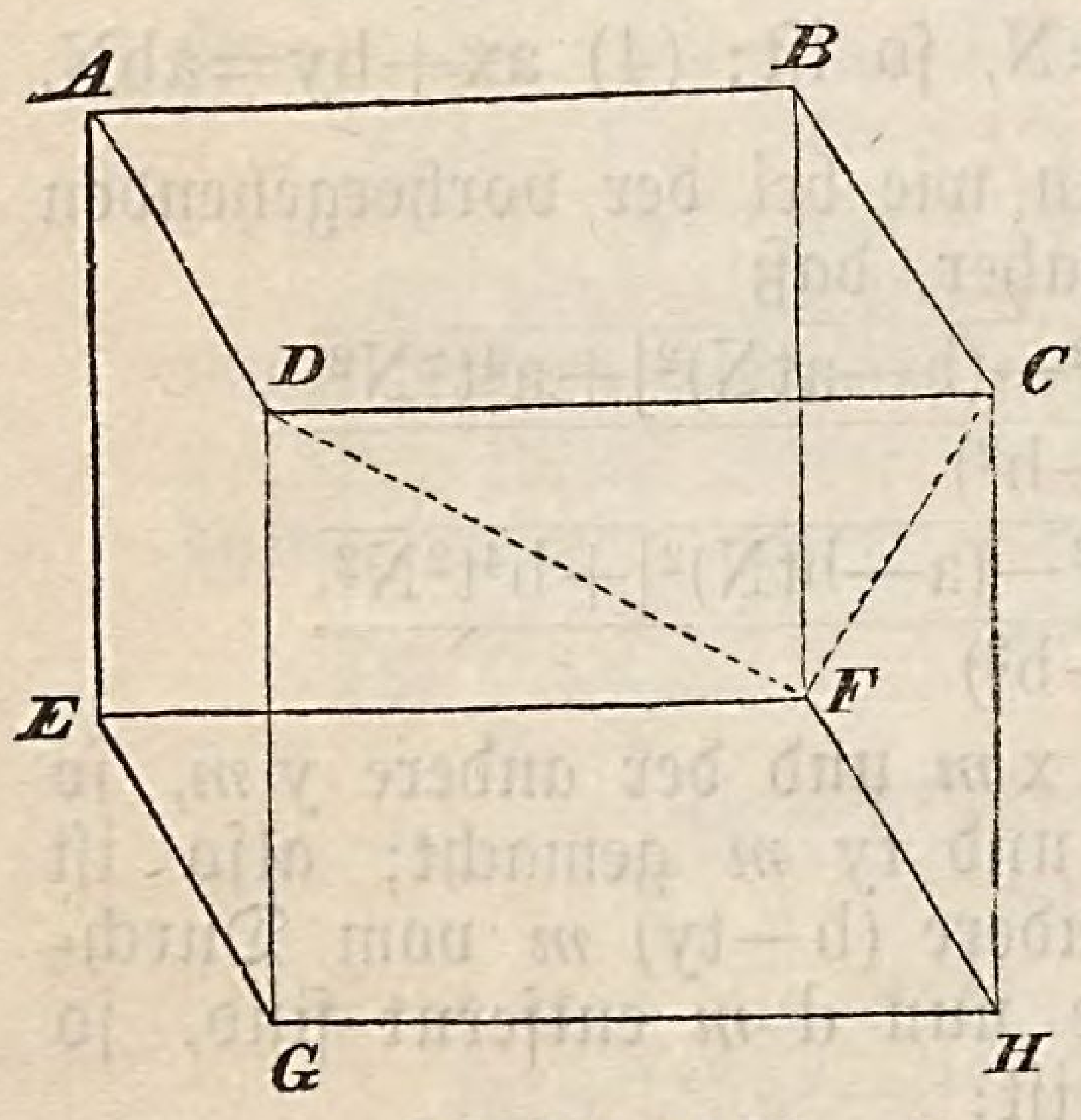
(1) $x^2(n+t)^2+t^2y^2=d^2$; (2) $x^2(n+t')^2+t'^2y^2=d'^2$.

(1) mit t'^2 und (2) mit t^2 multipliziert und hiernach subtrahiert, giebt: $x^2[t'^2(n+t)^2-t^2(n+t)^2]=d^2t'^2-d'^2t^2$;

folglich $x=\sqrt{\frac{d^2t'^2-d'^2t^2}{t'^2(n+t)^2-t^2(n+t')^2}}\ m.$

Auf ähnliche Art findet man, daß

$$y=\sqrt{\frac{d'^2(n+t)^2-d^2(n+t')^2}{t'^2(n+t)^2-t^2(n+t')^2}}\ m.$$



43. In nebenstehender Figur sei AB=DC=EF=GH=x *cm* lang, und AD=BC=EG=FH=y *cm* breit und AE=DG=BF=CH=z *cm* hoch. Die Oberfläche dieses rechtwinkeligen Parallelepipedons ist demnach:

$$\left.\begin{array}{l}2(AD\times AB)=2xy\\2(AD\times AE)=2yz\\2(AE\times AB)=2xz\end{array}\right\}=2(xy+yz+xz)\ qcm.$$

Weil nun nach der Aufgabe die Oberfläche 192 *qcm* beträgt, so ist: (1) $2(xy+yz+xz)=192$.

Da ferner die Länge die Summe der Breite und Höhe um 5 *cm* übertrifft, so ist:

$$x-5=y+z, \text{ oder } (2)\ x-y-z=5.$$

Die von einer Ecke zur gegenüberstehenden gezogene Linie sei $DF=13$ *cm*. Zieht man nun die Linie FC, so erhält man das rechtwinkelige Dreieck DCF, woraus sich ergiebt, daß, da $DC^2+FC^2=DF^2$, oder da $FC^2=HF^2+CH^2$ ist, $DC^2+HF^2+CH^2=DF^2$. Es ist daher: (3) $x^2+y^2+z^2=13^2$. Aus (1), (2) und (3) folgt $x_1=x_2=12$ *cm* die Länge, $y_1=4$ und $y_2=3$ *cm* die Breite, $z_1=3$ und $z_2=4$ *cm* die Höhe.

44. Nach den bei der vorhergehenden Auflösung angestellten Betrachtungen hat man, wenn x die Länge, y die Breite und z die Höhe bezeichnet: (1) $2(xy+xz+yz)=b$;

$$(2)\ x-y-z=c;\ (3)\ x^2+y^2+z^2=a^2$$

(1) und (3) addiert und aus der neuen Gleichung die Wurzel gezogen, giebt:

(4) $x+y+z=\sqrt{a^2+b}$. (4) und (2) addiert, giebt:

$$x_1=x_2=\tfrac{1}{2}(c+\sqrt{a^2+b}) \text{ cm lang.}$$

Diesen Wert in (2) und (3) substituiert, giebt:

$$(5)\ y+z=\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b}-c);$$

$$(6)\ y^2+z^2=\tfrac{1}{4}(3a^2-b-c^2-2c\sqrt{a^2+b}).$$

In (5) und (6) hat man die Summe der Unbekannten nebst ihrer Quadratensumme, also ist nach Aufg. 24 S. 395

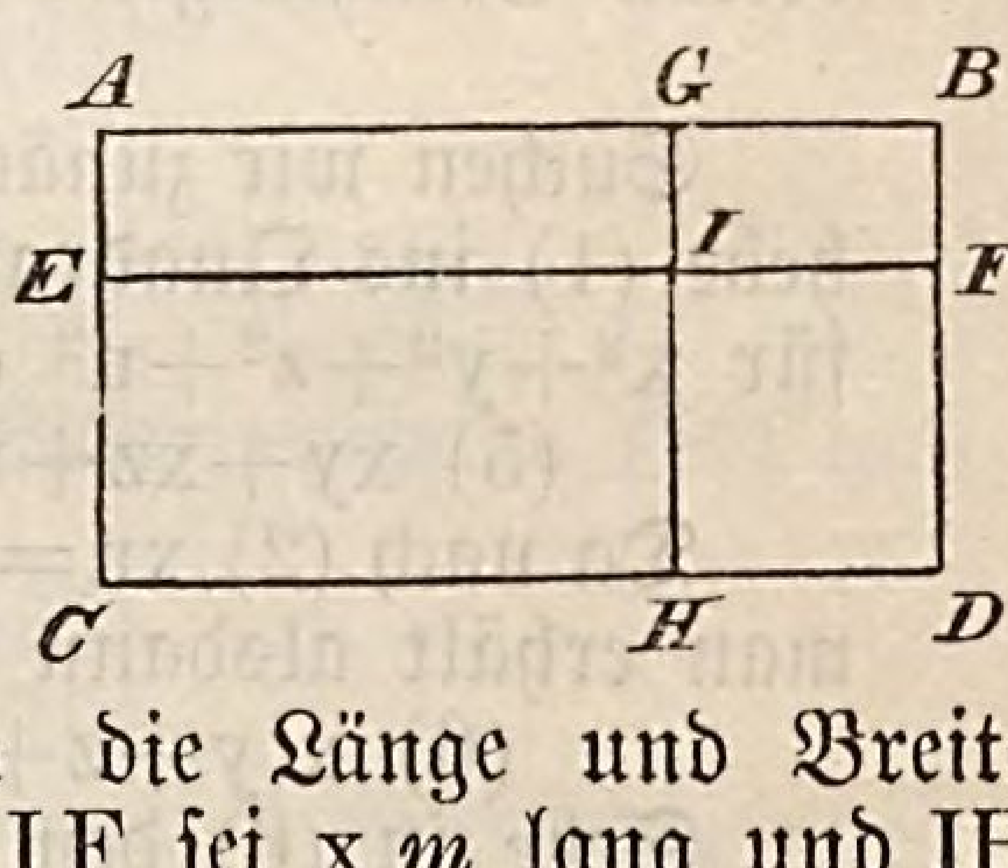
$$\left.\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{a^2+b}-c\pm\sqrt{2(3a^2-b-c^2-2c\sqrt{a^2+b})-(\sqrt{a^2+b}-c)^2}\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{a^2+b}-c\pm\sqrt{6a^2-2b-2c^2-4c\sqrt{a^2+b}-(a^2+b+c^2-2c\sqrt{a^2+b})}\}$$

$$=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{a^2+b}-c\pm\sqrt{5a^2-3b-3c^2-2c\sqrt{a^2+b}}\} \text{ cm breit;}$$

$$\left.\begin{matrix}z_1\\z_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{4}\{\sqrt{a^2+b}-c\mp\sqrt{5a^2-3b-3c^2-2c\sqrt{a^2+b}}\} \text{ cm hoch.}$$

45. In dem Rechtecke ABCD sei $AB=CD=317$ *m* und $AC=BD=119$ *m*. Zieht man die Linien EF und GH bezüglich parallel mit AB und AC, so soll das Rechteck $IHDF=8370$ *qm* und das gegenüberstehende Rechteck $AEIG=10374$ *qm* betragen.



Gesucht wird nun die Länge und Breite jener beiden Rechtecke. Die Seite IF sei x *m* lang und IH sei y *m* lang, so ist $EI=317-x$ und $IG=119-y$ *m* lang. Es ist daher:

$$(1)\ xy=8370;\ (2)\ (317-x)(119-y)=10374 \text{ oder}$$

$$(3)\ xy=119x+317y-27349.$$

Setzt man die beiden Werte für xy einander gleich, so erhält man: (4) $119x+317y=35719$.

Vgl. S. 401 Aufgabe 42 α).

Folglich $x=135$ und $165\frac{19}{119}$ *m* lang,
$y=62$ und $50\frac{215}{317}$ *m* breit.

Demnach hat das Rechteck AEGI

$$\left.\begin{array}{l} 317-135 \quad =182 \\ 317-165\frac{19}{119}=151\frac{100}{119} \end{array}\right\} m \text{ Länge und}$$

$$\left.\begin{array}{l} 119-62 \quad =57 \\ 119-50\frac{215}{317} =68\frac{102}{317} \end{array}\right\} m \text{ Breite.}$$

46. α) Betrug die Entfernung von einem Gebäude zum andern 41 Fuß, so betrug die Summe der Entfernungen der vier Gebäude $3.41=123$ Fuß. Nun haben die Mauern eine Dicke von 6 Fuß; daher ist die Summe der Dicke der 8 Mauern $8.6=48$ Fuß. Da nun die Entfernung der äußersten Grenze des ersten Gebäudes von der äußersten Grenze des vierten Gebäudes im ganzen 600 Fuß beträgt, so ist die Summe der inneren Längen der vier Gebäude $600-(123+48)=429$ Fuß. Jeder der Fliesen bedeckt $2.2\frac{1}{2}=5$ Quadratfuß; folglich beträgt die Summe der inneren Flächen der vier Gebäude $9265.5=46325$ Quadratfuß und die Summe der inneren körperlichen Räume derselben $239811.21=5036031$ Kubikfuß. Für die vorläufige Ausrechnung setzen wir der Kürze halber $429=a$, $46325=b$ und $5036031=c$. Nun habe das erste Gebäude eine Länge von x, das zweite von y, das dritte von z und das vierte von u Fuß; alsdann ist:

$$(1)\quad x+y+z+u=a.$$

Da das Längenverhältnis des ersten und zweiten Gebäudes dem des dritten und vierten gleich ist, so hat man:

$$x:y=z:u \text{ oder } (2)\quad xu=yz.$$

Ferner erhalten wir in Bezug auf den Quadratinhalt und auf die Summe der inneren körperlichen Räume die beiden Gleichungen: $(3)\ x^2+y^2+z^2+u^2=b.$

$$(4)\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c.$$

Suchen wir zunächst den Wert für xu zu bestimmen. Erhebe (1) ins Quadrat und setze in diese Gleichung den Wert für $x^2+y^2+z^2+u^2$ aus (3), so hat man:

$$(5)\quad xy+xz+xu+yz+yu+zu=\tfrac{1}{2}(a^2-b).$$

Da nach (2) $xu=yz$, so kann man xu für yz setzen, und man erhält alsdann aus (5):

$$(6)\quad x(y+z+u)+u(x+y+z)=\tfrac{1}{2}(a^2-b)$$

Setze in (6) den Wert für $y+z+u$ und für $x+y+z$ aus (1), so ist:

$$(7)\quad x(a-x)+u(a-u)=\tfrac{1}{2}(a^2-b).$$

Erhebe (1) auf die dritte Potenz, so wird:

$$(8)\quad x^3+y^3+z^3+u^3+3xu(x+u)+3(x+u)^2(y+z)+ 3(x+u)(y+z)^2+3yz(y+z)=a^3.$$

Setze in (8) den Wert für $y+z$ aus (1), den Wert für

yz aus (2) und den Wert für $x^3+y^3+z^3+u^3$ aus (4) und entwickele diese Gl., so erhält man:

$$(9)\ x(a-x)+u(a-u)-xu=\frac{a^3-c}{3a}.$$

Subtrahiere Gleichung (9) von (7), so hat man:

$$(10)\ xu=\frac{a^3+2c-3ab}{6a}.$$

Nun setze man (11) $x+u=x_1$ und (12) $y+z=y_1$, so ist:

$$(13)\ x_1+y_1=a.$$

Erhebe die Gleichungen (11) und (12) ins Quadrat und addiere dieselben, so ist:

$$(14)\ x_1^2+y_1^2=x^2+y^2+z^2+u^2+2(xu+yx).$$

Setze aus (3) den Wert für $x^2+y^2+z^2+u^2$ und aus (10) den Wert für $xu=yz$ in (14), so hat man:

$$(15)\ x_1^2+y_1^2=\frac{2a^3+4c-3ab}{3a}.$$

Nun ist in (13) und (15) die Summe der Unbekannten nebst der Summe ihrer Quadrate gegeben, daher ist nach Aufg. 24 Seite 395:

$$(16)\ x_1=\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{\frac{a^3+8c-6ab}{3a}}\right);$$

$$(17)\ y_1=\tfrac{1}{2}\left(a-\sqrt{\frac{a^3+8c-6ab}{3a}}\right).$$

Nun ist $a=429$; also $a^3=78953589$
$c=5036031$; „ $8c=40288248$

daher a^3+8c ...... $=119241837$
$6ab$ ..... $=119240550$

also $a^3+8c-6ab=1287$

folglich $\frac{a^3+8c-6ab}{3a}=\frac{1287}{1287}=1$

und daher $\pm\sqrt{\frac{a^3+8c-6ab}{3a}}=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$

Setzen wir diesen Wert für die Wurzelgröße in (16) und (17) ein, so erhalten wir:

$$(18)\ x_1=\tfrac{1}{2}(429+1)=215.$$

$$(19)\ y_1=\tfrac{1}{2}(429-1)=214.$$

Berechnen wir den Wert für $xu=yz$ in Gleichung (10), so finden wir: (20) $xu=11424$.

Daher haben wir ferner zur Bestimmung von x, y, z, u;
(21) $x+u=215$; (22) $y+z=214$,

Aus (20), (21) und (22) folgt:

$$x=\tfrac{1}{2}(215\pm\sqrt{215^2-4\,.\,11424})$$
$$=\tfrac{1}{2}(215\pm 13);$$ daher $x_1=119$ und $x_2=96$; also

$$u_1 = 96 \text{ und } u_2 = 119;$$

$$y = \tfrac{1}{2}(214 \pm 10); \text{ daher } y_1 = 112 \;\;\text{"}\;\; y_2 = 102; \text{ also}$$

$$z_1 = 102 \;\;\text{"}\;\; z_2 = 112.$$

Daher ist $x = 119$, $y = 112$, $z = 102$, $u = 96$ u. s. w.

Zweite Auflösung. Das erste Gebäude sei x, das zweite xz, das dritte y und das vierte yz Fuß lang, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$x + xz + y + yz = a \text{ oder (1) } (x+y)(1+z) = a.$$

$$x^2 + x^2z^2 + y^2 + y^2z^2 = b \text{ oder (2) } (x^2+y^2)(1+z^2) = b.$$

$$x^3 + x^3z^3 + y^3 + y^3z^3 = c \text{ oder (3) } (x^3+y^3)(1+z^3) = c.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(4)\;\; x + y = \frac{a}{1+z}; \;\; (5)\;\; x^2 + y^2 = \frac{b}{1+z^2}.$$

Nach Beisp. 24 Seite 395 ist also:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{1+z} + \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right); \\ y &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{1+z} - \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right); \end{aligned}\right\} \text{ daher ist:}$$

$$x^3 = \tfrac{1}{8}\left\{\frac{a^3}{(1+z)^3} + 3 \cdot \frac{a^2}{(1+z)^2} \cdot \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right.$$

$$\left. + 3 \cdot \frac{a}{1+z^2} \cdot \left(\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right)^3}\right\}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{8}\left\{\frac{a^3}{(1+z)^3} - 3 \cdot \frac{a^2}{(1+z)^2} \cdot \sqrt{\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}}\right.$$

$$\left. + 3 \cdot \frac{a}{1+z^2} \cdot \left(\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right)^3}\right\}.$$

$$x^3 + y^3 = \tfrac{1}{4}\left\{\frac{a^3}{(1+z)^3} + \frac{3a}{1+z} \cdot \left(\frac{2b}{1+z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right)\right\}.$$

Setze diesen Wert für $x^3 + y^3$ in Gl. (3), so wird:

$$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{a^3}{(1+z)^3} + \frac{3a}{1+z} \cdot \left(\frac{2b}{1+2z^2} - \frac{a^2}{(1+z)^2}\right)\right\} = \frac{c}{1+z^3} \text{ oder}$$

$$\frac{3ab}{1+z^2} - \frac{a^3}{(1+z)^2} = \frac{2c}{1-z+z^2}.$$

Entwickeln wir diese Gleichung, so haben wir:

$$z^4 + \frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c} z^3 - \frac{2a^3+4c}{3ab-a^3-2c} z^2 + \frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c} z + 1 = 0.$$

Dividiere diese Gleichung durch z^2, so wird:

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{2a^3+4c}{3ab-a^3-2c} = 0.$$

Setze $z + \frac{1}{z} = u$, so erhalten wir:

$$u^2+\frac{3ab+a^3-4c}{3ab-a^3-2c}u=\frac{6ab}{3ab-a^3-2c};\ \text{daher}$$

$$u_1 \text{ und } u_2=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{4c-3ab-a^3\pm\sqrt{(9ab-a^3-4c)^2-16a^3c}}{3ab-a^3-2c}\right\}.$$

Nun ist $a=429$, $b=46325$, $c=5036031$; folglich

$$\left.\begin{array}{l} 4c=4\,.\,5036031\ldots=20144124 \\ 3ab=3\,.\,429\,.\,46325=59620275 \\ a^3=429^3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.=78953589 \end{array}\right\}\ \text{daher:}$$

$4c-3ab-a^3=-118429740$. Ferner ist:

$$9ab-a^3-4c=178860825-99097713=79763112.$$

$$(9ab-a^3-4c)^2=79763112^2=6362154035924544$$

$$16a^3c=6361803548244144$$

$$(9ab-a^3-4c)^2-16a^3c=350487680400.$$

$$\pm\sqrt{(9ab-a^3-4c)^2-16a^3c}=\pm592020.$$

$3ab-a^3-2c=-29405376$; daher ist:

$$u=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{-118429740\pm592020}{-29405376}\right\};\ \text{folglich}$$

$$u_1=\frac{-118429740+592020}{-2\,.\,29405376}=\frac{58918860}{29405376}=\frac{545}{272}.$$

$$u_2=\frac{-118429740-592020}{-2\,.\,29405376}=\frac{59510880}{29405376}=\frac{85}{42}.$$

Es ist daher:

$$z+\frac{1}{z}=\tfrac{85}{42};\ \text{also } z=\frac{85\pm13}{84};\ z_1=\tfrac{7}{6},\ z_2=\tfrac{6}{7}.$$

$$z+\frac{1}{z}=\tfrac{545}{272};\ \text{also } z=\frac{545\pm33}{544};\ z_3=\tfrac{17}{16},\ z_4=\tfrac{16}{17}.$$

Setzen wir diese für z gefundenen Werte der Reihe nach in die beiden Gl. (1) und (2), so wird:

$$\alpha)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=429\,.\,\tfrac{6}{16}=198 \\ x^2+y^2=46325\,.\,\tfrac{36}{85}=19620 \end{array}\right.$$

$$\beta)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=429\,.\,\tfrac{7}{13}=231 \\ x^2+y^2=46325\,.\,\tfrac{49}{85}=26705 \end{array}\right.$$

$$\gamma)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=429\,.\,\tfrac{16}{33}=208 \\ x^2+y^2=46325\,.\,\tfrac{256}{545}=21760 \end{array}\right.$$

$$\delta)\ \left\{\begin{array}{l} x+y=429\,.\,\tfrac{17}{33}=221 \\ x^2+y^2=46325\,.\,\tfrac{289}{545}=24565. \end{array}\right.$$

Lösen wir vorstehende Gl. nach Aufg. 24 Seite 395, so haben wir:

$$\text{aus } \alpha)\ \left\{\begin{array}{l} x_1=102;\ x_1z_1=119;\ y_1=\ 96;\ y_1z_1=112 \\ x_2=\ 96;\ x_2z_2=112;\ y_2=102;\ y_2z_2=119 \end{array}\right.$$

$$\text{„ } \beta)\ \left\{\begin{array}{l} x_3=119;\ x_3z_3=102;\ y_3=112;\ y_3z_3=\ 96 \\ x_4=112;\ x_4z_4=\ 96;\ y_4=119;\ y_4z_4=102 \end{array}\right.$$

$$\text{„ } \gamma)\ \left\{\begin{array}{l} x_5=112;\ x_5z_5=119;\ y_5=\ 96;\ y_5z_5=102 \\ x_6=\ 96;\ x_6z_6=102;\ y_6=112;\ y_6z_6=119 \end{array}\right.$$

aus $\delta) \begin{cases} x_7=119; \; x_7z_7=112; \; y_7=102; \; y_7z_7=\;96 \\ x_8=102; \; x_8z_8=\;96; \; y_8=119; \; y_8z_8=112. \end{cases}$

β) Der Vorrat des kleinsten der Vorratshäuser, das einen Inhalt von $96^3=884736$ Kubikfuß hatte, reichte auf 356 Tage aus, demnach reichte der Vorrat der übrigen Kornhäuser, die einen Inhalt von 4151295 Kubikfuß hatten, auf $\frac{4151295}{884736}\times 356=\frac{41051695}{24576}=1670\frac{9775}{24576}$ Tage aus.

Dritte Auflösung. Jede unreine biquadratische Gl. enthält 4 Wurzeln. Bezeichnen wir diese 4 Wurzeln mit p, q, r, s, so ist: $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)=0$.

Entwickeln wir diese Gl., so erhalten wir:

$$x^4-(p+q+r+s)x^3+(pq+pr+ps+qr+qs+rs)x^2-$$
$$(pqr+pqs+prs+qrs)x+pqrs=0.$$

Bezeichnet man diese Gleichung mit

$$x^4-ax^3+bx^2-cx+n=0,$$

so besteht der Koeffizient a des zweiten Gliedes aus der Summe der 4 Wurzeln, der Koeffizient b des dritten Gliedes aus der Summe der Produkte je zweier Wurzeln, der Koeffizient c aus der Summe der Produkte je dreier Wurzeln und das Absolutglied n aus dem Produkte der 4 Wurzeln.

Nun betrachte man die Wurzeln x, y, z, u als die Wurzeln der biquadratischen Gl.

$$s^4+\beta s^3+\gamma s^2+\delta s+\varepsilon=0.$$

Suchen wir jetzt die Beziehungen festzustellen, in welchen die Koeffizienten dieser Gl. zu den Größen a, b, c stehen. Der Koeffizient β ist der Summe der Wurzeln gleich, also gleich $x+y+z+u$ und weil diese Summe a ausmacht, so ist

$$\beta=-a=-429.$$

Der Koeffizient des dritten Gliedes, γ, ist gleich der Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln, also $=xy+xz+xu+yz+yu+zu$, und weil diese Summe nach der ersten Auflösung Gl. (5) $=\frac{1}{2}(a^2-b)$ ist, so ist

$$\gamma=\tfrac{1}{2}(a^2-b)=68858.$$

Der Koeffizient des vierten Gliedes, δ, ist $=xyz+xyu+xzu+yzu$. Suchen wir diese Produkte zu bestimmen. Um dieselben zu erhalten, brauchen wir blos die beiden ersten Gleichungen (1) $x+y+z+u=a$ und (2) $xu=yz$ mit einander zu multiplizieren und wir haben:

$$yz(x+u)+xu(y+z)=axu \text{ oder}$$
$$xyz+xyu+xzu+yzu=axu.$$

Setzen wir in diese Gl. den in (10) der ersten Auflösung gefundenen Wert für xu, so ist:

$$xyz+xyu+xzu+yzu=\tfrac{1}{6}(a^3+2c-3ab); \text{ daher ist}$$
$$\delta=-\tfrac{1}{6}(a^3+2c-3ab)=-4900896.$$

Das Absolutglied ε besteht aus dem Produkte der 4 Wurzeln, ist also gleich xyzu. Da xu=yz, so ist

$$xyzu=(xu)^2=\left(\frac{a^3+2c-3ab}{6a}\right)^2=\varepsilon \text{ oder } \frac{\delta^2}{a^2}=130507776.$$

Setzen wir nun die für die Koeffizienten der obigen Gl. gefundenen Werte ein, so erhalten wir, wenn wir der Abkürzung wegen δ beibehalten:

$$s^4-as^3+\tfrac{1}{2}(a^2-b)s^2-\delta s+\frac{\delta^2}{a^2}=0 \text{ oder}$$

$$\left(s^2+\frac{\delta^2}{a^2s^2}\right)-a\left(s+\frac{\delta}{as}\right)+\tfrac{1}{2}(a^2-b)=0.$$

Setze $s+\frac{\delta}{as}=v$, so ist $s^2+\frac{\delta^2}{a^2s^2}=v^2-\frac{2\delta}{a}$; daher

$$v^2-\frac{2\delta}{a}-av+\tfrac{1}{2}(a^2-b)=0; \text{ folglich}$$

$$v=\tfrac{1}{2}\left\{a\pm\sqrt{\frac{2ab+8\delta-a^3}{a}}\right\}.$$

Setze hierin die Werte für a, b, δ ein, so erhalten wir:

$$v=\tfrac{1}{2}(429\pm1);\ v_1=215,\ v_2=214; \text{ also ist:}$$

$$s+\frac{\delta}{as}=215 \text{ und } s+\frac{\delta}{as}=214 \text{ oder}$$

$$s+\frac{11424}{s}=215;\ s+\frac{11424}{s}=214.$$

$$s=\frac{215\pm23}{2}; \text{ also } s_1=119,\ s_2=96; \text{ ferner ist:}$$

$$s=107\pm5; \text{ also } s_3=112,\ s_4=102.$$

47. Heißen die beiden ersten Glieder der Proportion x und y, so ist das dritte Glied a—x und das vierte b—y. Die gesuchte Proportion ist also:

$$y:x=(a-x):(b-y). \text{ Hieraus erhält man:}$$

$$(1)\quad ax-x^2=by-y^2.$$

Da nun die Summe der Quadrate aller Glieder gleich c ist, so hat man ferner:

$$x^2+(a-x)^2+y^2+(b-y)^2=c;$$

$$\text{oder: } x^2+y^2-ax-by=\tfrac{1}{2}(c-a^2-b^2).$$

Ändert man die Vorzeichen dieser Gleichung in die entgegengesetzten um, so ergiebt sich:

$$(2)\quad ax-x^2+by-y^2=\tfrac{1}{2}(a+b^2-c).$$

Substituiert man aus (1) den Wert für $by-y^2$ in (2), so ist: $2(ax-x^2)=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c)$;

folglich $x=\tfrac{1}{2}[a\pm\sqrt{c-b^2}]$ das zweite Glied, daher das dritte Glied der Proportion:

$$a-x=a-\tfrac{1}{2}[a\pm\sqrt{c-b^2}]=\tfrac{1}{2}[a\mp\sqrt{c-b^2}].$$

Ferner ist: $2(by-y^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c)$; folglich $y=\frac{1}{2}[b\pm\sqrt{c-a^2}]$ das erste Glied und hieraus das vierte Glied der Proportion:

$$b-y=b-\tfrac{1}{2}[b\pm\sqrt{c-a^2}]=\tfrac{1}{2}[b\mp\sqrt{c-a^2}].$$

Demnach heißt die Proportion:

$$\tfrac{1}{2}(b\pm\sqrt{c-a^2}):\tfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{c-b^2})=$$
$$\tfrac{1}{2}(a\mp\sqrt{c-b^2}):\tfrac{1}{2}(b\mp\sqrt{c-a^2}).$$

48. Da hier die Summe aller vier Glieder gegeben ist, so suche man vorerst die Summe der beiden äußeren und die der beiden inneren Glieder der Proportion zu bestimmen. Nimmt man an, die Differenz zwischen den beiden genannten Summen sei x, so ist die Summe der beiden äußeren Glieder, wenn sie die größere ist, $\frac{1}{2}(b+x)$, und die Summe der beiden inneren Glieder$=\frac{1}{2}(b-x)$.

Setzt man nun, um die einzelnen Glieder der Proportion selbst zu erhalten, die Differenz der beiden äußeren Glieder gleich y und die Differenz der beiden inneren gleich z, so ist:

das erste Glied$=\frac{1}{4}(b+x)+\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}(b+x+2y)$;
das vierte Glied$=\frac{1}{4}(b+x)-\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}(b+x-2y)$;
das zweite Glied$=\frac{1}{4}(b-x)+\frac{1}{2}z=\frac{1}{4}(b-x+2z)$;
das dritte Glied$=\frac{1}{4}(b-x)-\frac{1}{2}z=\frac{1}{4}(b-x-2z)$.

Demnach heißt die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}(b+x+2y):\tfrac{1}{4}(b-x+2z)=$$
$$\tfrac{1}{4}(b-x-2z):\tfrac{1}{4}(b+x-2y).$$

Produkt der beiden äußeren Glieder$=\frac{1}{16}(b^2+2bx+x^2-4y^2)$;
Produkt der beiden inneren Glieder$=\frac{1}{16}(b^2-2bx+x^2-4z^2)$.

Da nun nach der Aufgabe das Produkt der beiden äußeren oder inneren Glieder $=a$, so ist:

$$(1)\ b^2+2bx+x^2-4y^2=16a;$$
$$(2)\ b^2-2bx+x^2-4z^2=16a.$$

Erhebt man jedes Glied der Proportion ins Quadrat, so ist:

Quadrat des 1. Gliedes$=\frac{1}{16}[x^2+2bx+2xy+2by+4y^2+b^2]$;
Quadrat des 2. Gliedes$=\frac{1}{16}[x^2-2bx-2xz+2bz+4z^2+b^2]$;
Quadrat des 3. Gliedes$=\frac{1}{16}[x^2-2bx+2xz-2bz+4z^2+b^2]$;
Quadrat des 4. Gliedes$=\frac{1}{16}[x^2+2bx-2xy-2by+4y^2+b^2]$.

Summe der 4 Quadrate$=\dfrac{4x^2+8y^2+8z^2+4b^2}{16}$.

Weil die Summe dieser vier Quadrate$=c$ ist, so erhält man: (3) $4x^2+8y^2+8z^2+4b^2=16c$.

(1) und (2) addiert, liefert: (4) $2x^2-4y^2-4z^2=32a-2b^2$.

Dividiert man (3) durch 2 und addiert dieselbe zu (4), so erhält man:

$$4x^2=32a+8c-4b^2,\ \text{oder}\ x^2=8a+2c-b^2;$$
folglich $x=\pm\sqrt{8a+2c-b^2}=M$.

Substituiere diesen Wert für x in (1), so wird:

$$b^2+2bM+8a+2c-b^2-4y^2=16a,$$ oder

$$4y^2=2c-8a+2bM;$$

folglich $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2c-8a+2bM}$.

Demnach ist, wenn man x und y in die Proportion substituiert, das erste und vierte Glied derselben

$$=\tfrac{1}{4}(b+M\pm\sqrt{2c-8a+2bM}).$$

Die Werte für x und y in (2) substituiert, liefert:

$$z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2c-8a-2bM}.$$

Demnach heißt das zweite und dritte Glied derselben:

$$\tfrac{1}{4}(b-M\pm\sqrt{2c-8a-2bM}).$$

Hiernach heißt also die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{4}(b+M+\sqrt{2c-8a+2bM}) : \tfrac{1}{4}(b-M-\sqrt{2c-8a-2bM})=$$
$$\tfrac{1}{4}(b-M+\sqrt{2c-8a-2bM}) : \tfrac{1}{4}(b+M-\sqrt{2c-8a+2bM}).$$

49. Die Summe der äußeren Glieder sei x, so ist die Summe der beiden inneren Glieder b—x. Nun sei die Differenz der beiden äußeren Glieder y, so ist das erste Glied $=\frac{1}{2}(x+y)$ und das letzte $=\frac{1}{2}(x-y)$. Ferner sei die Differenz zwischen den beiden inneren Gliedern z, so ist das zweite Glied $=\frac{1}{2}(b-x+z)$ und das dritte $=\frac{1}{2}(b-x-z)$. Die verlangte Proportion hat demnach folgende Gestalt:

$$\tfrac{1}{2}(x+y) : \tfrac{1}{2}(b-x+z)=\tfrac{1}{2}(b-x-z) : \tfrac{1}{2}(x-y).$$

Das Produkt der äußeren Glieder $=\frac{1}{4}(x^2-y^2)$; das Produkt der inneren Glieder $=\frac{1}{4}(x^2-z^2-2bx+b^2)$.

Es ist demnach:

$$(1)\ x^2-y^2=4a;\quad (2)\ x^2-z^2-2bx=4a-b^2.$$

Ferner ist: Quadrat des 1. Gliedes $\frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2)$;
Quadrat des 4. Gliedes $\frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2)$.
Summe der beiden Quadrate $\frac{2}{4}(x^2+y^2)$.

Ferner ist: Quadrat des 2. Gliedes
$\frac{1}{4}(x^2+z^2-2bx+2bz-2xz+b^2)$;
Quadrat des 3. Gliedes
$\frac{1}{4}(x^2+z^2-2bx-2bz+2xz+b^2)$.
Summe der beiden Quadrate
$\frac{2}{4}(2x^2+2z^2-4bx+2b^2)$.

Differenz zwischen der Quadratensumme der äußeren und der Quadratensumme der inneren Glieder

$$=\tfrac{1}{4}(2y^2-2z^2+4bx-2b^2).$$

Demnach ist: (3) $y^2-z^2+2bx-b^2=2c$.

(1) und (3) addiert, liefert:

$$(4)\ x^2-z^2+2bx=4a+2c+b^2.$$

(2) von (4) subtrahiert, giebt:

$$4bx=2c+2b^2;\ 2bx=b^2+c;$$

folglich $x=\frac{b^2+c}{2b}$ = der Summe der äußeren Glieder,

mithin $\frac{b^2-c}{2b}$ = der Summe der inneren Glieder.

Aus der Summe $\frac{b^2+c}{2b}$ und dem Produkte a lassen sich nach Aufg. 15 Seite 392 durch Substitution der gegebenen Werte in die dort gefundene Formel, die einzelnen Glieder der Proportion selbst finden. Hiernach ist:

$$\text{1. und 4. Glied}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{b^2+c}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2+c}{2b}\right)^2-4a}\right\}$$
$$=\frac{b^2+c\pm\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b};$$
$$\text{2. und 3. Glied}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{b^2-c}{2b}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2-c}{2b}\right)^2-4a}\right\}$$
$$=\frac{b^2-c\pm\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}.$$

Die gesuchte Proportion ist also:

$$\frac{b^2+c-\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2-c-\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}$$
$$=\frac{b^2-c+\sqrt{(b^2-c)^2-16ab^2}}{4b}:\frac{b^2+c+\sqrt{(b^2+c)^2-16ab^2}}{4b}.$$

50. Die Summe des ersten und dritten Gliedes in der stetigen Proportion sei $=x$, so ist das mittlere Glied $=a-x$. Heißt ferner die Differenz des ersten und dritten Gliedes y, so ist das erste Glied $=\frac{1}{2}(x+y)$ und das dritte $=\frac{1}{2}(x-y)$. Weil nun das Produkt der äußeren Glieder = dem Produkte der inneren Glieder in einer Proportion ist, so hat man:

$\frac{1}{4}(x^2-y^2)=(a-x)^2$, oder (1) $8ax-3x^2-y^2=4a^2$.

Da die Summe der Quadrate der drei Zahlen $=b$ ist, so erhält man ferner:

$\frac{1}{4}(2x^2+2y^2)+(a-x)^2=b$, oder

(2) $3x^2-4ax+y^2=2b-2a^2$.

(1) und (2) addiert, giebt: $4ax=2a^2+2b$;

folglich $x=\frac{a^2+b}{2a}$ = der Summe des ersten und des dritten Gliedes; daher

$$a-x=a-\frac{a^2+b}{2a}=\frac{a^2-b}{2a}=\text{dem mittlern Gliede.}$$

Den Wert für x in (1) substituiert, giebt:

$$\left(\frac{a^2+b}{2a}\right)^2-y^2=4\left(\frac{a^2-b}{2a}\right)^2;$$

also: $y^2=\frac{(a^2+b)^2-4(a^2-b)^2}{4a^2}$; folglich

$$y=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b)^2-4(a^2-b)^2}}{2a}=\pm\frac{\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{2a}.$$

Die drei Zahlen heißen demnach:

$$\frac{a^2+b-\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a},\ \frac{a^2-b}{2a}$$

und $\frac{a^2+b+\sqrt{(3b-a^2)(3a^2-b)}}{4a}$.

51. Mit Bezug auf die vorhergehende Auflösung ergiebt sich, wenn x und y hier dieselbe Geltung haben, wie dort:

(1) $8ax-3x^2-y^2=4a^2$.

Ferner: $\frac{1}{4}(2x^2+2y^2)-(a-x)^2=b$, oder

(2) $4ax-x^2+y^2=2a^2+2b$.

(1) und (2) addiert, giebt: $12ax-4x^2=6a^2+2b$

oder: $x^2-3ax=-\frac{3a^2+b}{2}$, also

$(x-\frac{3}{2}a)^2=\frac{1}{4}(3a^2-2b)$;

folglich $x=\frac{1}{2}(3a\pm\sqrt{3a^2-2b})$. Hieraus ergiebt sich, daß das mittlere Glied

$a-x=a-\frac{1}{2}(3a\pm\sqrt{3a^2-3b})=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{3a^2-2b})$.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{3a^2-2b})=m$, so ist, da die Summe aller Glieder $=a$ ist, die Summe der äußeren Glieder $=a-m$. Heißt nun die Differenz zwischen dem ersten und dritten Gliede d, so ist das erste Glied $=\frac{1}{2}(a-m+d)$ und das dritte Glied $=\frac{1}{2}(a-m-d)$. Hieraus ergiebt sich folgende Proportion:

$\frac{1}{2}(a-m+d):m=m:\frac{1}{2}(a-m-d)$;

woraus man erhält: $\frac{1}{4}(a-m+d)(a-m-d)=m^2$,

oder: $d^2=a^2-2am-3m^2$;

folglich $d=\pm\sqrt{a^2-2am-3m^2}$.

Hiernach heißen die äußeren Glieder:

$\frac{1}{2}(a-m+\sqrt{a^2-2am-3m^2})$ und

$\frac{1}{2}(a-m-\sqrt{a^2-2am-3m^2})$.

52. Heißt das Produkt der inneren Glieder p, so sind, da ihre Summe $=a$ ist, nach Aufgabe 15 Seite 392 die inneren Glieder selbst $\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4p})$ und $\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4p})$.

Ist nun ferner das Produkt der äußeren Glieder ebenfalls p, so sind, da ihre Summe $=b$, die äußeren Glieder nach der oben angezogenen Aufgabe:

$\frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4p})$ und $\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4p})$

und demnach ist die verlangte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4p}):\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4p})$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4p}):\tfrac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4p}).$$

Um den Wert für p zu erhalten, kubieren wir die einzelnen Glieder der Proportion. Hiernach ergiebt sich:
Kubus des 1. Gliedes:
$\tfrac{1}{8}[b^3-3b^2\sqrt{b^2-4p}+4b(b^2-4p)-(b^2-4p)\sqrt{b^2-4p}]$;
Kubus des 4. Gliedes:
$\tfrac{1}{8}[b^3+3b^2\sqrt{b^2-4p}+3b(b^2-4p)+(b^2-4p)\sqrt{b^2-4p}]$;
Summe der beiden Kuben $=\tfrac{1}{8}[2b^3+6b(b^2-4p)]$.

Ebenso findet man, daß die Summe der Kuben der beiden inneren Glieder $=\tfrac{1}{8}[2a^3+6a(a^2-4p)]$ beträgt.

Die Summe dieser beiden Summen der Kuben ist demnach:
$$\tfrac{1}{8}[2a^3+6a(a^2-4p)+2b^3+6b(b^2-4p)]=$$
$$a^3-3ap+b^3-3bp$$
und weil dieselbe nach der Aufgabe $=c$ ist, so erhält man:
$$a^3-3ap+b^3-3bp=c;$$
oder $3p(a+b)=a^3+b^3-c$; folglich $p=(a^3+b^3-c):[3(a+b)]$.

53. Heißt das Produkt der beiden inneren oder äußeren Glieder p und die Differenz zwischen der Summe der beiden äußeren und der Summe der beiden inneren Glieder d, so ist die Summe der beiden äußeren Glieder $=\tfrac{1}{2}(a+d)$ und die Summe der beiden inneren Glieder $=\tfrac{1}{2}(a-d)$. Aus dem Produkte p und der Summe $\tfrac{1}{2}(a\pm d)$ erhält man nach Aufgabe 15 Seite 392 die äußeren Glieder
$$=\tfrac{1}{4}(a+d\mp\sqrt{(a+d)^2-16p})$$
und der inneren Glieder
$$=\tfrac{1}{4}(a-d\mp\sqrt{(a-d)^2-16p}).$$

Demnach heißt die verlangte Proportion:
$$\tfrac{1}{4}[a+d-\sqrt{(a+d)^2-16p}]:\tfrac{1}{4}[a-d-\sqrt{(a-d)^2-16p}]$$
$$=\tfrac{1}{4}[a-d+\sqrt{(a-d)^2-16p}]:\tfrac{1}{4}[a+d+\sqrt{(a+d)^2-16p}].$$

Um die Werte für p und d zu bestimmen, erhebe man jedes Glied der gefundenen Proportion ins Quadrat und in den Kubus, summiere die Quadrate wie auch die Kuben der einzelnen Glieder und stelle diese Summen den in der Aufgabe angegebenen Werten gleich. Hiernach ist:
Quadrat des 1. Gliedes
$$=\tfrac{1}{8}[(a+d)^2-8p-(a+d)\sqrt{(a+d)^2-16p}],$$
Quadrat des 4. Gliedes
$$=\tfrac{1}{8}[(a+d)^2-8p+(a+d)\sqrt{(a+d)^2-16p}],$$
Summe der beiden Quadrate $=\tfrac{1}{4}[(a+d)^2-8p]$,
Quadrat des 2. Gliedes
$$=\tfrac{1}{8}[(a-d)^2-8p+(a-d)\sqrt{(a-d)^2-16p}],$$
Quadrat des 3. Gliedes

$=\frac{1}{8}[(a-d)^2-8p+(a-d)\sqrt{(a-d)^2-16p}]$,
Summe der Quadrate des 2. und 3. Gliedes:
$=\frac{1}{4}[(a-d)^2-8p]$.
Summe der beiden Quadratensummen:
(1) $\frac{1}{2}(a^2+d^2-8p)=b$;
Kubus des 1. und 4. Gliedes:
$\frac{1}{64}[a^2+3a^2d-(3a^2+6ad+3d^2)\sqrt{(a+d)^2-16p}+3ad^2$
$+(3a+3d)[(a+d)^2-16p]+d^3-\sqrt{[(a+d)^2-16p]^3}]$;
$\frac{1}{64}[a^3+3a^2d+(3a^2+6ad+3d^2)\sqrt{(a+d)^2-16p}+3ad^2$
$+(3a+3d)[(a+d)^2-16p]+d^3+\sqrt{[(a+d)^2-16p]^3}]$;
Summe der beiden Kuben$=\frac{1}{8}[(a-d)^3-12p(a-d)]$;
Kubus des 2. und 3. Gliedes:
$\frac{1}{64}[a^3-3a^2d+3ad^2-d^3+(3a-3d)[(a-d)^2-16p]$
$-(3a^2-6ad+3d^2)\sqrt{(a-d)^2-16p}-\sqrt{[(a-d)^2-16p]^2}]$;
$\frac{1}{64}[a^3-3a^2d+3ad^2-d^3+(3a-3d)[(a-d)^2-16p]$
$+(3a^2-6ad+3d^2)\sqrt{(a-d)^2-16p}+\sqrt{[(a-d)^2-16p]^3}]$.
Summe der beiden Kuben $=\frac{1}{8}[(a-d)^3-12p(a-d)]$.
Summe der beiden Kubensummen $=\frac{1}{4}(a^3+3ad^2-12ap)$.
Es ist daher, da dieselbe nach der Aufgabe $=c$ ist,
(2) $a^3+ad^2-12ap=4c$.
Multipliziert man (1) mit 3a, so ist:
(3) $3a^3+3ad^2-24ap=6ab$; (2) von (3) subtrahiert, giebt: $12ap=2a^3-6ab+4c$; folglich $p=(a^3-3ab+2c):(6a)$.
Den Wert für p in (1) substituiert, giebt:

$$a^2+d^2-\frac{8(a^3-3ab+2c)}{6a}=2b;$$ daher

$6ad^2=2a^3+16c-12ab$; also $d^2=(a^3-6ab+8c):(3a)$;
folglich $d=\pm\sqrt{(a^3-6ab+8c):(3a)}$.

54. Ist die Summe der mittleren Glieder $=s$, so ist die Summe der äußeren $=b-s$. Hiernach sind die mittleren Glieder der Proportion

$$\frac{1}{2}(s-\sqrt{s^2-4a}) \text{ und } \frac{1}{2}(s+\sqrt{s^2-4a})$$

und die äußeren Glieder

$$\frac{1}{2}(b-s-\sqrt{(b-s)^2-4a}) \text{ und } \frac{1}{2}[b-s+\sqrt{(b-s)^2-4a}].$$

Kuben der mittleren Glieder:
$\frac{1}{8}[s^3-3s^2\sqrt{s^2-4a}+3s(s^2-4a)-\sqrt{(s^2-4a)^3}]$
$\frac{1}{8}[s^3+3s^2\sqrt{s^2-4a}+3s(s^2-4a)+\sqrt{(s^2-4a)^3}]$
Kubensumme$=\frac{1}{8}[2s^3+6s(s^2-4a)]=s^3-3as$.
Kuben der beiden äußeren Glieder:
$\frac{1}{8}[(b-s)^3-3(b-s)^2\sqrt{(b-s)^2-4a}$
$+3(b-s)[(b-s)^2-4a]-\sqrt{[(b-s)^2-4a]^3}]$;
$\frac{1}{8}[(b-s)^3+3(b-s)^2\sqrt{(b-s)^2-4a}$
$+3(b-s)[(b-s)^2-4a]+\sqrt{[(b-s)^2-4a]^3}]$.

Kubensumme $=\frac{1}{8}[2(b-s)^3+6(b-s)((b-s)^2-4a)]$
$=(b-s)^3-3a(b-s)$.
Summe der beiden Kubensummen $=b^3-3b^2s+3bs^2-3ab$. Demnach ist:

$$b^3-3b^2s+3bs^2-3ab=c;\ s^2-bs=\frac{c+3ab-b^3}{3b};$$

$$(s-\tfrac{1}{2}b)^2=\tfrac{1}{4}\left(\frac{4c+12ab-b^3}{3b}\right);$$

folglich $s=\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c+12ab-b^3}{3b}}$. Setzt man in diesem Ausdrucke die Wurzelgröße $=M$, so ist $s=\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}M$.

Setze diesen Wert in die oben gefundenen Glieder der Proportion, so ist:

$$\tfrac{1}{4}[b+M-\sqrt{(b+M)^2-16a}]:\tfrac{1}{4}[b-M-\sqrt{(b-M)^2-16a}]=$$
$$\tfrac{1}{4}[b-M+\sqrt{(b-M)^2-16a}]:\tfrac{1}{4}[b+M+\sqrt{(b+M)^2-16a}].$$

55. α) Ist die Ziffer der Hunderter x, der Zehner y und der Einer z, so heißt die gesuchte Zahl $100x+10y+z$ und die durch Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl $100z+10y+x$. Die Differenz dieser beiden Zahlen beträgt:

$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=99(x-z).$$

Nun ist nach §. 159 diese Differenz immerhin durch 9 teilbar; folglich muß sowohl $99(x-z)$, als auch 69*, wo das Sternchen an der Stelle einer ausgelassenen Ziffer steht, durch 9 teilbar sein. Nun ist offenbar $90(x-z)$ durch 9 teilbar; ferner ist jede Zahl durch 9 teilbar, deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Da nun die Differenz 69* auch durch 9 teilbar sein muß, die Quersumme derselben aber nur $6+9=15$ beträgt, so fehlen daran noch 3; folglich muß das Sternchen in 69* durch 3 ersetzt werden; wonach also die fragliche Differenz 693 ist.

Suchen wir jetzt das Sternchen in dem Produkte 1*5038 zu bestimmen. Nach §. 167 läßt das Produkt zweier Zahlen bei der Division durch 9 denselben Rest, den auch das Produkt der bei der Division der einzelnen Faktoren erhaltenen Reste läßt. Die gesuchte Zahl hat die Form

$$100x+10y+z=99x+9y+(x+y+z);$$

und die durch Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl hat die Form: $100z+10y+x=99z+9y+(x+y+z)$.

Beide Zahlen, durch 9 dividiert, lassen die nämlichen Reste, nämlich $x+y+z$ und da dies die Quersumme der Ziffern ist und 16 ausmacht, so beträgt, da 16 sich noch durch 9 teilen läßt, eigentlich der Rest bei jeder Zahl 7. Das Produkt aus diesen Resten ist 49, durch 9 geteilt, giebt 4 zum Reste. Denselben Rest muß nun auch das Produkt 1*5038,

durch 9 geteilt, geben. Die Quersumme der bekannten Ziffern dieses Produktes nämlich $1+5+3+8=17$ läßt, durch 9 dividiert, den Rest 8; um also auch den Rest 4 zu geben, muß zu der Quersumme 17 noch 5 addiert werden; folglich muß das Sternchen in dem fraglichen Produkte durch 5 ersetzt werden, wonach dasselbe also 155038 beträgt.

Zur Bestimmung von x, y, z haben wir folgende Gleichungen: (1) $x+y+z=16$; (2) $99(x-z)=693$;

$$(3)\ (99x+9y+16)(99z+9y+16)=155038.$$

Hieraus folgt $x=8$, $y=7$ und $z=1$, so daß also die Zahl 871 heißt.

β) Heißt die Ziffer der Zehner x und die der Einer y, so heißt die gesuchte Zahl $10x+y$ und die durch Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl $10y+x$. Nun giebt die Zahl durch das Produkt aus ihren Ziffern dividiert, 3 zum Quotienten; daraus folgt, daß das dreifache Produkt aus den Ziffern der Zahl selbst gleich sein muß; daher ist:

$$(1)\ 10x+y=3xy.$$

Wenn die durch die Umkehrung der Ziffern entstandene Zahl um 18 größer ist, als die gesuchte Zahl, so ist:

$$(2)\ 10y+x-(10x+y)=18.$$

Hieraus folgt $x=2$ und $y=4$; also heißt die Zahl 24.

56. Zur Bestimmung der vier Unbekannten haben wir den Angaben gemäß folgende vier Gleichungen:

$$(1)\ x+u=a;\ (2)\ y+z=b;\ (3)\ y^2=xz;\ (4)\ z^2=yu;$$

daher (5) $u=a-x$; (6) $z=b-y$; (7) $y^2=x(b-y)$;

$$(8)\ z^2=y(a-x).$$

Erhebe (6) ins Quadrat und setze den Wert für z^2 in (8), so ist: (9) $(b-y)^2=y(a-x)$. Setze hierin aus (7) den Wert für y^2, so ist: (10) $bx-y(a+2b)=-b^2$. Bestimme hieraus den Wert für x und setze denselben in (7), so hat man endlich:

$$by^2=y(b-y)(a+2b)-b^2(b-y).$$

Durch Entwickelung erhält man aus dieser Gleichung:

$$y^2-by=-\frac{b^3}{a+3b};\ \text{folglich:}$$

$$y=\tfrac{1}{2}b\left(1\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)\ \text{und daher}\ z=\tfrac{1}{2}b\left(1\mp\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right).$$

Setze den Wert für y und z in (3), so ist:

$$\tfrac{1}{2}bx\left(1\mp\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)=\tfrac{1}{4}b^2\left(1\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)^2;$$

Entwickeln wir diese Gleichung, so erhalten wir:

$$2x\left(1\mp\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)=b\left(1\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)^2;$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\left(1 \pm \sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)$, so ist:

$$2x\left(1-\frac{a-b}{a+3b}\right)=b\left(1\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)^3;$$

folglich $x=\frac{1}{8}(a+3b)\left(1\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)^3$; und daher

$$u=\frac{1}{8}(a+3b)\left(1\mp\sqrt{\frac{a-b}{a+3b}}\right)^3.$$

57. Wenn $a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$;
so ist auch: $(a-a')+(\sqrt{b}-\sqrt{b'})=0$; daher:

$$a-a'=0; \text{ also } a=a';$$

$$\text{ferner: } \sqrt{b}-\sqrt{b'}=0; \text{ also } \sqrt{b}=b'.$$

Wenn daher die beiden Seiten einer Gleichung aus der Summe eines rationalen und irrationalen Gliedes bestehen, so sind die rationalen, so wie die irrationalen Glieder bezüglich gleich. Entwickelt man das Quadrat von $x+y\sqrt{-1}$, so giebt dies:

$x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$. Demnach hat man:

$$x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}.$$

Hieraus ergiebt sich also:

(1) $x^2-y^2=a$; (2) $2xy\sqrt{-1}=b\sqrt{-1}$ oder $2xy=b$.

Da in (1) die Differenz der Quadrate gegeben ist, so suche man die Summe dieser Quadrate zu bestimmen. Deshalb erhebe man beide Gleichungen ins Quadrat, und ziehe aus der Summe derselben die Quadratwurzel, so findet man:

$$(3)\quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

In den Gleichungen (1) und (3) haben wir die Summe und die Differenz der Quadrate der beiden Unbekannten; durch Addition und Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man:

$x^2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})$; also $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}$;

$y^2=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})$; also

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}.$$

III. Diophantische Gleichungen und Kongruenzen.

A. Diophantische Gleichungen.

1. Begriff derselben.

§. 401. Bei den bisher vorgekommenen Gleichungen hatte der Fall statt, daß die Werte der unbekannten Größen durch das Resultat der Auflösungen ganz genau bestimmt wurden. Gewöhnlich wurde für jede unbekannte Größe auch nur ein einziger bestimmter Wert gefunden, wovon die quadratischen Gleichungen allein eine Ausnahme machten.

Die nun noch der Bearbeitung vorliegenden Gleichungen heißen unbestimmte oder diophantische Gleichungen, weil die unbekannten Größen mehr als einen Wert, ja oft sehr viele Werte erhalten können, welche alle den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Sie entstehen im allgemeinen dadurch, daß weniger Bedingungen angegeben sind, als erfordert werden, um die unbekannte Größe nach einem einzigen Werte zu bestimmen. Demnach gehören alle jene Gleichungen zu den unbestimmten, in welchen mehr Unbekannte vorkommen, als Gleichungen gegeben sind. Z. B. Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, deren Summe $=10$ ist. Heißt die eine Zahl x und die andere y, so ist die ganze Forderung der Frage in der einzigen Gleichung enthalten:

$$x+y=10.$$

Bestimmt man x in dieser Gl., so ergiebt sich, daß

$$x=10-y$$

und es ist klar, daß x nicht eher einen bestimmten Zahlenwert erhalten kann, bis man für y einen solchen willkürlich annimmt. Da man nun für y unendlich viele Werte, sowohl ganze als gebrochene, positive und negative Zahlen annehmen kann, so muß auch x unendlich viele Werte erhalten können, wie sich auch schon daraus ergiebt, daß die Zahl 10 auf unendlich manchfaltige Weise in zwei Teile zerlegt werden kann. Macht man es nun zur Bedingung, daß x keine negative Zahl werden soll, so darf y nicht größer als 9 angenommen werden. Soll außerdem x eine ganze positive Zahl sein, so können x und y nur folgende neun verschiedene Werte haben:

Ist y=	9	8	7	6	5	4	3	2	1
so ist x=	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2. Auflösungen der diophantischen Gleichungen in Heis, Sammlung §. 77a.

§. 402. 2. Lösen wir die Gl. nach x auf, so wird $x=6-y-z$. Da die Werte für die Unbekannten nur ganze

positive Zahlen sein dürfen, so ist nach dem Vorhergehenden die Anzahl der Auflösungen, wie auch der Werte der Unbekannten begrenzt. Aus der Betrachtung der Gl. $x=6-y-z$ ist ersichtlich, daß $(y+z)<6$ sein muß.

Ist y=	1	2	3	4	1	1	1	2	2	3
und z=	1	1	1	1	2	3	4	2	3	2
so ist x=	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

3. Da $2x=25-3y$; so ist $x=\frac{25-3y}{2}$. Es wird also x nur dann einen bestimmten Zahlenwert erhalten, wenn man für y einen solchen annimmt. Da x eine ganze positive Zahl werden soll, so muß 3y nicht nur kleiner als 25, sondern die Differenz $25-3y$ muß auch durch 2 ohne Rest teilbar sein. Für $y=1$ wird $x=11$, für $y=3$ wird $x=8$; für $y=5$ wird $x=5$; für $y=7$ wird $x=2$.

Es giebt also hier nur 4 verschiedene Werte für die Unbekannten, welche der Aufgabe entsprechen. Man kann das Beispiel auch noch auf folgende Weise auflösen. Man teile sowohl 25 als auch 3y in je zwei Teile, wovon der erste Teil durch 2 teilbar ist, der andere aber durch 2 nicht anders als in Gestalt eines Bruches teilbar ist. Man kann also $25=24+1$ oder auch $=26-1$ setzen. Ebenso kann man für $-3y=-2y-y$ oder auch $=-4y+y$ annehmen. Hiernach ist:

$$x=\frac{25-3y}{2}=\frac{24+1-4y+y}{2}=\frac{24-4y+y+1}{2}.$$

Dividiert man nun die beiden Glieder $24-4y$, die durch 2 teilbar sind, so wird:

$$x=12-2y+\frac{y+1}{2}.$$

Soll nun x eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{y+1}{2}$ eine solche sein. Es ist also notwendig, aber auch hinreichend, daß $\frac{y+1}{2}$ irgend einer ganzen Zahl gleich sei. Es sei n diese Zahl, so ist:

$$\frac{y+1}{2}=n; \text{ also } y+1=2n; \text{ daher (1) } y=2n-1.$$

Da sich y durch n ohne Bruch ausdrücken läßt, so läßt sich auch $x=12-2y+\frac{y+1}{2}=12-2y+n$ so ausdrücken. Es ist nämlich, wenn wir den Wert für y aus (1) hier einsetzen:

$$(2)\quad x=12-2(2n-1)+n=14-3n.$$

In beiden Formeln (1) und (2) kann für n jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden, ohne daß x und y ein Bruch wird. Da aber beide absolute Zahlen sein sollen, so sind alle Werte von n ausgeschlossen, wodurch eine von beiden oder beide negativ werden. Aus (1) folgt, daß n nicht kleiner als 1 angenommen werden darf, und aus (2), daß n nicht größer sein darf als 4. Wegen dieser Bedingungen giebt es nur 4 gültige Werte für n. Ist nämlich

$n=1$, so wird $x=14-3.1=11$ und $y=2.1-1=1$.
$n=2$, „ „ $x=14-3.2=8$ „ $y=2.2-1=3$.
$n=3$, „ „ $x=14-3.3=5$ „ $y=2.3-1=5$.
$n=4$, „ „ $x=14-3.4=2$ „ $y=2.4-1=7$.

4. Hier ist $5x+7y=52$: also $5x=52-7y$; daher

$$x=\frac{52-7y}{5}=\frac{50-5y-2y+2}{5}=10-y-2\frac{y-1}{5}.$$

Nun soll $2\cdot\frac{y-1}{5}$ eine ganze Zahl sein, also muß auch $\frac{y-1}{5}$ eine solche sein. Es sei nun $\frac{y-1}{5}=n$, so ist $y=5n+1$; daher $x=10-(5n+1)+2n=9-7n$.

Aus dem Werte für x folgt, daß n nur 0 und 1 sein kann; daher $x=9$ und $y=1$, sowie $x=2$ und $y=6$.

5. Hier ist: $4x=229-13y$; also $x=\frac{229-13y}{4}$, oder

$$x=\frac{228-12y-y+1}{4}=57-3y-\frac{y-1}{4}.$$

Nun soll $y-1$ durch 4 teilbar sein, also eine ganze Zahl sein. Setzen wir daher $y-1=4n$, so ist $y=4n+1$; mithin $x=57-3(4n+1)-n=54-13n$.

Aus dem Werte für x folgt, daß n nicht größer als 4 angenommen werden darf. Ist also

$n=0$, so ist $x=54$, $y=1$; $n=1$, so ist $x=41$, $y=5$.
$n=2$, so ist $x=28$, $y=9$; $n=3$, so ist $x=15$, $y=13$.
$n=4$, so ist $x=2$, $y=17$.

6. Diese Gl. durch 3 dividiert, giebt: $41x+189y=1676$; also $41x=1676-189y$; folglich $x=\frac{1676-189y}{41}=40-4y-\frac{25y-36}{41}$.

Nun soll $\frac{25y-36}{41}$ eine ganze Zahl sein. Setzt man daher: $\frac{25y-36}{41}=p$; so ist $25y-36=41p$; also

$$y=\frac{41p+36}{25}=\frac{50p-9p+36}{25}=2p+1-\frac{9p-11}{25};$$

Nun sei $\frac{9p-11}{25}=m$, so ist $9p=25m+11$; daher

$$p=\frac{25m+11}{9}=\frac{27m+9-2m+2}{9}=3m+1-2\cdot\frac{m-1}{9}.$$

Da nun $2\cdot\frac{m-1}{9}$ eine ganze Zahl sein soll, so muß auch die Hälfte$=\frac{m-1}{9}$ eine solche sein. Ist daher $\frac{m-1}{9}=n$, so ist $m=9n+1$; also wenn man zurück substituiert: $p=25n+4$; daher: $y=41n+8$ und $x=4-189n$.

Aus dem Werte für x geht hervor, daß n nur den einzig möglichen Wert 0 haben kann, weshalb $x=4$ und $y=8$.

7. Lösen wir diese Gl. nach x auf, so haben wir:

$$x=\frac{2373-24y}{13}=\frac{2379-26y+2(y-3)}{13}$$

$$=183-2y+2\cdot\frac{y-3}{13}.$$ Nun sei

$\frac{y-3}{13}=n$, so ist $y=13n+3$; daher $x=177-24n$.

Aus dem Werte für x folgt, daß n nicht größer als 7 angenommen werden kann.

Ist n=		0	1	2	3	4	5	6	7
so ist	x=	177	153	129	105	81	57	33	9
	y=	3	16	29	42	55	68	81	94

8. Löst man die Gl. nach y auf, so ist:

$$y=\frac{122362-3875x}{2973}=41-x-\frac{902x-469}{2973};$$ nun sei:

$$\frac{902x-469}{2973}=m, \text{ so ist: } x=\frac{2973m+469}{902}=3m+\frac{267m+469}{902};$$

$$\frac{267m+469}{902}=p, \text{ so ist: } m=\frac{902p-469}{267}=3p-1+\frac{101(p-2)}{267}.$$

Da nun $101.(p-2)$ durch 267 teilbar sein soll, so muß $p-2$ ebenfalls eine durch 267 teilbare Zahl sein.

Setzt man daher endlich:

$\frac{p-2}{267}=n$, so wird $p=267n+2$; folglich $m=902n+5$,

$$x=2973n+17,\ y=19-3875n.$$

Aus dem Werte für y ergiebt sich, daß n nur 0 sein kann; daher $x=17$, $y=19$.

9. Da die Werte für x und y ganze positive Zahlen sein müssen, so ist leicht ersichtlich, daß die hier gegebene Gl. keiner Auflösung fähig ist, weil es unter den angegebenen

Bedingungen unmöglich ist, für die beiden Unbekannten solche Zahlen anzunehmen. Denn setzt man für beide Unbekannten 1, so ist $3x+5y<10$; und setzt man eine derselben $=1$ und die andere $=2$, so ist in jedem Falle $3x+5y>10$. Nur für den Fall $x=0$ gesetzt wird, ist $y=2$.

10. Löst man die Gl. nach x auf, so wird:

$5x=29-8y$, also $x=\frac{29-8y}{5}=\frac{25-10y+2(y+2)}{5}$ oder

$$x=5-2y+\frac{2(y+2)}{5}.$$

Setze $\frac{y+2}{5}=n$, so ist $y=5n-2$; daher $x=9-8n$.

Hier kann n nur 1 sein, daher $x=1$ und $y=3$.

11. Jede Gl. des ersten Grades mit 2 Unbekannten kann auf die Form $ax+by=c$ gebracht werden, wo a, b, c ganze positive oder negative Zahlen bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, daß die Gl. nicht durch ganze Zahlen erfüllt werden kann, wenn die Koeffizienten a und b einen gemeinschaftlichen Faktor haben, wodurch der zweite Teil c nicht teilbar ist. Denn es sei $a=na'$ und $b=nb'$, so geht die Gl. über in $na'x+nb'y=c$ und hieraus erhält man die Gl. $a'x+b'y=\frac{c}{n}$, welche durch kein System ganzer Werte von x und y erfüllt werden kann, so lange c nicht durch n teilbar ist. Wollte man demnach in der hier gegebenen Gl. etwa y bestimmen, so wäre $y=\frac{16x}{4}+\frac{1830}{4}$. Nun ist wohl 16x durch 4 teilbar, nicht aber 1830, weshalb die Auflösung unmöglich ist.

12. Hier ist: $18x+19y=282$; daher

$$x=\frac{282-19y}{18}=15-y-\frac{y-12}{18}.$$ Setzt man

$y-12=18n$, so ist $y=18n+12$ und $x=3-19n$.

Für n ist hier nur der einzige Wert 0 zulässig, daher $x=3$ und $y=12$.

13. Wenn 3 Unbekannte durch eine einzige Gl. gegeben werden, so ist eine derselben unbestimmt. Setzt man hier $z=m$, so wird: $x=\frac{66-6y-6m+y-m+1}{3}=22-2y-2m+\frac{y-m+1}{3}$; daher $y=3p+m-1$; also $x=24-5p-4m$. Setze in die beiden für x und y gefundenen Werte $p=n-2$, so wird $x=34-5n-4m$, $y=3n+m-7$. Nun müssen n und m so genommen werden, daß $5n+4m<34$ und $3n+m>7$ wird. Setzt man also

	m=	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	7	8
	n=	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	2	3	1	2	1	1	0
so wird	x=	15	10	5	16	11	6	1	12	7	2	8	3	9	4	5	1	2
	y=	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8	3	6	1	4	2	3	1
	z=	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	7	8

14. Eliminiert man aus den beiden Gl. z, so wird:

$$2x+y=8;\text{ folglich } y=8-2x.$$

Da $2x<8$ sein muß, so kann x nur die Werte 1, 2, 3 haben. In diesem Falle wird $y=6, 4, 2$ und $z=5, 6, 7$.

15. Eliminiere aus beiden Gl. x, so wird $13y+18z=266$; daher $y=\frac{266-18z}{13}=20-z-\frac{5z-6}{13}$. Setze $\frac{5z-6}{13}=p$, so ist

$$z=\frac{15p+10-2(p+2)}{5}=3p+2-\frac{2(p+2)}{5}.$$

Setze $\frac{p+2}{5}=n$, so wird $p=5n-2$; daher

$$z=13n-4,\ y=26-18n \text{ und } x=10-3n.$$

Aus dem Werte für z folgt, daß n nicht 0 und aus dem Werte für y, daß n nicht größer als 1 sein darf, weshalb $x=7$, $y=8$, $z=9$.

16. Eliminiere y, so wird: $5z-x=34$; daher $z=\frac{34+x}{5}=6+\frac{x+4}{5}$. Setze $\frac{x+4}{5}=p$, so ist $x=5p-4$, oder wenn wir $p=n+1$ setzen, so wird $x=5n+1$; daher

$$y=8-n \text{ und } z=n+7.$$

Aus dem Werte für y folgt, daß n nicht größer als 7 sein darf.

	Ist n=	0	1	2	3	4	5	6	7
so ist:	x=	1	6	11	16	21	26	31	36
	y=	8	7	6	5	4	3	2	1
	z=	7	8	9	10	11	12	13	14

17. Die Differenz der beiden Gl. giebt: $2y+2z=11$, durch 2 dividiert, so wird: $y+z=\frac{11}{2}$. Nun ist 11 durch 2 nicht teilbar, folglich unter der Voraussetzung, daß die Unbekannten ganze positive Zahlen sein sollen, die Auflösung unmöglich. Man vergleiche Nr. 11 dieses §.

18. In den bisher vorgekommenen Aufgaben waren die Werte für die Unbekannten auf eine kleine Anzahl beschränkt, weil diese Aufgaben von der Form $ax+by=c$ waren, wo a, b, c ganz positive Zahlen bedeuten und für x und y auch ganze positive Zahlen verlangt wurden. Wenn aber b negativ ist und die Gl. von der Form $ax-by=c$ oder $ax=by+c$,

so sind die Aufgaben anderer Art und gestatten eine unendliche Menge von Auflösungen. In der hier gegebenen Gl., worin a=1, b=1 und c=17, sollen zwei Zahlen gefunden werden, deren Differenz=17 ist. Man kann demnach in der Gl. x—y=17 oder x=17+y für y alle möglichen ganzen Zahlen annehmen, so wird x jederzeit um 17 größer sein. Nimmt man daher y=n, so wird x=17+n. Setzt man für n von 1 an alle Zahlen in natürlicher Reihenfolge, so ergeben sich für x und y eine unendliche Anzahl Werte, die der in der Aufgabe ausgedrückten Bedingung entsprechen.

19. Ist in der Aufgabe von der Form ax—by=c, das Absolutglied c=0, so wird ax=by, und Aufgaben dieser Art lassen wieder eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu. Setzt man a=8 und b=11, so hat man 8x=11y; folglich $x=\frac{11y}{8}$. Da sich nun 11 durch 8 nicht teilen läßt, so muß y sich dadurch teilen lassen. Man setze daher y=8n, so wird x=11n, wo man für n nacheinander jede ganze Zahl annehmen kann, so daß also unendlich viele Zahlen angegeben werden können, die der Aufgabe 8x=11y Genüge leisten.

20. Dividiere diese Gl. durch 13, so wird 7x=17y. Da diese Aufgabe ebenfalls von der Form ax=bx ist, so erhält man nach der vorigen Aufgabe x=17n, y=7n.

21. Wenn 5x=7y, so ist zunächst x=7m und y=5m und deshalb hat die gesuchte Zahl die Form 5.7m=35m. Nun soll sie auch die Form 9z haben, also muß dann 9z=35m sein. Setzt man hierin m=9n, so wird z=35n; folglich ist:
x=7.9n=63n, also x=63, 126, 189, 252, 315 u. s. w.
y=5.9n=45n, „ y=45, 90, 135, 180, 225 „ „ „
z=5.7n=35n, „ z=35, 70, 105, 140, 165 „ „ „

22. Wenn 12x=15y oder 4x=5y, so ist x=5n und y=4n; also hat die Zahl die Form 12.5n=15.4n=60n. Sie soll aber auch die Form 20z haben, also muß 20z=60n sein, folglich z=3n. Hiernach ist:
x=5n; daher x=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 u. s. w.
y=4n; „ y=4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 „ „ „
z=3n; „ z=3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 „ „ „

23. Hier ist: (1) 23x=29y; (2) 17y=23z.

Eliminiere aus diesen beiden Gl. y, so wird (3) 17x=29z. Hieraus ergiebt sich x=29n; daher y=23n und z=17n; weshalb x=29, 58 u. s. w., y=23, 46 u. s. w., z=17, 34 u. s. w.

24. Wenn c in der Gl. ax—by=c nicht 0, sondern eine beliebige ganze Zahl ist, so bietet eine solche Aufgabe größere

Schwierigkeiten in der Auflösung dar, und zwar beruht die Auflösung auf dem Verhältnisse der beiden Zahlen, wodurch geteilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürzer, bald weitläufiger werden. Zur schnellen und sicheren Auflösung geben die Kettenbrüche §. 207 bis §. 215 *) ein schönes Mittel an die Hand, um die unbestimmten Gl. von der Form $ax \pm by = \pm c$ auflösen zu können. Bei den Kettenbrüchen kommt es darauf an, für einen gegebenen Bruch mehrere Näherungswerte zu bestimmen. Wäre nun $ax - by = c$ die aufzulösende Gl., wo a und b zwei absolute Zahlen sind, aber c positiv oder negativ sein kann, so verwandle man den Bruch $\frac{a}{b}$, der seiner Natur nach nicht weiter vereinfacht werden kann (siehe Aufg. 11 dieses §.) in einen Kettenbruch und bilde die successiven Näherungswerte. Nun sei der vorletzte Näherungswert $\frac{\alpha}{\beta}$ und der letzte $\frac{a}{b}$; dann hat man die Relation:

$$a \cdot \beta - b \cdot \alpha = \pm 1$$

und zwar $+1$, wenn der Näherungswert von gerader und -1, wenn er von ungerader Ordnung ist. Im ersten Falle ist: $a \cdot \beta - b \cdot \alpha = +1$.

Multiplizieren wir diese Gl. mit c, so finden wir:

$$a \cdot \beta c - b \cdot \alpha c = c$$

und diese Gl. unterscheidet sich von der gegebenen $ax - by = c$ blos dadurch, daß für x und y die bezüglichen Werte βc und αc gesetzt sind; folglich ist $x = \beta c$ und $y = \alpha c$ eine erste Auflösung der gegebenen Gl. und die übrigen Auflösungen sind in den Formeln $x = \beta c + bn$ und $y = \alpha c + an$ gegeben. Ist der Näherungswert $\frac{a}{b}$ aber von ungerader Ordnung, so hat man: $a \cdot \beta - b \cdot \alpha = -1$, folglich, wenn diese Gl. mit $-c$ multipliziert wir,

$$a \cdot (-\beta c) - b \cdot (-\alpha c) = c,$$

weshalb in diesem Falle $x = -\beta c$ und $y = -\alpha c$.

Wenden wir das Gesagte auf die Gl. $3x - 5y = 1$ an. Wenn man den Bruch $\frac{3}{5}$ in einen Kettenbruch verwandelt und die Näherungswerte bildet, so erhält man $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$. Da $\frac{3}{5}$ von gerader Ordnung ist, so hat man:

$$\tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{2} = +\frac{1}{2 \cdot 5}; \text{ also } 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Diese Gl. unterscheidet sich von der gegebenen nur darin,

---

*) I. Teil 5. Aufl. S. 205—219.

daß 2 statt x und 1 statt y gesetzt ist. Folglich geschieht der Gl. $3x-5y=1$ notwendig durch $x=2$ und $y=1$ Genüge. Ist die erste Auflösung gefunden, so hat man zur Bestimmung der übrigen die Formeln:

$$x=2+5n \text{ und } y=1+3n.$$

25. Hier ist: $y=\frac{17x-86}{11}=x-7+\frac{3(2x-3)}{11}$.

Setze $2x-3=11p$; so wird $x=5p+1+\frac{p+1}{2}$.

Setze $p=2m-1$, so wird $x=11m-4$ oder wenn wir $m=n+1$ setzen, $x=7+11n$ und daher $y=3+17n$.

Zweite Auflösung. Setzt man in der Gl. $17x-11y=86$ für $x=x_1+5$, so verwandelt sich die gegebene Gl. in folgende: $17x_1-11y=1$.

Die Näherungswerte des Bruches $\frac{17}{11}$ sind $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{17}{11}$, also da $\frac{17}{11}$ von gerader Ordnung ist, so haben wir:

$$17.2-11.3=1;$$

folglich $x_1=2$ und $y=3$; daher $x=2+5=7$ oder allgemein:

$$x=7+11n, \quad y=3+17n.$$

26. Außer den bisher befolgten Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gl. giebt es noch eine andere, die sich auf die Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe gründet *). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Gl. die Form $ax+c=by$ hat und $c<a$ ist, im entgegengesetzten Falle muß sie auf diese Form gebracht und $c<a$ gemacht werden.

Verwandelt man in der Gl. $89x=144y+1$ den Bruch $\frac{1}{144}$ in eine Kettenreihe zur Basis 89, so erhält man die periodisch wiederkehrenden Elemente 0,55 nebst den bezüglichen Resten 89, 1; die Kettenreihe hat also eine Periode von 2 Elementen. Das dabei zu beobachtende Verfahren ist folgendes: Da die Basis 89 sein soll, so multipliziere man den Zähler des Bruches $\frac{1}{144}$ mit 89 und dividiere dieses Produkt durch 144, also $89.1:144=0$ als Quotient und 89 als Rest. Diesen Rest multipliziere wieder mit 89 und dividiere das Produkt abermals durch 144, also $89.89:144=7921:144=55$ als Quotient und $1 =$ dem Zähler des zu verwandelnden Bruches als Rest; mithin werden bei fortgesetzter Operation die nämlichen Quotienten und bezüglichen Reste entstehen, so daß also die Quotienten, sowie die bezüglichen Reste periodisch wiederkehren. Die jedesmaligen Quotienten heißen die Elemente der Kettenreihe. Hiernach entstehen nun folgende 2 Gleichungen:

---

*) Siehe Druckenmüller's Theorie der Kettenreihe. Trier 1837. Man vergleiche auch §. 428. Nr. 30.

$$(1)\ 89 . 1 = 144 . 0 + 89;$$
$$(2)\ 89 . 89 = 144 . 55 + 1.$$

Vergleicht man die Gl. (2) mit der gegebenen, so ergiebt sich, daß $x=89$ und $y=55$. Die übrigen Werte der Unbekannten sind daher allgemein: $x=89+144n$, $y=55+89n$.

Zweite Auflösung. Giebt man der gegebenen Gl. die Form: $89x-144y=1$ und sucht die Näherungswerte des Bruches $\frac{89}{144}$, so findet man: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{21}{34}$, $\frac{34}{55}$. $\frac{55}{89}$, $\frac{89}{144}$. Daher ist:

$$89 . 89 - 144 . 55 = 1,$$

weil der Näherungsw. $\frac{89}{144}$ von gerader Ordnung ist: deshalb ist offenbar $x=89$ und $y=55$ u. s. w.

27. Die gegebene Gl. läßt sich vereinfachen in $14x=49y-133$. Diese Gleichung durch 7 dividiert, giebt

$$2x=7y-19, \text{ also } x=3y-9+\frac{y-1}{2}.$$

Nun soll $y-1$ durch 2 teilbar, also eine ganze Zahl sein. Setzen wir daher $y-1=2n$, so ist $y=2n+1$, mithin $x=7n-6$. Für $n=1$, ist $y=3$ und $x=1$.

28. Verwandelt man in der hier entwickelten Gl.

$$1102y=1533x+1421$$

den Bruch $\frac{1421}{1533}$ zur Basis 1102 in eine Kettenreihe, so entstehen die periodisch wiederkehrenden Elemente: 1021, 538, 462, 1036, 644, 100, 704, 523, 357, 296, 976, 221, 447, 930, 1006, 432, 825, 266, 764, 946, 10, 70, 493, 145 nebst den bezüglichen Resten, 749, 644, 1442, 896, 140, 980, 728, 497, 413, 1358, 308, 623, 1295, 1400, 602, 1148, 371, 1064, 1316, 14, 98, 686, 203, 1421. Daher ist: $1102 . 203 = 1533 . 145 + 1421$. Hieraus folgt $y=203$ und $x=145$; oder allgemein $x=145+1102n$, $y=203+1533n$.

Zweite Auflösung. Bildet man in der Gl. $1102y-1533x=1421$ die Näherungsw. des Bruches $\frac{1102}{1533}$, so erhält man: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{23}{32}$, $\frac{202}{281}$, $\frac{225}{813}$, $\frac{1102}{1533}$. Da nun dieser Bruch von gerader Ordnung ist, so hat man: $1102 . 313 - 1533 . 225 = 1$, mit 1421 multipliziert, giebt:

$$1102 . (313 . 1421) - 1533 . (225 . 1421) = 1421.$$

Daher $x=225 . 1421=319725$ und $y=313 . 1421=444773$ oder allgemein:
$x=319725+1102m$, $y=444773+1533m$. Setze hierin

$$m=n-290, \text{ so wird:}$$
$$x=145+1102n, \quad y=203+1533n.$$

29. Eliminiert man z aus beiden gegebenen Gl., so wird

$$6x+y=8, \text{ also } y=8-6x.$$

Hieraus folgt, daß $6x<8$ sein muß. Dies ist nur der Fall für $x=1$ oder $x=0$. Setzt man $x=1$ in die beiden gege-

benen Gl., so wird (1) $3y-2z=0$; (2) $2y-z=1$; folglich $y=2$, $z=3$. Setzt man $x=0$ ein, so ist (3) $3y-2z=8$ und (4) $2y-z=8$, woraus $y=8$ und $z=8$.

30. Eliminiert man x aus beiden gegebenen Gl., so wird:

$360z-493y=12$, woraus

$$z=\frac{12+493y}{360}=y+\frac{133y+12}{360}=y+\alpha \quad (1)$$

$$\text{d. h. } \frac{133y+12}{360}=\alpha \quad (2)$$

$$y=\frac{360\alpha-12}{133}=2\alpha+\frac{94\alpha-12}{133}=2\alpha+\beta \quad (2)$$

$$\text{d. h. } \frac{94\alpha-12}{133}=\beta \quad (3)$$

$$\alpha=\frac{133\beta+12}{94}=\beta+\frac{39\beta+12}{94}=\beta+\gamma \quad (3)$$

$$\text{d. h. } \frac{39\beta+12}{94}=\gamma \quad (4)$$

$$\beta=\frac{94\gamma-12}{39}=2\gamma+\frac{16\gamma-12}{39}=2\gamma+\delta \quad (4)$$

$$\text{d. h. } \frac{16\gamma-12}{39}=\delta \quad (5)$$

$$\gamma=\frac{39\delta+12}{16}=2\delta+\frac{7\delta+12}{16}=2\delta+\varepsilon \quad (5)$$

$$\text{d. h. } \frac{7\delta+12}{16}=\varepsilon \quad (6)$$

$$\delta=\frac{16\varepsilon-12}{7}=2\varepsilon-1+\frac{2\varepsilon-5}{7}=2\varepsilon-1+\vartheta \quad (6)$$

$$\text{d. h. } \frac{2\varepsilon-5}{7}=\vartheta \quad (7)$$

$$\varepsilon=\frac{7\vartheta+5}{2}=3\vartheta+2+\frac{\vartheta+1}{2}=3\vartheta+2+m \quad (7)$$

$$\frac{\vartheta+1}{2}=m \quad (8)$$

$$\vartheta=2m-1 \quad (8)$$

$\vartheta=2m-1$ (8)
$\varepsilon=3\vartheta+2+m=7m-1$ (7)
$\delta=2\varepsilon-1+\vartheta=16m-4$ (6)
$\gamma=2\delta+\varepsilon=39m-9$ (5)
$\beta=2\gamma+\delta=94m-22$ (4)
$\alpha=\beta+\gamma=133m-31$ (3)
$y=2\alpha+\beta=360m-84$ (2)
$y=360(n+1)-84=360n+276$

$$z = y + \alpha = 493m - 115 = 493(n+1) - 115 = 493n + 378$$

$$x = \frac{29y - 4}{8} = \frac{10440n + 8008}{8} = 1305n + 1001.$$

Für $n=0$, ist also $x=1001$, $y=276$, $z=378$.

31. Eliminiere aus den 3 Gl. x und t, so erhält man:

$10z = 19y - 8$; also $z = 2y - \frac{y+8}{10}$; daher $y = 10m - 8$, $x = 78 - 77m$, $z = 19m - 16$, $t = 31m - 27$. In diesen Formeln kann m nur 1 sein, daher $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

Zweite Auflösung. Setze in der Gl. $10z - 19y = -8$, $z = z_1 + 1$ und $y = y_1 + 1$, so wird:

$$10z_1 - 19y_1 = 1.$$

Die Näherungswerte des Bruches $\frac{10}{19}$ sind $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{19}$; daher ist: $10 . 2 - 19 . 1 = 1$; also $z_1 = 2$, $y_1 = 1$; mithin $z = 2 + 1 = 3$,

$y = 1 + 1 = 2$; folglich $x = 1$, $t = 4$.

Dritte Auflösung. Verwandele in der Gl. $19y = 10z + 8$ den Bruch $\frac{8}{10}$ in eine Kettenreihe zur Basis 19, so erhält man die zwei periodischen Elemente 15, 3, nebst den bezügl. Resten 2, 8; daher ist:

$19 . 2 = 10 . 3 + 8$; also $y = 2$, $z = 3$ u. s. w.

B. Zahlen-Kongruenzen.

3. Erklärung kongruenter Zahlen.

§. 403. Ist die Zahl $a = km + r$ und $b = k'm + r$, und werden beide durch dieselbe Zahl m dividiert, so lassen sie denselben Rest r, welcher eine von den m Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.... (m−1) sein kann. Die beiden Zahlen a und b heißen dann gleichrestig oder nach Gauß kongruent in Bezug auf die Zahl m, welche Maßzahl oder Modul genannt wird, und da in diesem Falle $a = km + r$ und $b = k'm + r$ ist, so muß

$$a - b = (k - k')m$$

durch den Modul m dividiert, eine ganze Zahl zum Quotient geben. Daher kann man auch sagen: Kongruente Zahlen sind solche, deren Differenz durch den Modul teilbar ist. Aus diesem Grunde kann jede der beiden Zahlen a und b der Rest oder das Residuum der andern heißen. Um die Kongruenz der beiden Zahlen a und b in Bezug auf den Modul m auszudrücken, ist von Gauß das symbolische Zeichen $a \equiv b \pmod m$ eingeführt; gelesen: a kongruent zu b nach dem Modul m. Die beiden Zahlen a und b heißen die Kongruenzzahlen, wovon a die Präcedente und b die Konsequente und m der Modul (die Maßzahl) ist. Da die beiden Zahlen 13 und 7, durch 6 dividiert, denselben Rest lassen, oder auch, weil ihre Differenz 13−7 eine durch 6

teilbare Zahl ist, so ist: $13 \equiv 7 \pmod 6$. Ebenso ist: $23 \equiv -1 \pmod 8$, weil $23-(-1)=23+1$ ein Vielfaches von 8 ist.

4. Verschiedene Sätze über Zahlen-Kongruenzen.

§. 404. Sind m auf einander folgende Zahlen gegeben, nämlich a, a+1, a+2, a+3, a+4, ... a+(m—1) und eine andere Zahl A, so ist eine von jenen m Zahlen dieser Zahl A nach dem Modul m kongruent, aber auch nur eine. Denn es sei $A=sm+r$, so giebt A, durch m dividiert, den Rest r. Dieser Rest r kann nur eine von den m Zahlen 0, 1, 2, 3, 4....(m—1) sein, und jede dieser Zahlen ist kleiner als m, da der Rest immer kleiner sein muß, als die Maßzahl. Dividiert man auch jede Zahl aus der Zahlenreihe a, a+1, a+2, a+3...a+(m—1) durch m, so können die möglichen Reste keine anderen sein, als die Zahlen 0, 1, 2, 3...(m—1), da durch das Wachsen jeder Zahl um 1 jeder folgende Rest um 1 größer werden muß, als der zunächst vorhergehende, weshalb auch keine zwei gleichen Reste hierbei entstehen können. Diese Reste bilden also m verschiedene unmittelbar auf einander folgende ganze Zahlen aus der natürlichen Zahlenreihe. Unter diesen m Resten muß sich notwendig einer, aber auch nur einer finden, der dem Reste r gleich ist, womit dann zugleich aus der Zahlenreihe die zu A kongruente Zahl gefunden ist. Denn könnte es noch eine zweite Zahl aus der Zahlenreihe geben, so müßten auch unter den m Resten zwei gleiche sich befinden, was unmöglich ist. Daß sich unter letzteren Resten notwendig einer befinden muß, der dem Reste r gleich ist, folgt daraus, daß die m Reste alle kleiner als m und von 0 bis (m—1) stetig zunehmen. Da nun der Rest r der Zahl A ebenfalls kleiner als m ist, so muß derselbe unter den Resten 0, 1, 2, 3, 4....(m—1) vorkommen.

Ist nun a+k die zu A kongruente Zahl aus der Zahlenreihe a, a+1, a+2...und ist $a+k=s'm+r$, wobei $a \overline{<} a+k$ und $a+k \overline{<} a+(m-1)$ sein kann, so ist, wenn $A=sm+r$

$$A-(a+k)=m(s-s')= \text{einer ganzen Zahl.}$$

Da also die Differenz $A-(a+k)$ durch m teilbar ist, so haben wir:
$$A \equiv a+k \pmod m.$$

Ist z. B. $A=56$, $a=39$, $m=7$, so ist $56=7.8+0$, also $r=0$; $39=7.5+4$; $39+1=7.5+5$; $39+2=7.5+6$; $39+3=7.6+0$, wobei also $k=3$ und $r=0$, so ist:

$$56 \equiv 39+3 \pmod 7 \text{ oder } 56 \equiv 42 \pmod 7.$$

Ist $A=111$, $a=75$, $m=9$, so ist $111=9.12+3$, also $r=3$; $75=9.8+3$; daher $k=0$ und $r=3$, also $a+k=a=75$; so ist:
$$111 \equiv 75 \pmod 9.$$

Zusatz. Da $37=\begin{cases}2.13+11 \text{ und auch}\\3.13-2 \text{ sein kann}\end{cases}$, so ist

$$37\equiv\begin{cases}+11\\-2\end{cases} \pmod{13}$$

weshalb sowohl $+11$ als auch -2 die kleinsten Residuen der Zahl 37 in Bezug auf den Modul 13 sind. Ferner ist:

$$83=\begin{cases}6.13+5\\7.13-8\end{cases} \text{ daher } 83\equiv\begin{cases}+5\\-8\end{cases} \pmod{13}$$

$$117=9.13\pm0; \text{ daher } 117\equiv\pm0 \pmod{13}$$

$$283=\begin{cases}21.13+10\\22.13-3\end{cases} \text{ daher } 283\equiv\begin{cases}+10\\-3\end{cases} \pmod{13}.$$

Aus diesen Beispielen folgt, daß jede Zahl in Bezug auf ihren Modul zwei kleinste Residuen hat, wovon das eine positiv, das andere negativ ist.

§. 405. Wenn zwei Zahlen mit derselben dritten Zahl nach demselben Modul kongruent sind, so sind sie auch unter sich kongruent für denselben Modul. Ist also (1) $a\equiv c \pmod{m}$ und (2) $c\equiv b \pmod{m}$,

so ist auch (3) $a\equiv b \pmod{m}$.

Denn die Reste der drei Zahlen a, b, c sind mit Bezug auf denselben Modul einander gleich, oder da $a-c$ und $c-b$ Vielfache von m sind, so muß auch ihre Summe $(a-c)+(c-b)=a-b$ ein Vielfaches von m sein, was, in die Kongruenzform übertragen, die Behauptung rechtfertigt; daher

$$a\equiv b \pmod{m}.$$

Aufg. Wenn $350\equiv27 \pmod{17}$ und $27\equiv10 \pmod{17}$, so ist auch $350\equiv10 \pmod{17}$.

§. 406. Von zwei modulgleichen Kongruenzen ist die Summe der Präcedenten kongruent mit der Summe der Konsequenten nach dem gemeinschaftlichen Modul. Ist $A\equiv a \pmod{m}$ und $B\equiv b \pmod{m}$,

so ist auch: $A+B\equiv a+b \pmod{m}$.

Denn da sowohl $A-a$ als auch $B-b$ Vielfache von m sind, so muß auch $(A-a)+(B-b)=(A+B)-(a+b)$ ein Vielfaches von m sein, weshalb $A+B\equiv a+b \pmod{m}$.

Aufg. Wenn $18\equiv3 \pmod{5}$ und $21\equiv1 \pmod{5}$, so ist auch $18+21\equiv3+1 \pmod{5}$ oder $39\equiv4 \pmod{5}$.

§. 407. Von zwei modulgleichen Kongruenzen ist die Differenz der Präcedenten kongruent mit der Differenz der Konsequenten, nach dem gemeinschaftlichen Modul. Ist

(1) $A\equiv a \pmod{m}$ und (2) $B\equiv b \pmod{m}$,

so ist auch: (3) $A-a\equiv B-b \pmod{m}$.

Denn da $A-a$ und $B-b$ durch m teilbar ist, so muß auch $(A-a)-(B-b)=(A-B)-(a-b)$ durch m teilbar sein, weshalb die Behauptung (3) gerechtfertigt ist.

Aufg. Ist $86 \equiv 16 \pmod{10}$ und $23 \equiv 3 \pmod{10}$, so ist auch $86-23 \equiv 16-3 \pmod{10}$ oder $63 \equiv 13 \pmod{10}$.

§. 408. Sind zwei Zahlen für irgend einen Modul kongruent, so sind auch ihre gleichvielfachen Produkte für denselben Modul kongruent. Ist

$$(1)\quad A \equiv a \pmod{m},$$

so ist auch

$$(2)\quad Ak \equiv ak \pmod{m}.$$

Denn nach der Annahme ist $A-a$ ein Vielfaches von m; folglich muß auch $(A-a)k = Ak-ak$ ein solches von m sein, wodurch die Behauptung (2) gerechtfertigt wird.

Aufg. Wenn $17 \equiv 3 \pmod{7}$, so ist

$$5 . 17 \equiv 5 . 3 \pmod{7} \text{ oder } 85 \equiv 15 \pmod{7}.$$

§. 409. Von zwei modulgleichen Kongruenzen ist das Produkt der Präcedenten kongruent mit dem Produkte der Konsequenten nach dem gemeinschaftlichen Modul. Ist

$$(1)\quad A \equiv a \pmod{m};\quad (2)\quad B \equiv b \pmod{m},$$

so ist auch

$$(3)\quad AB \equiv ab \pmod{m}.$$

Denn weil nach (1) $A-a$ ein Vielfaches von m ist, so ist zunächst auch

$$(A-a)B = AB-aB \text{ ein solches nach §. 408; daher}$$

$$(4)\quad AB \equiv aB \pmod{m}.$$

Nun ist ferner nach (2) $B-b$ ebenfalls ein Vielfaches von m, folglich auch

$$(B-b)a = aB-ab \text{ ein solches (§. 408); daher}$$

$$(5)\quad aB \equiv ab \pmod{m}.$$

Da nun nach (4) und (5) AB und ab derselben Zahl aB kongruent sind, so sind sie auch nach §. 405 selbst kongruent; also

$$AB \equiv ab \pmod{m}.$$

Aufg. Wenn $31 \equiv 4 \pmod{9}$ und $14 \equiv 5 \pmod{9}$, so ist auch $31 . 14 \equiv 4 . 5 \pmod{9}$ oder $434 \equiv 20 \pmod{9}$.

§. 410. Der vorstehende Satz läßt sich dahin verallgemeinern, daß man eine ganze Reihe von Kongruenzen, die sich auf denselben Modul beziehen, multiplizieren kann wie Gleichungen, und hieraus folgt wieder, daß gleich hohe Potenzen zweier kongruenter Zahlen kongruent sind für denselben Modul.

Ist also $A \equiv a \pmod{m}$

so ist auch $A . A \equiv a . a \pmod{m}$ oder

$A^2 \equiv a^2 \pmod{m}$.

Aus demselben Grunde ist: $A^3 \equiv a^3 \pmod{m}$

$A^4 \equiv a^4 \pmod{m}$

oder allgemein: $A^p \equiv a^p \pmod{m}$

Aufg. Ist $17 \equiv 2 \pmod{3}$, so ist auch $17^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$, oder $289 \equiv 4 \pmod{3}$.

§. 411. Wenn zwei Zahlen für irgend einen Modul kongruent sind, so können dieselben durch eine dritte Zahl dividiert werden, wenn diese Zahl ein gemeinschaftliches Maß der beiden Kongruenzzahlen und überdies eine relative Primzahl zum Modul ist.

Ist $$(1)\ a \equiv b \pmod{m}$$
und haben a und b das gemeinschaftliche Maß δ und ist ferner δ relative Primzahl zu m so ist:
$$(2)\ \frac{a}{\delta} \equiv \frac{b}{\delta} \pmod{m}.$$
Denn aus (1) folgt, daß m ein Maß ist für $a-b$; da nun δ ein gemeinschaftliches Maß für a und b sein soll, so muß es auch nach §. 129 ein solches für $a-b$ sein; folglich hat die Differenz $a-b$ sowohl m als auch δ, daher auch nach §. 136 das Produkt aus m und δ zum Maße, weshalb
$$\frac{a-b}{m\,.\,\delta} = x = \text{einer ganzen Zahl sein muß;}$$
hieraus folgt: $\frac{a}{\delta} - \frac{b}{\delta} = mx =$ einer ganzen Zahl; daher
$$\frac{a}{\delta} \equiv \frac{b}{\delta} \pmod{m}.$$

Aufg. Wenn $651 \equiv 14 \pmod{13}$, so ist auch
$\frac{651}{7} \equiv \frac{14}{7} \pmod{13}$ oder $93 \equiv 2 \pmod{13}$.

§. 412. Haben die beiden Kongruenzzahlen und der Modul einen gemeinschaftlichen Faktor, so können alle 3 Zahlen durch diesen Faktor dividiert werden, ohne die Richtigkeit der Kongruenz aufzuheben.

Ist: $$(1)\ a \equiv b \pmod{m}$$
und haben a, b, m den gemeinschaftlichen Faktor δ, so ist
$$(2)\ \frac{a}{\delta} \equiv \frac{b}{\delta} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{\delta}\right).$$
Es sei $a = a_1\delta$, $b = b_1\delta$, $m = m_1\delta$, so ist nach (1)
$$a_1\delta - b_1\delta = m_1\,.\,\delta\,.\,x = \text{einer ganzen Zahl;}$$
folglich $\frac{a_1\delta - b_1\delta}{m_1\,.\,\delta} = x =$ einer ganzen Zahl, oder nach §. 78:
$\frac{a_1 - b_1}{m_1} = x$, was, in die Kongruenzform übertragen, giebt:
$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}.$$

Aufg. Wenn $1740 \equiv 12 \pmod{24}$,
so ist auch $\frac{1740}{12} \equiv \frac{12}{12} \left(\mathrm{mod}\ \frac{24}{12}\right)$ oder
$145 \equiv 1 \pmod{2}$.

§. 413. Wenn zwei Zahlen für irgend einen Modul kongruent sind, so wird die Kongruenz nicht aufgehoben, wenn zu einer oder zu jeder der beiden

kongruenten Zahlen ein Vielfaches des Modul addiert oder subtrahiert wird.

Wenn $a \equiv b \pmod{m}$,

so ist I. $a \pm pm \equiv b \pmod{m}$

II. $a \equiv b \pm pm \pmod{m}$

III. $a \pm pm \equiv b \pm qm \pmod{m}$.

Denn da nach der Annahme $a-b$ ein Vielfaches von m ist, so ist auch $a-b \pm pm$, wie auch $a-b \pm pm \mp qm$ ein solches von m, wodurch sich die Behauptungen I, II, III rechtfertigen.

Aufg. zu I. Wenn $168 \equiv 15 \pmod{17}$,

so ist auch: $168 \pm 2 . 17 \equiv 15 \pmod{17}$;

hieraus folgt: (1) $202 \equiv 15 \pmod{17}$

(2) $134 \equiv 15 \pmod{17}$.

Aufg. zu II. Wenn $168 \equiv 15 \pmod{17}$,

so ist auch $168 \equiv 15 \pm 3 . 17 \pmod{17}$;

hieraus folgt: (1) $168 \equiv 66 \pmod{17}$

(2) $168 \equiv -36 \pmod{17}$.

Aufg. zu III. Wenn $168 \equiv 15 \pmod{17}$,

so ist auch $168 \pm 2 . 17 \equiv 15 \pm 3 . 17 \pmod{17}$;

hieraus folgt (1) $202 \equiv 66 \pmod{17}$

(2) $134 \equiv -36 \pmod{17}$.

5. Auflösungen der Aufgaben über Zahlen-Kongruenzen in Heis, Sammlung §. 78.

§. 414. Die Auflösungen der Aufg. 1—3 sind in den vorstehenden §§. enthalten.

4. Es ist immer: $a \equiv b \pmod{(a-b)}$

und nach §. 410: $a^2 \equiv b^2 \pmod{(a-b)}$

$a^3 \equiv b^3 \pmod{(a-b)}$ u. s. w.

Hieraus folgt, daß die Differenz gleich hoher Potenzen zweier Zahlen ein Multiplum von der Differenz derselben Zahlen ist; daher muß auch allgemein:

$a^p \equiv b^p \pmod{(a-b)}$ sein.

Es ist immer: $(a-b):(a-b)=$ einer ganzen Zahl

folglich $a \equiv b \pmod{(a-b)}$.

Nun ist: $a^p \equiv b^p \pmod{(a-b)}$;

folglich muß $(a^p-b^p):(a-b)=$ einer ganzen Zahl sein.

Zusatz. Da $(a+b)$ durch $(a+b)$ teilbar ist, so ist

$a \equiv -b \pmod{(a+b)}$

folglich auch: $a^{2p} \equiv b^{2p} \pmod{(a+b)}$ d. h.

$(a^{2p}-c^{2p})$ ist durch $(a+b)$ teilbar.

Ebenso ist: $a^{2p-1} \equiv -b^{2p-1} \pmod{(a+b)}$;

folglich ist $(a^{2p-1}+b^{2p-1})$ ein Vielfaches von $(a+b)$.

5. Die Kongruenz der dekadischen Zahlen für irgend einen be-

liebigen Modul aufzusuchen. Jede dekadische Zahl ist von der Form:

$N=a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4+f.10^5+\ldots\ldots$

Ist m als Modul gegeben, so untersuche man die verschiedenen Potenzen von 10 für den gegebenen Modul m. Es sei nun mit Bezug auf den Modul m

$a\equiv a,\ b.10\equiv b.10\equiv b.\alpha_1;\ c.10^2\equiv c\alpha_2;\ d.10^3\equiv d\alpha_3;$
$e.10^4\equiv e\alpha_4$ u. s. w., alsdann ist:

$N=a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4\equiv a+b\alpha_1+c\alpha_2+d\alpha_3$
$+\ldots \pmod m$ oder

$$N\equiv a+b\alpha_1+c\alpha_2+d\alpha_3+\ldots. \pmod m.$$

Bezeichnen wir die rechtsstehenden Ausdrücke mit R, so kann R ein Vielfaches von m oder ein solches nebst einem Reste sein, also kann R von der Form sm oder sm+r sein, wobei $r<m$. Daher können wir vorstehende Kongruenz auf folgende Weise schreiben:

$$N\equiv R\equiv r \pmod m.$$

Ist nun $m=9$, so sind für den Modul 9 die kleinsten Residuen zu den verschiedenen Potenzen von 10 alle $=1$; also ist $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\ldots=1$, weshalb

$$N\equiv a+b+c+d+\ldots\equiv R\equiv r \pmod 9.$$

Nun ist $a+b+c+d+\ldots$ die Quersumme der Ziffern der dekadischen Zahl; diese Quersumme, durch 9 dividiert, läßt denselben Rest, wie die Zahl selbst, wenn sie durch 9 geteilt wird. Ist diese Quersumme ein Vielfaches von 9, so ist das kleinste Residuum zu der gegebenen Zahl $=0$, andernfalls eine Zahl, die aber kleiner ist, als 9. Gegeben seien die beiden Zahlen 12345678 und 1357531 und untersuchen wir, ob dieselben durch 9 teilbar sind oder nicht. Nun ist:

$$12345678\equiv 8+7+6+5+4+3+2+1 \pmod 9.$$

Hier ist $R=36=4.9$, also ein Vielfaches von 9; folglich ist: $12325678\equiv 0 \pmod 9$.

Ferner ist: $1357531\equiv 1+3+5+7+5+3+1 \pmod 9$.

Hier ist $R=25=2.9+7$; daher

$$1357531\equiv 7 \pmod 9.$$

Für den Modul $m=11$ haben wir:

$$1\equiv 1;\ 10\equiv -1;\ 10^2\equiv 1;\ 10^3\equiv -1;\ 10^4\equiv 1;$$
$$10^5\equiv -1 \text{ u. s. w.}$$

Demnach ist hier $\alpha_1=-1;\ \alpha_2=+1;\ \alpha_3=-1;\ \alpha_4=+1;$ $\alpha_5=-1$ u. s. w. also für die geraden Potenzen von 10 ist $\alpha=+1$ und für die ungeraden $=-1$; daher

$$a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4+\ldots\equiv a-b+c-d+e-\ldots \pmod{11}$$

oder: $N\equiv a-b+c-d+e-\ldots\equiv R\equiv r \pmod{11}$.

Hieraus ergibt sich folgendes Gesetz für die Teilbarkeit durch 11. Wenn man von der Summe der Ziffern als

Zahl betrachtet in den geraden Ordnungen die Summe der Ziffern in den ungeraden Ordnungen subtrahiert und diese Differenz durch 11 ohne Rest teilbar ist, so läßt sich auch die gegebene Zahl N durch 11 ohne Rest teilen. Bleibt aber bei der Division dieser Differenz ein Rest übrig, so bleibt derselbe Rest, wenn man die gegebene Zahl durch 11 dividiert nach §. 161. Gegeben sei die Zahl 123456789005; hierin ist $a=5$, $b=-0$; $c=0$; $d=-9$; $e=7$; $f=-6$; $g=5$; $h=-4$; $i=3$; $k=-2$; $l=1$; daher ist:

$$123456789005 \equiv 5-0+0-9+7-6+5-4+3-2+1 \pmod{11}$$ oder

$$123456789005 \equiv (5+7+5+3+1)-(9+6+4+2) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Die Zahl ist demnach durch 11 teilbar. Ferner ist:

$$75654 \equiv (4+6+7)-(5+5) \equiv 7 \pmod{11},$$

mithin ist 75654 durch 11 nicht teilbar.

6. α) Nach §. 167 läßt das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen bei der Division durch 9 denselben Rest, den auch das Produkt der bei der Division der einzelnen Faktoren erhaltenen Reste giebt. Stimmen diese Reste überein, so ist die ausgeführte Multiplikation richtig. Dies nennt man die Neunerprobe. Gegeben sei

$$N=a+b\,.\,10+c\,.\,10^2+d\,.\,10^3+e\,.\,10^4+\ldots$$
$$N_1=a_1+b_1\,.\,10+c_1\,.\,10^2+d_1\,.\,10^3+e_1\,.\,10^4+\ldots$$

Nach der vorigen Aufgabe ist:

$$N \equiv a+b+c+d+e\ldots \equiv R \equiv r \pmod{9}.$$
$$N_1 \equiv a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+\ldots \equiv R_1 \equiv r_1 \pmod{9}.$$

Aus diesen beiden Kongruenzen erhält man nach §. 409:

$$N\,.\,N_1 \equiv R\,.\,R_1 \equiv r\,.\,r_1 \pmod{9}.$$

Ist daher $N=869$, $N_1=764$, $N_2=3742$, so ist:

$$869 \equiv 5 \pmod{9}$$
$$764 \equiv 8 \pmod{9}$$
$$3742 \equiv 7 \pmod{9};$$ also nach §. 409:

$$869\,.\,764\,.\,3742 \equiv 5\,.\,8\,.\,7 \pmod{9},$$ oder da hier

$$R\,.\,R_1\,.\,R_2=5\,.\,8\,.\,7=31\,.\,9+1,$$ so ist:

$$2484373672 \equiv 1 \pmod{9}.$$

β) Nach §. 172. b. Aufg. 33. γ) läßt das Produkt bei der Division durch 11 immer das Produkt aus den Resten übrig, welche man durch die Division der Faktoren erhält. Man macht daher auf eine ausgeführte Multiplikation die Elferprobe, indem man untersucht, ob die genannten Reste übereinstimmen. Nun ist nach Aufg. 5 dieses §.:

$$N \equiv a-b+c-d+\ldots \equiv R \equiv r \pmod{11}$$
$$N_1 \equiv a_1-b_1+c_1-d_1+\ldots \equiv R_1 \equiv r_1 \pmod{11};$$ also:

$$N\,.\,N_1 \equiv R\,.\,R_1 \equiv r\,.\,r_1 \pmod{11}$$ nach §. 409.

Ist $N=1234$, $N_1=4767$, $N_2=5978$, so ist:

$$1234 \equiv 2 \pmod{11}$$
$$4767 \equiv 4 \pmod{11}$$
$$5978 \equiv 5 \pmod{11}; \text{ daher}$$
$$1234 . 4767 . 5978 \equiv 2 . 4 . 5 \pmod{11}; \text{ da hier}$$
$$R . R_1 . R_2 = 2 . 4 . 5 = 3 . 11 + 7, \text{ so ist}$$
$$35165453484 \equiv 7 \pmod{11}.$$

7. Berechnen wir vom 1. Januar an die Tage bis zum 1. einschließlich eines jeden folgenden Monats und bestimmen nach dem Modul 7 die kleinsten positiven Residuen der gefundenen Zahlen, so erhalten wir:

$32 = 4 . 7 + 4$; $60 = 8 . 7 + 4$; $61 = 8 . 7 + 5$;
$91 = 12 . 7 + 7$; $92 = 13 . 7 + 1$; $121 = 17 . 7 + 2$;
$122 = 17 . 7 + 3$; $152 = 21 . 7 + 5$; $153 = 21 . 7 + 6$;
$182 = 25 . 7 + 7$; $183 = 26 . 7 + 1$; $213 = 30 . 7 + 3$;
$214 = 30 . 7 + 4$; $244 = 34 . 7 + 6$; $245 = 34 . 7 + 7$;
$274 = 39 . 7 + 1$; $275 = 39 . 7 + 2$; $305 = 43 . 7 + 4$;
$306 = 43 . 7 + 5$; $335 = 47 . 7 + 6$.

Nun soll der 1. Januar den Wochentag 1 haben und ein Sonntag sein. Die 7 Wochentage werden mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bezeichnet und zwar so, daß 1 = Sonntag, 2 = Montag, 3 = Dienstag u. s. w. ist. Daher haben wir folgende Kongruenzen mit Bezug auf den Modul 7:

		(mod 7)	
Der 1. Februar	ist ein:	$32 \equiv 4$	Mittwoch
„ „ März	„ „	$60 \equiv 4$	α) Mittwoch
		$61 \equiv 5$	β) Donnerstag
„ „ April	„ „	$91 \equiv 7$	α) Samstag
		$92 \equiv 1$	β) Sonntag
„ „ Mai	„ „	$121 \equiv 2$	α) Montag
		$122 \equiv 3$	β) Dienstag
„ „ Juni	„ „	$152 \equiv 5$	α) Donnerstag
		$153 \equiv 6$	β) Freitag
„ „ Juli	„ „	$182 \equiv 7$	α) Samstag
		$183 \equiv 1$	β) Sonntag
„ „ August	„ „	$213 \equiv 3$	α) Dienstag
		$214 \equiv 4$	β) Mittwoch
„ „ September	„ „	$244 \equiv 6$	α) Freitag
		$245 \equiv 7$	β) Samstag
„ „ Oktober	„ „	$274 \equiv 1$	α) Sonntag
		$275 \equiv 2$	β) Montag
„ „ November	„ „	$305 \equiv 4$	α) Mittwoch
		$306 \equiv 5$	β) Donnerstag
„ „ Dezember	„ „	$335 \equiv 6$	α) Freitag
		$336 \equiv 7$	β) Samstag.

Unter α) ist der Wochentag des 1. eines jeden Monats im Gemeinjahre und unter β) der eines Schaltjahres angegeben, vorausgesetzt, daß der 1. Januar ein Sonntag ist.

Zusatz. Sobald man den Wochentag des 1. Januar kennt, läßt sich jeder beliebige Tag des Jahres leicht bestimmen, wenn man erwägt, daß in einem gemeinen Jahre denselben Wochentag haben: der 1., 8., 15., 22., 29. Januar, der 5., 12., 19., 26. Februar, der 5., 12., 19., 26. März, der 2., 9., 16., 23., 30. April, der 7., 14., 21., 28. Mai, der 4., 11., 18., 25. Juni, der 2., 9., 16., 23., 30. Juli, der 6., 13., 20., 27. August, der 3., 10., 17., 24. September, der 1., 8., 15., 22., 29. Oktober, der 5., 12., 19. 26. November, der 3., 10., 17., 24., 31. Dezember. Für ein Schaltjahr muß vom März an jede Zahl um 1 vermindert werden. Es kömmt nun darauf an, den Wochentag des 1. Januar eines jeden Jahres zu bestimmen. Dazu gelangen wir auf folgende Weise. Mit jedem gemeinen Jahre findet eine Verschiebung des Wochentages statt, da $365 = 52.7 + 1$, weshalb ein solches Jahr mit demselben Wochentag schließt, mit dem es begonnen hat, und das nächste Jahr fängt mit dem darauf folgenden Wochentage an, so daß, wenn der 1. Januar ein Sonntag ist, der 31. Dezember ebenfalls ein Sonntag und der 1. Januar des folgenden Jahres ein Montag ist. In einem Schaltjahre aber, welches $366 = 52 . 7 + 2$ Tage hat, finden zwei Verschiebungen statt, weshalb in einem solchen, wenn der 1. Januar ein Sonntag ist, der 31. Dezember ein Montag und der 1. Januar des folgenden Jahres ein Dienstag ist.

Bezeichnen wir nun das Jahr, von dem wir den Wochentag des 1. Januar bestimmen wollen, mit a, so haben seit Christi Geburt a gewöhnliche Verschiebungen stattgefunden. Da aber alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, so macht dies für a Jahre a : 4 Verschiebungen mehr. Nun enthalten a Jahre a : 100 Sekularjahre, die keine Schaltjahre sein sollen, also sind a : 100 Verschiebungen in Abzug zu bringen. Da aber jedes 4. Sekularjahr ein Schaltjahr sein soll, so sind für a Jahre noch a : 400 Verschiebungen zu addieren und weil das Jahr 0 nach Christi Geburt auch als Schaltjahr angenommen werden muß, so muß zu den vorigen Verschiebungen noch eine Verschiebung addiert werden. Hiernach haben also bis zum Jahre a im ganzen

$$a + \frac{a}{4} - \frac{a}{100} + \frac{a}{400} + 1$$

Verschiebungen stattgefunden. Hierbei ist zu bemerken, daß die sich etwa ergebenden Reste der Division a : 4, a : 100, a : 400 unberücksichtigt bleiben. Bestimmen wir nun mit

Bezug auf den Modul 7 das kleinste positive Residuum zu den in a Jahren stattgefundenen Verschiebungen, so giebt dasselbe den Wochentag des 1. Januar des Jahres a an. Ist nun $a=1801$, so ist $a:4=1801:4=450$; $a:100=1801:100=18$; $a:400=1801:400=4$. Demnach haben bis zum 1. Januar des Jahres 1801 im ganzen

$$1801+450-18+4+1=2238$$

Verschiebungen stattgefunden. Nun ist

$$2238=319 \,.\, 7+5; \text{ daher}$$

$$2238\equiv 5 \pmod 7)$$

folglich ist der 1. Januar 1801 ein Donnerstag.

Bestimmen wir nun den Wochentag des 1. Januar des Jahres 1876, welches ein Schaltjahr ist. In diesem Falle muß von obiger Formel 1 subtrahiert werden, weil der Schalttag keinen Einfluß auf den Wochentag des 1. Januar hat. Wir haben demnach

$$1876+469-18+4+1-1=2331=332 \,.\, 7+7.$$

Daher ist: $2331\equiv 7 \pmod 7$

mithin ist der 1. Januar 1876 ein Samstag.

8. α) Ist nun der Wochentag des 1. Januar irgend eines Jahres gegeben, und es soll der Wochentag sowohl für verschiedene Daten desselben Jahres, als auch für den 1. Januar des darauf folgenden Jahres bestimmt werden, so kann dies auch unabhängig von dem unmittelbar Vorhergehenden auf folgende Weise bewerkstelligt werden. Will man z. B. von dem Wochentag des 1. Januar 1801 auf den des 1. Januar 1802 schließen, so erwäge man, daß 1800 Jahre bis zum 1. Januar 1801 und 1801 Jahre bis zum 1. Jannar 1802 verflossen sind. Nun denke man sich die 1800 und 1801 Jahre in Tage verwandelt und es seien 1800 Jahre $=y$ Tage, dann sind 1801 Jahre $=y+365$ Tage. Da nun der 1. Januar 1801 ein Donnerstag ist (also $\equiv 5$), so haben wir die Kongruenz:

$$(1)\ y\equiv 5 \pmod 7.$$

Nehmen wir nun an, das kleinste Residuum zu $y+365$ Tagen sei $=x$, so ist:

$$(2)\ y+365\equiv x \pmod 7.$$

Wenden wir auf beide Kongruenzen den §. 407 an, so erhalten wir:

$$(3)\ 365\equiv x-5 \pmod 7. \text{ Nun ist auch}$$

$$(4)\ 365\equiv 1 \pmod 7.$$

Aus (3) und (4) folgt: $x-5=1$; $x=6$; mithin ist der 1. Januar 1802 ein Freitag.

β) Vom 1. Januar 1801 bis zum 1. Februar 1802 sind $365+31=396=57 \,.\, 7-3$ Tage. Da nun

$$396\equiv x-5 \pmod 7$$

so ist $x-5=-3$; $x=2$; der 1. Februar 1802 ist ein Montag.

γ) Vom 1. Januar 1801 bis zum 1. November 1802 sind $365+304=669=96 . 7-3$ Tage. Nun ist:

$$669 \equiv x-5 \pmod 7$$

folglich $x-5=-3$; $x=2$; der 1. November 1802 ist ein Montag.

δ) Vom 1. Januar 1801 bis zum 24. Mai 1802 sind $365+143=508=73 . 7-3$ Tage. Nun ist:

$$508 \equiv x-5 \pmod 7$$

also $x-5=-3$; $x=2$; der 24. Mai 1802 ist ein Montag.

ε) Vom 1. Januar 1801 bis zum 25. Dezember 1802 sind $365+358=723=103 . 7+2$ Tage. Nun ist:

$$723 \equiv x-5 \pmod 7$$

also $x-5=2$, $x=7$; der 25. Dezember 1802 ist ein Samstag.

9. a) Diese Aufgabe kann auf zweifache Weise aufgelöst werden, je nachdem man von dem Wochentage des 1. Januar des Jahres 1801 oder 1802 ausgeht. Berechnen wir den Wochentag nach dem 1. Januar 1801, so ist, weil zwischen 1801 und 1803 zwei Jahre liegen:

α) $2 . 365 \equiv x-5 \pmod 7$. Nun ist auch
$2 . 365 \equiv 2 \pmod 7$

also $x-5=2$; $x=7$; der 1. Jan. 1803 ist ein Samstag.

β) (1) $y \equiv 6 \pmod 7$
(2) $y+365 \equiv x \pmod 7$; daher
(3) $365 \equiv x-6 \pmod 7$. Nun ist auch
(4) $365 \equiv 1 \pmod 7$; also

$x-6=1$; $x=7$ wie unter α).

b) α) $3 . 365 \equiv x-5 \pmod 7$ und
$3 . 365 \equiv -4 \pmod 7$; also

$x-5=-4$; $x=1$; der 1. Jan. 1804 ist ein Sonntag.

β) $365 \equiv x-7 \pmod 7$
$365 \equiv -6 \pmod 7$; also

$x-7=-6$; $x=1$ wie unter α).

c) α) $4 . 365+1 \equiv x-5 \pmod 7$ (1804 ist ein Schaltjahr)
$4 . 365+1 \equiv -2 \pmod 7$; also

$x-5=-2$; $x=3$; der 1. Jan. 1805 ist ein Dienstag.

β) $365+1 \equiv x-1 \pmod 7$. Nun ist auch
$365+1 \equiv 2 \pmod 7$; also

$x-1=2$; $x=3$ wie unter α).

d) In 70 Jahren sind 17 Schalttage; daher
(1) $y \equiv 5 \pmod 7$
(2) $y+70 . 365+17 \equiv x \pmod 7$, daher
(3) $70 . 365+17 \equiv x-5 \pmod 7$. Nun ist auch

(4) $70 . 365 + 17 \equiv -4 \pmod 7$; also ist
$x - 5 = -4$; $x = 1$; der 1. Jan. 1871 ist ein Sonntag.
e) α) Nach dem Wochentage des 1. Januar 1801
$5 . 365 + 48 + 1 \equiv x - 5 \pmod 7$ (in 5 J. ein Schalttag)
$5 . 365 + 48 + 1 \equiv -2 \pmod 7$; also
$x - 5 = -2$; $x = 3$; der 18. Febr. 1806 ist ein Dienstag.
β) Nach dem Wochentage des 1. Januar 1805

$$365 + 48 \equiv x - 3 \pmod 7$$
$$365 + 48 \equiv 0 \pmod 7; \text{ also}$$

$x - 3 = 0$; $x = 3$ wie unter α).
f) Um den Wochentag des 16. Juni 1846 zu bestimmen, erwäge man, daß vom 1. Januar 1804 im ganzen 1803 Jahre $= y$ Tage und von da bis zum 16. Juni 1846 $y + 42 . 365 + 166 + 10$ Tage verflossen sind; daher ist
(1) $y \equiv 1 \pmod 7$
(2) $y + 42 . 365 + 166 + 10 \equiv x \pmod 7$; daher
(3) $42 . 365 + 166 + 10 \equiv x - 1 \pmod 7$. Nun ist auch
(4) $42 . 365 + 166 + 10 \equiv 1 \pmod 7$; also
$x - 1 = 1$; $x = 2$; der 16. Juni 1846 ist ein Montag.
g) Berechnen wir den Wochentag des 16. Juni 1871 vom 1. Januar 1801, so haben wir:
α) (1) $y \equiv 5 \pmod 7$
(2) $y + 70 . 365 + 166 + 17 \equiv x \pmod 7$ (in 70 J. 17 Schaltt.)
(3) $70 . 365 + 166 + 17 \equiv x - 5 \pmod 7$. Nun ist auch
(4) $70 . 365 + 183 \equiv 1 \pmod 7$; also
$x - 5 = 1$; $x = 6$; der 16. Juni 1871 ist ein Freitag.
Oder: Vom 1. Januar bis 16. Juni sind 166 Tage. Da nach 9. d) der 1. Januar 1871 ein Sonntag ist, so haben wir:
β) (1) $y \equiv 1 \pmod 7$
(2) $y + 166 \equiv x \pmod 7$; also
(3) $166 \equiv x - 1 \pmod 7$. Nun ist auch
(4) $166 \equiv 5 \pmod 7$; also
$x - 1 = 5$; $x = 6$ wie unter α).

10. α) Berechnet man die Schalttage nach der Julianischen Schaltmethode, so sind bis zum Todestage Karls d. Gr. $813 . 365 + 27 + 203$ Tage verflossen seit Christi Geburt. Nun ist:

$$365 \equiv 1 \pmod 7; \text{ daher}$$
$$813 . 365 + 230 \equiv 813 + 230 \equiv 7 \pmod 7,$$

folglich ist der 28. Januar 814 ein Samstag nach der Julianischen Schaltmethode.
β) Bestimmt man aber die Schalttage nach der Gregorianischen Schaltmethode, so müssen, da die Sekularjahre keine Schaltjahre sind, dagegen jedes 4. Sekularjahr wieder ein Schaltjahr sein soll, $8 - 2 = 6$ Tage in Abrechnung gebracht werden; demnach betragen nach dieser Schaltmethode

die Schalttage in 813 Jahren $203-6=197=28.7+1$; es ist daher:

$$813.365+27+197\equiv 813+224\equiv 1 \pmod 7.$$

Mithin ist nach dieser Methode der Todestag Karls d. Gr. ein Sonntag gewesen.

11. Ist $n=1871$, so ist

α) $1872\equiv g \pmod{19}$; nun ist $1872= 98.19+10$; also $g=10$

β) $1880\equiv s \pmod{28}$; „ „ $1880= 67.28+ 4$; „ $s= 4$

γ) $1874\equiv r \pmod{15}$; „ „ $1874=144.15+14$; „ $r=14$.

12. Der Ausdruck $ax\equiv b \pmod m$ ist eine Kongruenz des ersten Grades. Dieselbe auflösen, heißt: Werte in ganzen Zahlen für die Unbekannte suchen, die der Kongruenz genügen. Dabei ist aber unbedingt notwendig, daß der Koeffizient von x, also a, und der Modul m relative Primzahlen sind. Denn hätten a und m einen gemeinschaftlichen Divisor, der nicht auch zu gleicher Zeit Divisor von b wäre, so würde die Kongruenz keine Wurzel in ganzen Zahlen, also unauflösbar in ganzen Zahlen sein. Haben aber a, b, m einen gemeinschaftlichen Divisor, so verfahre man nach §. 412. Die Wurzel der transformierten Kongruenz ist auch zugleich Wurzel der gegebenen. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir die verschiedenen Auflösungsmethoden einer Kongruenz ersten Grades an Beispielen mit bestimmten Zahlen nachweisen.

A. Nach der Substitutionsmethode.

Gegeben sei die Kongruenz (1) $13x\equiv 5 \pmod 7$.

Nach §. 413. II ist es gestattet, zu einer der beiden Kongruenzzahlen ein Vielfaches des Modul zu addieren oder davon zu subtrahieren. Um nun zu erfahren, wie oftmal der Modul 7 zu 5 addiert oder davon subtrahiert werden muß, damit aus dieser Summe oder Differenz ein Vielfaches des Koeffizienten von x entsteht, addiere man zunächst 7 zu 5 und teile diese Summe durch 13; also $(5+7):13$ läßt den Rest 12. Da also durch das einmalige Hinzuaddieren des Modul 7 zu 5 kein Multiplum von 13 entstanden ist, so addiere man das Zweifache des Modul zu 5 und dividiere diese Summe wieder durch 13; also: $(5+2.7):13$ läßt den Rest 6. Da auch das Zweifache des Modul, zu 5 addiert, noch kein Multiplum für 13 giebt, so addiere man das Dreifache des Modul; also: $(5+3.7):13$ läßt den Rest 0. Daraus folgt, das der dreifache Modul zu 5 addiert, ein Vielfaches des Koeffizienten von x giebt. Daher ist:

$$(2)\ 13x\equiv 5+3.7\equiv 26 \pmod 7.$$

Wenden wir auf diese Kongruenz §. 411 an und dividieren

die Präcedente 13x und die Konsequente 26 durch 13, so erhalten wir: (3) $x \equiv 2 \pmod 7$.
Mithin ist 2 eine Wurzel der Kongruenz $13x \equiv 5 \pmod 7$; also $x=2$ und die übrigen Werte für x sind in der Formel $x=2+7n$ enthalten, wo n jede ganze Zahl 0, 1, 2, 3 u. s. w. bedeutet. Löst man dasselbe Beispiel vermittels der Substitutionen durch Subtraktion auf, so müssen die Vielfache des Modul von der Konsequente 5 subtrahiert werden; also

$5-1.7=-2$; $5-2.7=-9$; $5-3.7=-16$; $5-4.7=-23$; $5-5.7=-30$; $5-6.7=-37$; $5-7.7=-44$; $5-8.8=-51$; $5-9.7=-58$; $5-10.7=-65$.

Dividiert man die Reste -2, -9, -16, -23 u. s. w. durch 13, so findet man, daß erst der zehnte Rest -65 eine durch 13 teilbare Zahl ist; folglich muß das Zehnfache des Modul 7 von 5 subtrahiert werden, damit die Differenz durch den Koeffizenten von x teilbar wird. Wir erhalten daher:

$$13x \equiv 5-10.7 \equiv -65 \pmod 7; \text{ also nach §. 411:}$$
$$x \equiv -5 \pmod 7.$$

Hieraus folgt, daß auch -5 eine Wurzel dieser Kongruenz ist, die übrigens gleichbedeutend ist mit der oben gefundenen, da

$$x \equiv -5+7 \equiv 2 \pmod 7.$$

Wie hieraus ersichtlich, kann die Anzahl der Substitutionen oft sehr groß werden, was fast immer der Fall sein wird, wenn der Koeffizient von x sehr groß ist.

B. Nach der Methode der Faktorenzerlegung des Koeffizienten von x.

Gegeben sei die Kongruenz

$$(1)\ 99x \equiv 13 \pmod{70}.$$

Da der Koeffizient von x das Produkt aus 9.11 ist, so wird: (2) $9.11x \equiv 13 \pmod{70}$.
Soll nun der Faktor 9 eliminiert werden, so kann man nach der Methode A durch Addition oder Subtraktion die Substitutionen vornehmen, damit beide Kongruenzzahlen durch 9 teilbar werden. Hierbei kann man auf folgende Weise kürzer verfahren: Man dividiere die Konsequente 13 und den Modul 70 durch 9, wodurch wir die Reste 4 und 7 erhalten. Addiert man den Modul 70 einmal zu 13, so erhält man als Summe der Reste $4+7=11$, also eine nicht durch 9 teilbare Zahl. Addiert man 2.70 hinzu, so ist die Summe der Reste $4+2.7=18$, die also durch 9 teilbar ist. Daher haben wir:

$$(3)\ 9.11x \equiv 13+2.70 \equiv 153 \pmod{70}.$$

Dividieren wir jetzt beide Kongruenzzahlen durch 9, so haben wir: (4) $11x \equiv 17 \pmod{70}$.

Verfahren wir jetzt, um den Koeffizienten 11 zu eliminieren, auf dieselbe Weise, so erhalten wir, da 17 : 11 und 70 : 11 die bezügl. Reste 6 und 4 giebt:
$6+4=10;\ 6+2.4=14;\ 6+3.4=18;\ 6+4.4=22.$
Dividiert man die Summen der Reste 10, 14, 18, 22 nach einander durch 11, so giebt erst der vierte Rest 22 eine durch 11 teilbare Zahl; folglich muß zu 17 das Vierfache des Modul 70 addiert werden, um ein Vielfaches von 11 zu erhalten: daher ist:

(5) $11x \equiv 17+4.70 \equiv 297 \pmod{70}$; folglich
(6) $x \equiv 27 \pmod{70}$.

Also ist 27 eine Wurzel der Kongruenz $99x \equiv 13 \pmod{70}$.

Lösen wir dasselbe Beispiel nach der Substitutionsmethode vermittels der Subtraktion auf, so ergiebt sich, daß, da
$4-1.7=-3;\ 4-2.7=-10;\ 4-3.7=-17;\ 4-4.7=-24;$
$4-5.7=-31;\ 4-6.7=-38;\ 4-7.7=-45$
erst der siebente Rest -45 eine durch 9 teilbare Zahl ist, wir von 13 das Siebenfache des Modul subtrahieren müssen, damit die Differenz ein Multiplum von 9 wird; hiernach erhalten wir:

$9.11x \equiv 13-7.70 \equiv -477 \pmod{70}$ also
$11x \equiv -53 \pmod{70}$

Verfahren wir für den Koeffizienten von 11 ebenso, so ergiebt sich, daß
$-9-1.4=-13;\ -9-2.4=-17;\ -9-3.4=-21;$
$-9-4.4=-25;\ -9-5.4=-29;\ -9-6.4=-33;$
also giebt erst der sechste Rest -33 ein Vielfaches von 11, daher müssen wir 6.70 von -53 subtrahieren, damit die Differenz durch 11 teilbar wird. Hiernach erhalten wir:

$11x \equiv -53-6.70 \equiv -473 \pmod{70}$; daher
$x \equiv -43 \pmod{70}$.

Also ist -43 ebenfalls eine Wurzel der Kongruenz
$99x \equiv 13 \pmod{70}$.

C. Nach der Methode der Transformation der Kongruenz.

Gegeben sei die Kongruenz
(1) $53x \equiv 8 \pmod{37}$.
Die nach dem Modul gebildete Kongruenz ist
(2) $37x \equiv 0 \pmod{37}$.
Nimmt man zwischen (1) und (2) die Differenz (§. 407), so ist:
(3) $16x \equiv 8 \pmod{37}$.
Multipliziere (3) mit 3, so ist nach §. 408:
(4) $48x \equiv 24 \pmod{37}$.
Subtrahiere (4) von (1), so resultiert:
(5) $5x \equiv -16 \pmod{37}$.

Nimm das Dreifache von (5), so wird:

(6) $15x \equiv -48 \pmod{37}$.

Die Differenz zwischen (6) und (3) giebt:

(7) $x \equiv 56 \pmod{37}$ oder nach §. 413. II

(8) $x \equiv 56 - 37 \equiv 19 \pmod{37}$.

Die Wurzel der gegebenen Kongruenz ist also 19.

Gegeben sei ferner die Kongruenz:

(1) $117x \equiv 1 \pmod{121}$;

(2) $121x \equiv 0 \pmod{121}$ nach dem Modul;

(3) $4x \equiv -1 \pmod{121}$ Differenz zwischen (1) und (2);

(4) $116x \equiv -29 \pmod{121}$ das 29fache von (3);

(5) $x \equiv 30 \pmod{121}$ Differenz zwischen (4) und (1).

Die Wurzel der gegebenen Kongruenz ist also 30.

Bei dieser Methode hat man dahin zu streben, daß durch die verschiedenen Operationen der Koeffizient der Unbekannten immer kleiner wird, bis er zuletzt ganz verschwindet, womit dann die Wurzel der Kongruenz gefunden ist. Je nach der Natur der Aufgabe wird es vorteilhaft sein, wenn bei der Ausrechnung der verschiedenen Kongruenzen die 3 Methoden an derselben Aufgabe in Anwendung gebracht werden können.

13. α) Es ist:

(1) $7235 = 1033 \cdot 7 + 4$; daher

(2) $7235^1 \equiv 4 \pmod{7}$; also nach §. 410:

(3) $7235^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod{7}$;

(4) $7235^3 \equiv 4 \times 2 \equiv 1 \pmod{7}$.

Nun ist $1000 = 3 \cdot 333 + 1$; mithin ist:

(5) $(7235^3))^{333} \equiv 1^{333} \pmod{7}$ oder

(6) $7235^{999} \equiv 1 \pmod{7}$. Aus (2) und (6) folgt:

(7) $7235^1 \cdot 7235^{999} \equiv 4 \cdot 1 \pmod{7}$, oder

(8) $7235^{1000} \equiv 4 \pmod{7}$.

Demnach ist zu 7235^{1000} mit Bezug auf den Modul 7 das kleinste Residium $x = 4$ oder $(7235^{1000} - 4)$ ist durch 7 teilbar.

β) Da $387 = 16 \cdot 23 + 19$ ist, so wird:

(1) $387 \equiv 19 \pmod{23}$; (2) $387^2 \equiv 19^2 \equiv 16 \pmod{23}$;

(3) $387^3 \equiv 19 \cdot 16 \equiv 5 \pmod{23}$; (4) $387^4 \equiv 19 \cdot 5 \equiv 3$ mod 23);

(5) $387^5 \equiv 19 \cdot 3 \equiv 11 \pmod{23}$; (6) $387^6 \equiv 16 \cdot 11 \equiv 2 \pmod{23}$;

(7) $388^7 \equiv 19 \cdot 2 \equiv 15 \pmod{23}$; (8) $387^8 \equiv 19 \cdot 15 \equiv 9 \pmod{23}$;

(9) $387^9 \equiv 19 \cdot 9 \equiv 10 \pmod{23}$; und aus (5) und (6) folgt:

(10) $387^5 \cdot 387^6 \equiv 11 \cdot 2 \pmod{23}$ oder

(11) $387^{11} \equiv 22 \pmod{23}$; daher

(12) $(387^{11})^2 \equiv 22^2 \pmod{23}$ oder (13) $387^{22} \equiv 1 \pmod{23}$.

Da nun $999 = 22 \cdot 45 + 9$, so ist auch

(14) $(387^{22})^{45} \equiv 1^{45} \pmod{23}$ oder (15) $387^{990} \equiv 1 \pmod{23}$.

Aus (9) und (15) folgt:

(16) $387^{990} . 387^{9} \equiv 1 . 10 \pmod{23}$ oder (17) $387^{999} \equiv 10 \pmod{23}$. Mithin ist mit Bezug auf den Modul 23 zu 387^{999} das kleinste positive Residuum $y=10$ oder $(387^{999}-10)$ ist ein Multiplum von 23.

6. **Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der diophantischen Gleichungen in Heis, Sammlung §. 79.**

§. 415. 1. Heißen die beiden Quotienten x und y, so ist:
(1) $5x+8y=71$.

Erste Auflösung. $5x=-10y+2y+70+1$; daher $x=-2y+14+\frac{2y+1}{5}$. Setze $\frac{2y+1}{5}=m$, so ist

$2y=5m-1$; $y=2m+\frac{m-1}{2}$; $m=2n+1$; daher

$$y=2+5n,\ x=11-8n.$$

Hier kann n nur die Werte 0 und 1 haben. Dies giebt $x=11$ oder $x=3$ und $y=2$ oder $y=7$. Daher heißen die beiden Zahlen $5.11=55$ und $8.2=16$ oder

$$5.3=15 \text{ und } 8.7=56.$$

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (1) $y=9-y_1$, so wird:

$$(2)\ 5x-8y_1=-1.$$

Der Bruch $\frac{5}{8}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$; daher $5.3-8.2=-1$; also $x=3$, $y_1=2$, $y=9-2=7$ u. s. w.

Dritte Auflösung. Giebt man der Gl. (2) die Form:

$$(3)\ 8y_1=5x+1$$

und verwandelt man den Bruch $\frac{1}{5}$ zur Basis 8 in eine Kettenreihe, so entstehen die Elemente 1, 4, 6, 3 nebst den bezüglichen Resten 3, 4, 2, 1; daher ist:
$8.2=5.3+1$; folglich $y_1=2$, $y=7$ und $x=3$ u. s. w.

Vierte Auflösung. Lösen wir Gl. (1) vermittels der Kongruenzen auf, so ist:
$5x\equiv 71 \pmod 8$. Subtrahiere von der Konsequente 2.8:
$5x\equiv 55 \pmod 8$. Nach §. 411 erhalten wir hieraus
$x\equiv 11 \pmod 8$ oder $x\equiv 3 \pmod 8$; daher allgemein

$$x=3+8n,\ y=7-5n.$$

2. Sind die beiden Quotienten x und y, so ist:
$(7x+3)+(11y+5)=131$ oder (1) $7x+11y=123$.

Erste Auflösung. $7x=123-11y=126-14y+3(y-1)$; also

$x=18-2y+\frac{3(y-1)}{7}$; daher $y=1+7n$ und $x=16-11n$.

Für $n=0$ wird $x=16$, $y=1$; für $n=1$ wird $x=5$, $y=8$. Daher heißen die beiden Zahlen $7.16+3=115$ und $11.1+5=16$ oder $7.5+3=38$ und $11.8+5=93$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (1) $y=11-y_1$, so wird: (2) $7x-11y_1=2$.

Der Bruch $\frac{7}{11}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}$; daher ist: $7.3-11.2=-1$. Diese Gl. mit (-2) multipliziert, giebt $7.(-6)-11.(-4)=2$; daher $x=-6$, oder allgemein

$$x=-6+11m \text{ oder } m=n+1 \text{ gesetzt:}$$
$$x=5+11n \text{ und daher } y=8-7n.$$

Diese Formeln liefern, wie diejenigen der ersten Aufl. dieselben Werte für x und y, wenn n=0 und 1 gesetzt wird.

Dritte Auflösung. Die Gl. (2) giebt auch die Form:

$$(3)\ 7x=11y_1+2.$$

Verwandele den Bruch $\frac{2}{11}$ in eine Kettenreihe zur Basis 7, so entstehen die Elemente 1, 1, 6, 2, 3, 5, 5, 0, 4, 3 nebst den bezüglichen Resten 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1, 7, 5, 2; daher ist:

$7.5=11.3+2$; also $x=5$, $y_1=3$, $y=11-3=8$ u. s. w.

Vierte Auflösung. Aus der Gl. (1) erhalten wir die Kongruenz:

$7x\equiv 123 \pmod{11}$	$11y\equiv 123 \pmod{7}$
$7x\equiv 123-11\equiv 112 \pmod{11}$	$7y\equiv 17.7 \pmod{7}$
$x\equiv 16 \pmod{11}$	$4y\equiv 4 \pmod{7}$
$x\equiv 16-11\equiv 5 \pmod{11}$	$y\equiv 1 \pmod{7}$ u. s. w.

3. Es seien x Flaschen Mosel- und y Flaschen Rheinwein, so ist: $1{,}20x+2{,}60y=31{,}40$ oder (1) $6x+13y=157$.

Erste Auflösung.

$$x=-2y+26-\frac{y-1}{6}. \text{ Setze } \frac{y-1}{6}=n, \text{ so ist } y=1+6n.$$

Daher $x=24-13n$. Hier kann n nur die Werte 0 und 1 haben; für n=0 wird $x=24$, $y=1$; für n=1 wird $x=11$ und $y=7$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (1) $y=12-y_1$, so wird: (2) $6x-13y_1=1$.

Der Bruch $\frac{6}{13}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{2}, \frac{6}{13}$; daher haben wir: $6.2-13.1=-1$. Diese Gl. mit (-1) multipliziert, liefert: $6.(-2)-13.(-1)=1$; also $x=-2$; daher allgemein $x=-2+13m$, oder $m=n+1$ gesetzt: $x=11+13n$; daher $y=7-6$ nach Gl. (1).

Dritte Auflösung. Formen wir die Gl. (2) um, so wird: (3) $6x=13y_1+1$.

Verwandle den Bruch $\frac{1}{13}$ in eine Kettenreihe zur Basis 6, so entstehen die Elemente 0, 2, 4, 3, 4, 0, 5, 3, 1, 2, 1, 5 nebst den bezügl. Resten 6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1; daher ist:

$6.11=13.5+1$; also $x=11$, $y_1=5$, $y=12-5=7$, also allgemein $x=11+13n$, daher $y=7-6n$.

Vierte Auflösung. Aus der Gl. (1) erhalten wir die Kongruenzen:

$6x \equiv 157 \pmod{13}$; subtrahiere	
12.13 von 157:	$13y \equiv 157 \pmod{6}$
$6x \equiv 1 \pmod{13}$; mit 2 multipliziert, giebt:	$13y \equiv 157-26.6 \pmod{6}$
$12x \equiv 2 \pmod{13}$	$12y \equiv 0 \pmod{6}$
$13x \equiv 0 \pmod{13}$ aus dem mod	$y \equiv 1 \pmod{6}$
$x \equiv -2 \pmod{13}$	$y \equiv 1+6 \equiv 7 \pmod{6}$
$x \equiv -2+13 \equiv 11 \pmod{13}$.	

4. Kauft er x Schweine, y Ziegen und z Schafe, so ist:

(1) $x+y+z=124$; (2) $27x+19y+7\frac{1}{2}z=2400$.

Eliminiere z aus beiden Gl., so wird:

(3) $39x+23y=2940$.

Erste Auflösung.

$$y=\frac{2940-39x}{23}=\frac{2944-23y-4(4y+1)}{23}=128-x-\frac{4(4y+1)}{23};$$

$4y+1=23p$; $y=6p-\frac{p+1}{4}$; es sei endlich $p+1=4m$; so ist $p=4m-1$; $x=-6+23m$, oder $m=n+1$ gesetzt, giebt $x=17+23n$; daher $y=99-39n$ und $z=8+16n$. Aus dem Werte für y folgt, daß n nur 0, 1, 2 sein kann; daher $x=17$, $y=99$, $z=8$; oder $x=40$, $y=60$, $z=24$ oder $x=63$, $y=21$, $z=40$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (3) $x=47-x_1$ und $y=y_1+48$, so wird:

(4) $23y_1-39x_1=3$.

Der Bruch $\frac{23}{39}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{10}{17}, \frac{23}{39}$, daher ist: $23.17-39.10=1$. Diese Gl. mit 3 multipliziert, giebt: $23.51-39.30=3$; daher $y_1=51$; also

$y=51+48=99$: $x_1=30$, also $x=47-30=17$,

daher $z=8$ u. s. w.

Dritte Auflösung. Setze in Gl. (3) $x=x_1+47$ und $y=48-y_1$, so wird:

(5) $39x_1=23y_1+3$.

Der Bruch $\frac{3}{23}$ in eine Kettenreihe zur Basis 39 verwandelt, giebt die Elemente 5, 3, 15, 10, 6, 30, 20, 13, 22, 1, 27 nebst den bezügl. Resten 2, 9, 6, 4, 18, 12, 8, 13, 1, 16, 3; daher ist:

$39.16=23.27+3$; also $x_1=16$, $y_1=27$, daher $x=63$,

$y=21$ und $z=40$.

Die übrigen Werte sind in den Formeln $x=63-23n$, $y=21+39n$, $z=40-16n$ enthalten. Die Werte für die Unbekannten kommen hier in umgekehrter Ordnung gegen früher vor.

Vierte Auflösung. Lösen wir Gl. (3) vermittels der Kongruenzen auf, so ist:

(1) $39x \equiv 2940 \pmod{23}$

(2) $3 \,.\, 13x \equiv 3 \,.\, 980 \pmod{23}$. Unter Anwendung von §. 411 wird:

(3) $13x \equiv 980 \pmod{23}$. Von 980 subtrahiere 7.23, so ist:

(4) $13x \equiv 819 \pmod{23}$ nach §. 411 wird

(5) $x \equiv 63 \pmod{23}$ nach §. 413 II ist

(6) $x \equiv 40 \pmod{23}$ und endlich

(7) $x \equiv 17 \pmod{23}$.

Ferner ist:

(1) $23y \equiv 2940 \pmod{39}$

(2) $23y \equiv 15 \pmod{39}$ aus (1) nach §. 413 II.

(3) $69y \equiv 45 \pmod{39}$ aus (2) nach §. 408.

(4) $78y \equiv 0 \pmod{39}$ aus dem Modul.

(5) $9y \equiv -45 \pmod{39}$ aus (3) und (4) nach §. 407.

(6) $3y \equiv -15 \pmod{13}$ aus (5) nach §. 412 u. §. 414 Nr. 12.

(7) $y \equiv -5 \pmod{13}$ aus (6) nach §. 411.

(8) $y \equiv 21 \pmod{13}$ aus (7) nach §. 413. II.

(9) $y \equiv 60 \pmod{13}$ " " " " "

(10) $y \equiv 99 \pmod{13}$ " " " " "

Nun sind die Wurzeln der transformierten Kongruenz nach §. 414 Nr. 12 auch zugleich Wurzeln der gegebenen Kongruenz.

5. Man habe x Zwanzigfrankenstücke und y Dukaten nötig, alsdann ist:

$16{,}25x + 9{,}45y = 198{,}80$ oder (1) $325x + 189y = 3976$.

Erste Auflösung.

$$y = \frac{3976 - 378x + 53x}{189} = 21 - 2x + \frac{53x + 7}{189};$$

$$53x = 189p - 7;\; x = \frac{212p - 23p - 7}{53} = 4p - \frac{22p + 7}{53};$$

$$23p = 53q - 7;\; p = 2q + \frac{7(q-1)}{23};$$

$q = 1 + 23n$; $p = 2 + 53n$; $x = 7 + 189n$; $y = 9 - 325n$.

Aus dem Werte für y folgt, daß n nur 0 sein kann; weshalb $x = 7$ und $y = 9$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (1) $y = y_1 + 14$ und $x = 4 - x_1$, so wird:

(2) $189y_1 - 325x_1 = 30$.

Der Bruch $\frac{189}{325}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ $\frac{7}{12}$, $\frac{25}{43}$ $\frac{82}{141}$, $\frac{189}{325}$; daher:

$189 \,.\, 141 - 325 \,.\, 82 = -1$. Multipliziere diese Gl. mit (-30), so wird: $189 \,.\, (-4230) - 325 \,.\, (-2460) = 30$; daher $y_1 = -4230$, also $y = -4216$ oder allgemein $y = -4216 +$

325m. Setze hierin $m=n+13$, so wird $y=9+325n$ und daher $x=7-189n$.

Dritte Auflösung. Setze in Gl. (1) $y=21-y_1$, so wird: (3) $325x=189y_1+7$.

Verwandle den Bruch $\frac{7}{189}$ in eine Kettenreihe zur Basis 325, so entsteht das periodisch wiederkehrende Element 12 nebst dem Reste 7; daher ist:

$325.7=189.12+7$; also $x=7$, $y_1=12$, daher $y=21-12=9$.

Vierte Auflösung

$325x\equiv 3976 \pmod{189}$	$189y\equiv 3976 \pmod{325}$
$325x\equiv 3976-9.189 \pmod{189}$	$189y\equiv 3976-7.325 \pmod{325}$
$325x\equiv 2275 \pmod{189}$	$189y\equiv 1701 \pmod{325}$
$x\equiv 7 \pmod{189}$	$y\equiv 9 \pmod{325}$

also $x=7$ und $y=9$.

6. Es seien x Ochsen und y Pferde gekauft worden, so ist:
$198x=282y+36$ oder (1) $33x=47y+6$.

Erste Auflösung.

$$x=\frac{47y+6}{33}=y+\frac{2(7y+3)}{33}$$

$$7y=33p-3;\ y=4p+\frac{5p-3}{7};$$

$$5p=7r+3;\ p=r+\frac{2r+3}{5};$$

$$2r=5s-3;\ r=2s-1+\frac{s-1}{2};$$

$s=2n+1$; $r=5n+1$; $p=7n+2$; $y=9+33n$; $x=13+47n$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (1) $x=x_1+3$ und $y=y_1+2$, so wird:

(3) $33x_1-47y_1=1$.

Die Näherungsw. des Bruches $\frac{33}{47}$ sind: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{33}{47}$; daher ist:

$33.10-47.7=1$; also $x_1=10$, $y_1=7$; $x=10+3=13$, $y=7+2=9$, also allgemein:

$x=13+47n$, $y=9+33n$.

Dritte Auflösung. Verwandele in (1) den Bruch $\frac{6}{47}$ in eine Kettenreihe zur Basis 33, so entstehen die Elemente 4, 7, 0, 23, 5, 20, 11, 30, 29, 16, 4, 30, 6, 10, 17, 18, 8, 14, 1, 13, 9, 3, 16, 28, 2, 26, 22, 15, 14, 24, 18, 31, 19, 21, 25, 9 nebst den bezügl. Resten 10, 1, 33, 8, 29, 17, 44, 42, 23, 7, 43, 9, 15, 25, 26, 12, 20, 2, 19, 16, 5, 24, 40, 4, 38, 32, 22, 21, 35, 27, 45, 28, 31, 36, 13, 6. Daher ist:

$33.13=47.9+6$; also $x=13$, $y=9$ u. s. w.

Vierte Auflösung.

$33x\equiv 6 \pmod{47}$	$47y\equiv -6 \pmod{33}$

$11x \equiv 2 \pmod{47}$ $\quad 33y \equiv 0 \pmod{33}$
$11x \equiv 2+3.47 \pmod{47}$ $\quad 14y \equiv -6 \pmod{33}$
$11x \equiv 143 \pmod{47}$ $\quad 7y \equiv -3 \pmod{33}$
$x \equiv 13 \pmod{47}$ $\quad 7y \equiv -3-5.33 \equiv -168 \pmod{33}$
$y \equiv -24+33 \equiv 9 \pmod{33}$.

7. Heißen die Zähler der Brüche x und y, so ist:

$\frac{x}{9}+\frac{y}{13}=\frac{128}{117}$ oder: (1) $13x+9y=128$.

Erste Auflösung.

$$y=\frac{128-13x}{9}=14-x-\frac{2(2x-1)}{9};$$

$$2x=9p+1;\ x=4p+\frac{p+1}{2};\ p=2m-1;\ x=9m-4;$$

$$y=20-13m.$$

Hier kann m nur 1 sein; daher $x=5$; $y=7$; also ist;

$\frac{5}{9}+\frac{7}{13}=\frac{128}{117}$.

Zweite Auflösung. Setze in (1) $y=14-y_1$, so wird:

(2) $13x-9y_1=2$.

Der Bruch $\frac{13}{9}$ giebt die Näherungsw. 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{9}$; also ist: $13.2-9.3=-1$; multipliziere diese Gl. mit (-2), so wird: $13.(-4)-9.(-6)=+2$; also $x=-4$, $y_1=-6$, $y=20$; daher allgemein $x=9m-4$, $y=20-13m$.

Dritte Auflösung. Aus Gl. (2) folgt: $13x=9y_1+2$. Verwandle den Bruch $\frac{2}{9}$ in eine Kettenreihe zur Basis 13, so entstehen die Elemente 2, 11, 7 nebst den bezügl. Resten 8, 5, 2; also ist:

$13.5=9.7+2$; daher $x=5$, $y_1=7$, $y=14-7=7$.

Vierte Auflösung.

$13x \equiv 128 \pmod 9$ $\quad 9y \equiv 128 \pmod{13}$
$13x \equiv 128-7.9 \pmod 9$ $\quad 9y \equiv 128-5.13 \pmod{13}$
$13x \equiv 65 \pmod 9$ $\quad 9y \equiv 63 \pmod{13}$
$x \equiv 5 \pmod 9$ $\quad y \equiv 7 \pmod{13}$.

8. α) Heißen die Zähler der beiden Brüche x und y, so ist:

(1) $\frac{x}{6}-\frac{y}{5}=\frac{1}{15}$; (2) $\frac{y}{5}-\frac{x}{6}=\frac{1}{15}$; hieraus:

(3) $5x=6y+2$; (4) $6y=5x+2$.

Erste Auflösung. Verwandle in (3) den Bruch $\frac{2}{6}$ in eine Kettenreihe zur Basis 5, so entstehen die Elemente 1, 3 nebst den bezüglichen Resten 4, 2; daher ist:

$5.2=6.1+4$; $5.4=6.3+2$; also $x=4$, $y=3$.

Zweite Auflösung.

$5x \equiv 2 \pmod 6$ $\quad 6y \equiv -2 \pmod 5$
$6x \equiv 0 \pmod 6$ $\quad 5y \equiv 0 \pmod 5$
$x \equiv -2 \pmod 6$ $\quad y \equiv -2 \pmod 5$
$x \equiv 4 \pmod 6$ $\quad y \equiv 3 \pmod 5$.

Daher heißt der Bruch: $\frac{4}{6}p-\frac{3}{5}p=\frac{1}{15}p$.

Erste Auflösung. Verwandle in (4) den Bruch $\frac{2}{5}$ in eine Kettenreihe zur Basis 6, so entsteht das Element 2 nebst dem Reste 2; daher ist:

$$6 . 2 = 5 . 2 + 2; \text{ also } x = 2, \; y = 2.$$

Zweite Auflösung.

$6x \equiv 2 \pmod 5$	$5y \equiv -2 \pmod 6$
$5x \equiv 0 \pmod 5$	$6y \equiv 0 \pmod 6$
$x \equiv 2 \pmod 5$	$y \equiv 2 \pmod 6$.

Der Bruch heißt also: $\frac{2}{5}p - \frac{2}{6}p = \frac{1}{15}p$.

β) Heißen auch hier die Zähler der beiden Brüche x und y, so ist:

$$(5) \; \frac{x}{3} - \frac{y}{17} = \frac{1}{51}; \; (6) \; \frac{y}{17} - \frac{x}{3} = \frac{1}{51}; \text{ hieraus:}$$

$$(7) \; 17x = 3y + 1; \; (8) \; 3y = 17x + 1.$$

Erste Auflösung. Verwandle in (7) den Bruch $\frac{1}{3}$ in eine Kettenreihe zur Basis 17, so entstehen die Elemente 5, 11 nebst den bezügl. Resten 2, 1; daher ist:

$$17 . 2 = 3 . 11 + 1; \text{ also } x = 2, \; y = 11.$$

Zweite Auflösung.

$17x \equiv 1 \pmod 3$	$3y \equiv -1 \pmod{17}$
$18x \equiv 0 \pmod 3$	$3y \equiv -1 + 2 . 17 \pmod{17}$
$x \equiv -1 \pmod 3$	$3y \equiv 33 \pmod{17}$
$x \equiv 2 \pmod 3$	$y \equiv 11 \pmod{17}$.

Der Bruch heißt also: $\frac{2}{3}p - \frac{11}{17}p = \frac{1}{51}p$.

Erste Auflösung. Verwandle in (8) den Bruch $\frac{1}{17}$ zur Basis 3, so entstehen die Elemente 0, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1 nebst den bezügl. Resten 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1; daher:

$$3 . 6 = 17 . 1 + 1; \text{ mithin } x = 1, \; y = 6.$$

Zweite Auflösung.

$17x \equiv -1 \pmod 3$	$3y \equiv 1 \pmod{17}$
$18x \equiv 0 \pmod 3$	$3y \equiv 1 + 17 \equiv 18 \pmod{17}$
$x \equiv 1 \pmod 3$	$y \equiv 6 \pmod{17}$.

Der Bruch heißt also: $\frac{6}{17}p - \frac{1}{3}p = \frac{1}{51}p$.

γ) Sind die Zähler der beiden Brüche x und y, so ist:

$$(9) \; \frac{x}{5} - \frac{y}{17} = \frac{1}{85}; \; (10) \; \frac{y}{17} - \frac{x}{5} = \frac{1}{85}; \text{ hieraus}$$

$$(11) \; 17x = 5y + 1; \; (12) \; 5y = 17x + 1.$$

Erste Auflösung. Verwandle $\frac{1}{5}$ in eine Kettenreihe zur Basis 17, so entstehen die Elemente 3, 6, 13, 10 nebst den bezügl. Resten 2, 4, 3, 1; daher ist:

$$17 . 3 = 5 . 10 + 1; \text{ folglich } x = 3, \; y = 10.$$

Zweite Auflösung.

$17x \equiv 1 \pmod 5$	$5y \equiv -1 \pmod{17}$
$17x \equiv 1 + 10 . 5 \pmod 5$	$5y \equiv -1 - 2 . 17 \equiv -35 \pmod{17}$

$17x \equiv 51 \pmod{5}$ $\quad y \equiv -7 \pmod{17}$
$x \equiv 3 \pmod{5}$ $\quad y \equiv -7+17 \equiv 10 \pmod{17}$.
Daher ist: $\frac{3}{5}p - \frac{10}{17}p = \frac{1}{85}p$.

Erste Auflösung. Verwandeln wir in (12) den Bruch $\frac{1}{17}$ in eine Kettenreihe zur Basis 5, so entstehen die Elemente 0, 1, 2, 1, 3, 4, 0, 2, 4, 3, 2, 3, 1, 0, 4, 2 nebst den bezügl. Resten 5, 8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1; es ist also:

$$5 . 7 = 17 . 2 + 1; \text{ daher } x = 2, y = 7.$$

Zweite Auflösung.

$17x \equiv -1 \pmod{5}$ $\quad 5y \equiv 1 \pmod{17}$
$15x \equiv 0 \pmod{5}$ $\quad 5y \equiv 1 + 2 . 17 \pmod{17}$
$2x \equiv -1+5 \equiv 4 \pmod{5}$ $\quad 5y \equiv 35 \pmod{17}$
$x \equiv 2 \pmod{5}$ $\quad y \equiv 7 \pmod{17}$.

Der Bruch heißt also: $\frac{7}{17}p - \frac{2}{5}p = \frac{1}{85}p$.

δ) Da $255 = 3 . 5 . 17$ ist, so haben wir folgende Gl. aufzulösen:

$$(13)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} - \frac{z}{17} = \frac{1}{255};\ (14)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{17} = \frac{1}{255};$$

$$(15)\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{17} = \frac{1}{255}.$$ Hieraus erhalten wir:

$$(16)\ 85x + 51y - 15z = 1;\ (17)\ 85x - 51y + 15z = 1;$$
$$(18)\ -85x + 51y + 15z = 1.$$

Setzen wir in (16) $y = 1$, in (17) $x = 1$ und in (18) $y = 1$, so entstehen folgende Gl.:

(19) $3z = 17x + 10$; (20) $17y = 5z + 28$; (21) $17x = 3z + 10$.

Auflösung der Gl. (19):

Erste Auflösung. In (19) giebt der Bruch $\frac{10}{17}$ zur Basis 3 die Elemente 1, 2, 0, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 1 nebst den bezüglichen Resten 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1, 3, 9, 10; daher ist:

$$3 . 9 = 17 . 1 + 10; \text{ folglich } z = 9, x = 1.$$

Zweite Auflösung.

$3z \equiv 10 \pmod{17}$ $\quad 17x \equiv -10 \pmod{3}$
$3z \equiv 10 + 17 \pmod{17}$ $\quad 17x \equiv -10 + 9 . 3 \pmod{3}$
$3z \equiv 27 \pmod{17}$ $\quad 17x \equiv 17 \pmod{3}$
$z \equiv 9 \pmod{17}$ $\quad x \equiv 1 \pmod{3}$.

Daher heißt der Bruch: $\frac{1}{3}p + \frac{1}{5}p - \frac{9}{17}p = \frac{1}{255}p$.

Auflösung der Gl. (20). Setze in (20) $z = z_1 - 5$, so wird:

$$17y = 5z_1 + 3.$$

Erste Auflösung. Der Bruch $\frac{3}{5}$ liefert zur Basis 17 die Elemente 10, 3, 6, 13 nebst den bezügl. Resten 1, 2, 4, 3; daher ist:

$$17 . 4 = 5 . 13 + 3; \text{ also } y = 4, z_1 = 13, z = 13 - 5 = 8.$$

Zweite Auflösung.

$17y \equiv 28 \pmod 5$ $\qquad$ $5z \equiv -28 \pmod{17}$

$17y \equiv 28+8 \,.\, 5 \pmod 5$ $\qquad$ $5z \equiv -28+4 \,.\, 17 \pmod{17}$

$17y \equiv 68 \pmod 5$ $\qquad$ $5z \equiv 40 \pmod{17}$

$y \equiv 4 \pmod 5$ $\qquad$ $z \equiv 8 \pmod{17}$.

Daher ist: $\frac{1}{3}p - \frac{4}{5}p + \frac{8}{17}p = \frac{1}{255}\,p$.

Auflösung der Gl. (21). Setze hier $z = z_1 - 3$, so wird:

$$17x = 3z_1 + 1.$$

Erste Auflösung. Verwandele den Bruch $\frac{1}{3}$ zur Basis 17 in eine Kettenreihe, so entstehen die beiden Elemente 5, 11 nebst den bezügl. Resten 2, 1; also ist:

$17 \,.\, 2 = 3 \,.\, 11 + 1$; daher $x = 2$, $z_1 = 11$, also $z = 8$.

Zweite Auflösung.

$17x \equiv 10 \pmod 3$ $\qquad$ $3z \equiv -10 \pmod{17}$

$17x \equiv 10+8 \,.\, 3 \pmod 3$ $\qquad$ $3z \equiv -10+2 \,.\, 17 \pmod{17}$

$17x \equiv 34 \pmod 3$ $\qquad$ $3z \equiv 24 \pmod{17}$

$x \equiv 2 \pmod 3$ $\qquad$ $z \equiv 8 \pmod{17}$.

Der Bruch heißt also: $-\frac{2}{3}p + \frac{1}{5}p + \frac{8}{17}p = \frac{1}{255}p$.

9. In der dreizifferigen Zahl seien x Hunderter, y Zehner und z Einer. Nach der Angabe erhalten wir:

(1) $x = \frac{1}{8}(10y+z)$; (2) $z = \frac{1}{8}(10x+y)$.

Stellt man aus diesen beiden Gl. die Werte für z einander gleich, so erhält man $x = 3n$, $y = 2n$ und daher $z = 4n$. Aus dem Werte für z folgt, daß n nur 1 und 2 sein kann, da die Ziffer der Einer keine Zehner enthalten darf; daher kann es nur die beiden Zahlen 324 und 648 geben, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

10. Die eine Bäuerin habe x Eier und die andere y Eier, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$8x - 1 = 7y + 1 \text{ oder } 8x = 7y + 2.$$

Erste Auflösung. Der Bruch $\frac{2}{7}$ giebt, zur Basis 8, in eine Kettenreihe verwandelt, das periodisch wiederkehrende Element 2 nebst dem Reste 2; daher ist:

$8 \,.\, 2 = 7 \,.\, 2 + 2$; folglich $x = 2$, $y = 2$.

Zweite Auflösung.

$8x \equiv 2 \pmod 7$ $\qquad$ $7y \equiv -2 \pmod 8$

$7x \equiv 0 \pmod 7$ $\qquad$ $8y \equiv 0 \pmod 8$

$x \equiv 2 \pmod 7$ $\qquad$ $y \equiv 2 \pmod 8$

Daher allgemein $x = 2 + 7n$, $y = 2 + 8n$.

11. Der Schuldner habe x Zwanzigfrankenstücke zu bezahlen und der Kaufmann y Dukaten zurückzugeben, so ist:

$$16{,}20x - 9{,}40y = 131{,}20 \text{ oder } 47y = 81x - 656.$$

Erste Auflösung.

$$y = \frac{94x - 13x - 656}{47} = 2x - 13 - \frac{13x + 45}{47};$$

$$x = \frac{47p - 45}{13} = 3p - 3 + \frac{2(4p - 3)}{13};$$

$p=\frac{13r+3}{4}=3r+\frac{r+3}{4}$; also $r=4m-3$, $p=13m-9$,
$x=47m-36$ oder für $m=n+1$ gesetzt,
$x=11+47n$, $y=5+81n$; daher $x=11$, $y=5$ für $n=0$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. $81x=47y+656$ für $y=y_1-14$, so wird:

$$81x-47y_1=-2.$$

Der Bruch $\frac{81}{47}$ giebt die Näherungswerte 1, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{50}{29}$, $\frac{81}{47}$; daher ist:
$81.29-47.50=-1$; diese Gl. mit 2 multipliziert, giebt:
$81.58-47.100=-2$; daher $x=58$, $y_1=100$, $y=86$;
allgemein $x=58+47m$, $y=86+81m$
oder für $m=n-1$ gesetzt, $x=11+47n$, $y=5+81n$.

Dritte Auflösung.

$81x\equiv 656 \pmod{47}$	$47y\equiv -656 \pmod{81}$
$81x\equiv 656+5.47 \pmod{47}$	$81y\equiv 0 \pmod{81}$
$81x\equiv 891 \pmod{47}$	$17y\equiv 328 \pmod{81}$
$x\equiv 11 \pmod{47}$	$17y\equiv 328-3.81\equiv 85 \pmod{81}$
	$y\equiv 5 \pmod{81}$.

12. Macht das erste Rad x, das zweite y Umdrehungen, so ist:

$$17x=13y;\ \text{folglich } x=13n \text{ und } y=17n.$$

13. Wenn der erste Zahn des ersten Rades in die achte Zahnlücke des zweiten Rades eingreift, so habe das erste x und das zweite y Umdrehungen gemacht; daher ist;

$$35x=47y+7.$$

Erste Auflösung. $x=\frac{47y+7}{35}=y+\frac{12y+7}{35}$;

$$y=\frac{35p-7}{12}=\frac{36p-p-7}{12}=3p-\frac{p+7}{12};$$

$p=12m-7$; $y=35m-21$ oder $m=n+1$ gesetzt:
$y=14+35n$ und $x=19+47n$.

Zweite Auflösung. Der Bruch $\frac{35}{47}$ in der Gl. $35x-47y=7$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{35}{47}$; daher ist:
$35.4-47.3=-1$; diese Gl. mit (-7) multipliziert, giebt:
$35.(-28)-47.(-21)=+7$; also $x=-28$, $y=-21$;
allgemein $x=-28+47m$, $y=-21+35m$
oder für $m=n+1$ gesetzt, $x=19+47n$, $y=14+35n$.

Dritte Auflösung. Verwandle $\frac{7}{47}$ in eine Kettenreihe zur Basis 35, so entstehen die Elemente 5, 7, 15, 22, 11, 32, 0, 26, 2, 8, 6, 24, 20, 3, 25, 12, 23, 2, 34, 8, 32, 26, 5, 10, 14, 31, 9, 23, 29, 1, 17, 4, 16, 13, 14 nebst den bezügl. Resten 10, 21, 30, 16, 43, 1, 35, 3, 11, 9, 33, 27, 5, 34, 17, 31, 4, 46, 12, 44, 36, 38, 14, 20, 42, 13, 32, 39, 2, 23, 6, 22, 18, 19, 7. Es ist also:
$35.19=47.14+7$; also $x=19$, $y=14$ u. s. w.

Vierte Auflösung.

$35x \equiv 7 \pmod{47}$	$47y \equiv -7 \pmod{35}$
$5x \equiv 1 \pmod{47}$	$35y \equiv 0 \pmod{35}$
$5x \equiv 1+2 \,.\, 47 \pmod{47}$	$12y \equiv -7+7 \,.\, 35 \equiv 168 \pmod{35}$
$x \equiv 19 \pmod{47}$	$y \equiv 14 \pmod{35}$.

14. Hat das eine Rad 27 Zähne und das andere 35 Zahnlücken, so wird nach und nach jeder Zahn des ersten in jede Zahnlücke des zweiten eingreifen. Bei 35 Umdrehungen des ersten Rades hat jeder Zahn in jede Zahnlücke des zweiten eingegriffen und mit der 36. Umdrehung beginnt die Operation von neuem. Hat dagegen das erste Rad 28 Zähne und das andere 35 Zahnlücken, so wird schon nach der 5. Umdrehung des einen Rades der erste Zahn in die erste Zahnlücke des andern eingreifen und die nämliche Operation sich jedesmal nach 5 Umdrehungen des ersten Rades wiederholen; es wird folglich nicht *jeder* Zahn in jede Zahnlücke eingreifen. Soll daher bei zwei Rädern nach und nach jeder Zahn des einen in jede Zahnlücke des andern eingreifen, so müssen die beiden Zahlen, wodurch die Zähne und Zahnlücken bestimmt werden, relative Primzahlen sein. Da nun 37 und 25 relative Primzahlen sind, so findet auch die Behauptung bei diesen Rädern statt; hingegen sind 28 und 35 keine relative Primzahlen, weshalb auch das allmählige Eingreifen eins jeden Zahnes in jede Zahnlücke unmöglich stattfinden kann.

15. Die beiden Zahlen haben die Form $4x+1$ und $5y+3$; daher ist: $4x+1=5y+3$ oder $4x=5y+2$.

Erste Auflösung. $x=y+\frac{y+2}{4}$; $y+2=4m$; $y=4m-2$ oder $m=n+1$ gesetzt: $y=2+4n$, $x=3+5n$. Setze den Wert für x in $4x+1$, so erhält man für die gesuchte Zahl die Formel $13+20n$, mithin heißt dieselbe 13, 33, 53, 73 u. s. w.

Zweite Auflösung. Der Bruch $\frac{4}{5}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{5}$; daher ist:
$4 \,.\, 1-5 \,.\, 1=-1$. Diese Gl. mit (-2) multipliziert, giebt: $4 \,.\, (-2)-5 \,.\, (-2)=2$; $x=-2$, $y=-2$, oder $x=-2+5m$, $y=-2+4m$, für $m=n+1$ ist $x=3+5n$, $y=2+4n$.

Dritte Auflösung. Der Bruch $\frac{2}{5}$, in eine Kettenreihe, zur Basis 4 verwandelt, giebt die Elemente 1, 2 nebst den Resten 3, 2; daher ist: $4 \,.\, 3=5 \,.\, 2+2$; also $x=3$, $y=2$ u. s. w.

Vierte Auflösung.

$4x \equiv 2 \pmod{5}$	$5y \equiv -2 \pmod{4}$
$4x \equiv 12 \pmod{5}$	$5y \equiv 10 \pmod{4}$
$x \equiv 3 \pmod{5}$	$y \equiv 2 \pmod{4}$.

16. Hier hat die gesuchte Zahl sowohl die Form $37x+11$ als auch $10y$. Es ist also: $10y=37x+11$.

Erste Auflösung.

$$y=\frac{40x-3x+20-9}{10}=4x+2-\frac{3(x+3)}{10};$$

$x+3=10m$; $x=-3+10m$ oder $m=n+1$ gesetzt,

$x=7+10n$, $y=27+37n$.

Die gesuchte Zahl hat also die Form

$37(7+10n)+11=270+370n$.

Zweite Auflösung. Der Bruch $\frac{11}{37}$ in eine Kettenreihe zur Basis 10 verwandelt, giebt die Elemente 2, 9, 7 nebst den bezügl. Resten 36, 27, 11. Es ist also:

$10.27=37.7+11$; daher $x=7$, $y=27$ u. s. w.

Dritte Auflösung. Setze $y=y_1+1$, so wird

$10y_1-37x=1$.

Der Bruch $\frac{10}{37}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{10}{37}$; daher ist: $10.11-37.3=-1$. Diese Gl. mit (-1) multipliziert, giebt: $10.(-11)-37.(-3)=+1$; daher $x=-3$, $y_1=-11$, $y=-10$; allgemein $x=-3+10m$, $y=-10+37m$ oder $x=7+10n$, $y=27+37n$, wenn $m=n+1$ ist.

Vierte Auflösung.

$37x\equiv-11 \pmod{10}$	$10y\equiv11 \pmod{37}$
$40x\equiv0 \pmod{10}$	$10y\equiv11-3.37 \pmod{37}$
$3x\equiv11 \pmod{10}$	$10y\equiv-100 \pmod{37}$
$3x\equiv21 \pmod{10}$	$y\equiv-10 \pmod{37}$
$x\equiv7 \pmod{10}$	$y\equiv27 \pmod{37}$.

17. Die gesuchte Zahl hat die Form $15x+2$ und auch $7y+5$; es ist daher:

$15x+2=7y+5$ oder $15x=7y+3$.

Erste Auflösung. Verwandle den Bruch $\frac{3}{7}$ in eine Kettenreihe zur Basis 15, so entsteht das periodisch wiederkehrende Element 6 nebst dem Reste 3; daher ist:

$15.3=7.6+3$; also ist $x=3$ und $y=6$.

Zweite Auflösung.

$15x\equiv3 \pmod 7$	$7y\equiv-3 \pmod{15}$
$14x\equiv0 \pmod 7$	$14y\equiv-6 \pmod{15}$
$x\equiv3 \pmod 7$	$15y\equiv0 \pmod{15}$
	$y\equiv6 \pmod{15}$,

also allgemein $x=3+7n$ und $y=6+15n$; daher heißt die gesuchte Zahl $15(3+7n)+2=47+105n$.

18. Die gesuchte Zahl hat die Form $4x+1$, $10y+7$ und $24z+9$. Daher ist zunächst:

$4x+1=10y+7$ oder $2x=5y+3$.

Erste Auflösung. Der Bruch $\frac{3}{5}$ in eine Kettenreihe zur Basis 2 verwandelt, giebt die Elemente 1, 0, 0, 1 nebst den bezüglichen Resten 1, 2, 4, 3; daher ist:

$2.4=5.1+3$; also $x=4$, $y=1$.

Zweite Auflösung.

$2x \equiv 3 \pmod 5$ $\quad$ $5y \equiv -3 \pmod 2$

$2x \equiv 8 \pmod 5$ $\quad$ $5y \equiv 5 \pmod 2$

$x \equiv 4 \pmod 5$ $\quad$ $y \equiv 1 \pmod 2$.

Daher allgemein: $x=4+5m$, $y=1+2m$. Setze den Wert für x in $4x+1$, so erhält man $17+20m$; daher ist ferner: $24z+9=17+20m$ oder $6z=5m+2$.

Erste Auflösung. Der in eine Kettenreihe zur Basis 6 verwandelte Bruch $\frac{2}{5}$ giebt das periodisch wiederkehrende Element 2 nebst dem Reste 2; daher ist:

$$6.2=5.2+2; \text{ also } z=2,\ m=2.$$

Zweite Auflösung.

$6z \equiv 2 \pmod 5$ $\quad$ $5m \equiv -2 \pmod 6$

$5z \equiv 0 \pmod 5$ $\quad$ $6m \equiv 0 \pmod 6$

$z \equiv 2 \pmod 5$ $\quad$ $m \equiv 2 \pmod 6$.

Es ist also allgemein $z=2+5n$, $m=2+6n$. Setze den Wert für m in $17+20m$, so erhält man für die gesuchte Zahl die Formel $57+120n$.

19. Die gesuchte Zahl hat die Form $21x+1$, $5y+4$ und $11z+9$. Es ist also zunächst:

$$21x+1=5y+4 \text{ oder } 21x=5y+3.$$

Erste Auflösung. Verwandle den Bruch $\frac{3}{5}$ in eine Kettenreihe zur Basis 21, so entsteht das periodisch wiederkehrende Element 12 nebst dem Reste 3; daher ist:

$$21.3=5.12+3; \text{ also } x=3,\ y=12.$$

Zweite Auflösung.

$21x \equiv 3 \pmod 5$ $\quad$ $5y \equiv -3 \pmod{21}$

$20x \equiv 0 \pmod 5$ $\quad$ $20y \equiv -12 \pmod{21}$

$x \equiv 3 \pmod 5$ $\quad$ $21y \equiv 0 \pmod{21}$

$y \equiv 12 \pmod{21}$.

Daher allgemein: $x=3+5m$, $y=12+21m$. Demnach hat die gesuchte Zahl die Form: $21(3+5m)+1=64+105m$. Es ist daher ferner: $11z+9=64+105m$ oder $11z=105m+55$.

Erste Auflösung. Verwandle den Bruch $\frac{55}{105}$ in eine Kettenreihe zur Basis 11, so entstehen die Elemente 5, 8, 4, 2, 1, 0 nebst den bezügl. Resten 80, 40, 20, 10, 5, 55; daher ist: $11.5=105.0+55$; also $z=5$, $m=0$.

Zweite Auflösung. Der Bruch $\frac{11}{105}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{2}{19}, \frac{11}{105}$; daher ist: $11.19-105.2=-1$. Multipliziere diese Gl. mit (-55), so wird: $11.(-1045)-105.(-110)=55$, daher $z=-1045+105p$, $m=-110+11p$. Setze hierin $p=n+10$, so wird $z=5+105n$, $m=0+11n$ oder $m=11n$.

Dritte Auflösung.

$11z \equiv 55 \pmod{105}$ $\quad$ $105m \equiv -55 \pmod{11}$

$z \equiv 5 \pmod{105}$ $\quad$ $21m \equiv -11 \pmod{11}$

$m \equiv 0 \pmod{11}$,

also $z=5+105n$; $m=0+11n$.
Die gesuchte Zahl hat also die Form
$105 \cdot 11n+64=64+1155n$.

20. Die gesuchte Anzahl der Bäume muß die Form $37x+8$ und $43y+11$ haben. Demnach ist:
$$37x+8=43y+11 \text{ oder } 37x=43y+3.$$
Erste Auflösung.
$$37x=43y+3;\ x=y+\frac{3(2y+1)}{37};$$
$$2y+1=37p;\ y=18p+\frac{p-1}{2};\ \text{daher } p=1+2n;$$
$$y=18+37n,\ x=21+43n.$$
Zweite Auflösung. Verwandele $\frac{3}{43}$ in eine Kettenreihe zur Basis 37, so entstehen die Elemente 2, 21, 18, 34, 15, 18, nebst den bezüglichen Resten 25, 22, 40, 18, 21, 3; daher ist:
$$37 \cdot 21=43 \cdot 18+3; \text{ also } x=21,\ y=18.$$
Dritte Auflösung. Der Bruch $\frac{37}{43}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{37}{43}$; daher ist: $37 \cdot 7-43 \cdot 6=1$. Multipliziere diese Gl. mit 3, so wird:
$$37 \cdot 21-43 \cdot 18=3; \text{ also } x=21,\ y=18.$$
Vierte Auflösung.

$37x\equiv3 \pmod{43}$	$43y\equiv-3 \pmod{37}$
$43x\equiv0 \pmod{43}$	$37y\equiv0 \pmod{37}$
$6x\equiv-3 \pmod{43}$	$6y\equiv-3 \pmod{37}$
$36x\equiv-18 \pmod{43}$	$36y\equiv-18 \pmod{37}$.
$x\equiv21 \pmod{43}$	$y\equiv18 \pmod{37}$.

Demnach ist die Anzahl der Bäume, da sie weniger als 1000 betragen: $37 \cdot 21+8=785$.

21. Die gesuchte Zahl hat die Form $28x+20$, $19y+12$, $15z+10$. Es ist daher:
$$19y+12=28x+20 \text{ oder } (1)\ 19y=28x+8.$$
Erste Auflösung. Setze $y=y_1-1$ und $x=x_1-1$, so wird: $(2)\ 19y_1-28x_1=-1$.
Der Bruch $\frac{19}{28}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{19}{28}$; daher ist: $19 \cdot 3-28 \cdot 2=1$. Multipliziere diese Gl. mit (-1), so wird: $19 \cdot (-3)-28 \cdot (-2)=-1$; daher $x_1=-2$, $x=-3$, $y_1=-3$; $y=-4$; also allgemein $x=-3+19p$ und $y=-4+28p$; setze $p=m+1$, so wird $x=16+19m$, $y=24+28m$.

Zweite Auflösung. Verwandele in (1) den Bruch $\frac{8}{28}$ in eine Kettenreihe zur Basis 19, so entstehen die Elemente 5, 8, 2, 13, 10, 16 nebst den bezüglichen Resten 12, 4, 20, 16, 24, 8. Daher ist:
$$19 \cdot 24=28 \cdot 16+8; \text{ also } x=16,\ y=24.$$

Dritte Auflösung.

$28x \equiv -8 \pmod{19}$	$19y \equiv 8 \pmod{28}$
$7x \equiv -2 \pmod{19}$	$28y \equiv 0 \pmod{28}$
$7x \equiv -2+6\,.\,19 \pmod{19}$	$9y \equiv -8 \pmod{28}$
$7x \equiv 112 \pmod{19}$	$27y \equiv -24 \pmod{28}$
$x \equiv 16 \pmod{19}$	$y \equiv 24 \pmod{28}$.

Setze den Wert für $x=16+19m$ in $28x+20$, so erhalten wir:

$$28(16+19m)+20=468+532m$$

Demnach ist ferner:

$15z+10=532m+468$ oder (3) $15z=532m+458$.

Erste Auflösung.

$$z=\frac{532m+465-7}{15}=35m+31+\frac{7(m-1)}{15};$$

daher $m=1+15n$, $z=66+532n$.

Zweite Auflösung. Wird der Bruch $\frac{458}{532}$ in eine Kettenreihe zur Basis 15 verwandelt, so erhalten wir die Elemente 12, 13, 10, 8, 2, 9, 11, 5, 0, 4, 3, 6, 8, 14, 7, 5, 12, 1 nebst den bezüglichen Resten 486, 374, 290, 94, 346, 402, 178, 10, 150, 122, 234, 318, 514, 262, 206, 430, 66, 458. Daher ist:

$15\,.\,66=532\,.\,1+458$; also $z=66$, $m=1$.

Dritte Auflösung.

$15z \equiv 458 \pmod{532}$	$532m \equiv -458 \pmod{15}$
$15z \equiv 458+532 \pmod{532}$	$525m \equiv 0 \pmod{15}$
$15z \equiv 990 \pmod{532}$	$7m \equiv -458+31\,.\,15 \pmod{15}$
$z \equiv 66 \pmod{532}$	$7m \equiv 7 \pmod{15}$
	$m \equiv 1 \pmod{15}$.

Die Form der gesuchten Zahl ist also:

$$532(1+15n)+468=1000+7980n.$$

22. Die verlangte Jahreszahl muß die Form $19x+13$, $28y+17$ und $15z+7$ haben. Es ist daher:

$19x+13=28y+17$ oder (1) $19x=28y+4$.

Erste Auflösung. Bei der Verwandlung des Bruches $\frac{4}{28}$ in eine Kettenreihe zur Basis 19 entstehen die Elemente 2, 13, 10, 16, 5, 8 nebst den bezügl. Resten 20, 16, 24, 8, 12, 4; daher ist:

$19\,.\,12=28\,.\,8+4$; also $x=12$, $y=8$.

Zweite Auflösung.

$19x \equiv 4 \pmod{28}$	$28y \equiv -4 \pmod{19}$
$19x \equiv 4+8\,.\,28 \pmod{28}$	$7y \equiv -1 \pmod{19}$
$19x \equiv 228 \pmod{28}$	$7y \equiv -1+3\,.\,19 \pmod{19}$
$x \equiv 12 \pmod{28.}$	$y \equiv 8 \pmod{19}$

Daher ist allgemein $x=12+28m$, $y=8+19m$; folglich

$$19x+13=19(12+28m)+13=241+532m.$$

Es ist also ferner:

$$15z+7=532m+241 \text{ oder } 15z=532m+234.$$

Erste Auflösung.

$$z=\frac{532m+234}{15}=35m+15+\frac{7m+9}{15};$$

$$m=\frac{15p-9}{7}=2p-1+\frac{p-2}{7};$$

$$p=2+7n;\ m=3+15n,\ z=122+532n.$$

Zweite Auflösung.

$15z\equiv 234 \pmod{532}$	$532m\equiv -234 \pmod{15}$
$5z\equiv 78 \pmod{532}$	$266m\equiv -117+15 \pmod{15}$
$5z\equiv 78+532 \pmod{532}$	$7.19m\equiv -51+2.15 \pmod{15}$
$5z\equiv 610 \pmod{532}$	$19m\equiv -3+4.15 \pmod{15}$
$z\equiv 122 \pmod{532}$	$19m\equiv 57 \pmod{15}$
	$m\equiv 3 \pmod{15}$,

folglich $z=122+532n$, $m=3+15n$. Daher hat die Jahreszahl die Form:

$$532(3+15n)+241=1837+7980n.$$

23. Die gesuchte Jahreszahl hat die Form $19x+18$, $28y+19$ und $15z+12$. Es ist daher:

$$19x+18=28y+19 \text{ oder (1) } 19x-28y=1.$$

Erste Auflösung. Der Bruch $\frac{19}{28}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{19}{28}$; daher ist:

$$19.3-28.2=1; \text{ also } x=3,\ y=2;$$
$$\text{allgemein } x=3+28m,\ y=2+19m.$$

Zweite Auflösung. Der zur Basis 19 in eine Kettenreihe verwandelte Bruch $\frac{1}{28}$ giebt die Elemente 0, 12, 16, 18, 6, 2 nebst den bezüglichen Resten 19, 25, 27, 9, 3, 1; daher ist:

$$19.3=28.2+1; \text{ also } x=3,\ y=2.$$

Dritte Auflösung.

$19x\equiv 1 \pmod{28}$	$28y\equiv -1 \pmod{19}$
$28x\equiv 0 \pmod{28}$	$19y\equiv 0 \pmod{19}$
$9x\equiv -1 \pmod{28}$	$9y\equiv -1 \pmod{19}$
$9x\equiv 27 \pmod{28}$	$9y\equiv 18 \pmod{19}$
$x\equiv 3 \pmod{28}$	$y\equiv 2 \pmod{19}$

Ferner ist: $15z+12=28\,(2+19m)+19$ oder

$$15z-532m=63.$$

Erste Auflösung. Setze in dieser Gl. $z=z_1+4$, so wird: $15z_1-532m=3$.

Der Bruch $\frac{15}{532}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{35}$, $\frac{2}{71}$, $\frac{15}{532}$; daher ist:

$15.71-532.2=1$. Multipliziere diese Gl. mit 3, so wird: $15.213-532.6=3$, also $z_1=213$, $z=217$ und $m=6$.

Zweite Auflösung.

$15z \equiv 63 \pmod{532}$ $\quad$ $532m \equiv -63 \pmod{15}$
$5z \equiv 21 \pmod{532}$ $\quad$ $525m \equiv 0 \pmod{15}$
$5z \equiv 21 + 2 . 532 \pmod{532}$ $\quad$ $7m \equiv -63 \pmod{15}$
$5z \equiv 1085 \pmod{532}$ $\quad$ $m \equiv -9 \pmod{15}$
$z \equiv 217 \pmod{532}$ $\quad$ $m \equiv 6 \pmod{15}$.

Daher allgemein: $z=217+532n$, $m=6+15n$. Demnach hat die Jahreszahl die Form:

$$532(6+15n)+75=3267+7980n.$$

Setze hierin $n=0$ und $n=-1$, so ist das gesuchte Jahr 3267 nach Christi Geburt und astronomisch das Jahr 4713 oder chronologisch 4714 vor Christi Geburt, weil das Jahr 0 chronologisch nicht gezählt wird.

24. Heißen die Zahlen x, y, z, so ist:

$$(1)\ x+y+z=17;\ (2)\ 5x+4y+7z=80.$$

Eliminieren wir aus beiden Gl. z, so haben wir:

$$(3)\ 2x+3y=39.$$

Erste Auflösung. Setze in (3) $x=19-x_1$, so wird:

$$(4)\ 3y=2x_1+1.$$

Verwandle $\frac{1}{2}$ in eine Kettenreihe zur Basis 3, so entsteht das periodisch wiederkehrende Element 1 nebst dem Reste 1. Daher ist: $3.1=2.1+1$; also $y=1$, $x_1=1$, $x=18$, daher allgemein $y=1+2n$ und $x=18-3n$. Durch Einsetzen der Werte für x und y in (1) wird $z=n-2$. Aus dem Werte für z folgt, daß n nicht kleiner als 3 und aus dem für x, daß n nicht größer als 5 angenommen werden darf. Für $n=3$ wird $x=9$, $y=7$, $z=1$; für $n=4$ wird $x=6$, $y=9$, $z=2$; für $n=5$ wird $x=3$, $y=11$, $z=3$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (3) $x=x_1+2$, $y=12-y_1$, so wird:

$$(5)\ 2x_1-3y_1=-1.$$

Der Bruch $\frac{2}{3}$ giebt die Näherungsw. $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$; daher ist: $2.1-3.1=-1$; daher $x_1=1$, $x=3$, $y_1=1$, $y=11$, also hiernach erhält man allgemein: $x=3+3n$, $y=11-2n$, $z=3-n$. Setzt man hierin $n=0, 1, 2$, so erhält man für die Unbekannten dieselben Werte, aber in umgekehrter Ordnung.

25. Die Bäuerin habe x Gänse, y Hühner, z Enten und t Tauben, so ist:

$$(1)\ x+y+z+t=76.$$

$$(2)\ 3x+1{,}575y+1{,}05z+0{,}60t=106{,}05.$$

Eliminiere t aus (1) und (2), so wird:

$$(3)\ 32x+13y+6z=806.$$

Setze in (3) $x=m$, welches eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist:

$$6z=806-13y-32m;\ \text{also}$$

$$z=134-2y-5m-\frac{y-2+2m}{6};\ \text{hieraus folgt}$$

$y=6n+2-2m$; $z=130-(m+13n)$ und $t=7n+2m-56$.

Aus den Werten für die Unbekannten geht hervor, daß m und n so genommen werden müssen, daß $m+13n<130$ und $7n+2m>56$.

Ist also	so ist													
n=9 m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gänse.
	y	54	52	50	48	46	44	42	40	38	36	34	32	Hühner.
	z	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Enten.
	t	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	Tauben.

n=8 m=1, 2, 3, 4 bis 24.	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Gänse.
	y	48	46	44	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	Hühner.
	z	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Enten.
	t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	Tauben.

n=7 m=4, 5, 6, 7 bis 21.	x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	Gänse.
	y	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	Hühner.
	z	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	Enten.
	t	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	Tauben.

n=6 m=8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.	x	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Gänse.
	y	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	Hühner.
	z	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	Enten.
	t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	Tauben.

n=5 m=11, 12, 13, 14, 15.	x	11	12	13	14	15	Gänse.
	y	10	8	6	4	2	Hühner.
	z	54	53	52	51	50	Enten.
	t	1	3	5	7	9	Tauben.

26. Man nehme x *kg* von 500, y *kg* von 900 und z *kg* von 700 Teilen fein, so ist:

$$(1)\ x+y+z=20$$
$$(2)\ 500x+900y+700z=20\,.\,780.$$

Eliminiere aus beiden Gl. z, so wird:

$$200y-200x=1600.$$

Hieraus folgt: $y=x+8$. Setze diesen Wert für y in (1), so ist $z=2(6-x)$. Setze $x=n$, so wird $y=8+n$ und und $z=2\ (6-n)$. Aus dem Werte für z ergiebt sich, daß $n<6$ und aus dem Werte für x, daß $n>0$ angenommen werden muß. Für $n=1$ ist $x=1$, $y=9$, $z=10$; für $n=2$ ist $x=2$, $y=10$, $z=8$, für $n=3$ ist $x=3$, $y=11$, $z=6$; für $n=4$ ist $x=4$, $y=12$, $z=4$; für $n=5$ ist $x=5$, $y=13$, $z=2$.

27. Es seien x Männer, y Frauen und z Kinder, so ist:

$$(1)\ x+y+z=30;\ (2)\ 14x+5\tfrac{1}{2}y+z=232.$$

Eliminiere z aus beiden Gl., so wird:

$$(3)\ 26x+9y=404.$$

Erste Auflösung.

$$y=\frac{404-26x}{9}=44-2x-\frac{8(x-1)}{9};$$

$x-1=9n$; $x=1+9n$, daher $y=42-26n$ und $z=17n-13$.

Aus dem Werte für z folgt, daß $n>0$ und aus dem für y, daß n nicht >1 angenommen werden darf; daher $x=10$, $y=16$, $z=4$.

Zweite Auflösung. Setze in Gl. (3) $x=15-x_1$, so wird:

$$(4)\ 9y=26x_1+14$$

Bei der Verwandlung des Bruches $\frac{14}{26}$ zur Basis 9 in eine Kettenreihe entstehen die Elemente 4, 7, 5 nebst den bezüglichen Resten 22, 16, 14; daher ist;

$9\,.\,16=26\,.\,5+14$; also $y=16$, $x_1=5$, $x=15-5=10$ und $z=30-(10+16)=4$.

Dritte Auflösung.

$26x\equiv404 \pmod 9$	$9y\equiv404 \pmod{26}$
$13x\equiv202 \pmod 9$	$9y\equiv404-26 \pmod{26}$
$13x\equiv202-8\,.\,9 \pmod 9$	$9y\equiv378 \pmod{26}$
$13x\equiv130 \pmod 9$	$y\equiv42-26 \pmod{26}$
$x\equiv10 \pmod 9$	$y\equiv16 \pmod{26}$

Die Gesellschaft bestand also aus 10 Männern, 16 Frauen und 4 Kindern.

28. *α*) Das erste Faß enthält $11x+1$ Ho; das zweite $17x+11$ Ho und das dritte $12z+1$. Da sich in jedem Faß gleich viel befindet, so ist:

$$11x+1=17y+11 \text{ oder } (1)\ 11x=17y+10.$$

Erste Auflösung.

$$x=\frac{17y+10}{11}=\frac{22y-5(y-2)}{11}=2y-\frac{5(y-2)}{11};$$

$y-2=11m$; $y=2+11m$; daher $x=4+17m$.

Zweite Auflösung. Bei der Verwandlung des Bruches $\frac{10}{17}$ zur Basis 11 in eine Kettenreihe entstehen die Elemente 6, 5, 1, 10, 3, 9, 7, 8, 4, 5, 9, 0, 7, 1, 3, 2 nebst den bezüglichen Resten 8, 3, 16, 6, 15, 12, 13, 7, 9, 14, 1, 11, 2, 5, 4, 10.

Es ist daher: $11.4=17.2+10$; daher $x=4$, $y=2$.

Dritte Auflösung. Setze in Gl. (1) $x=x_1+1$, so wird:

$$(2)\ 11x_1-17y=-1.$$

Der Bruch $\frac{11}{17}$ giebt die Näherungswerte $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{17}$; daher ist:

$11.3-17.2=-17.1$, also $x_1=3$, $x=4$, $y=2$.

Vierte Auflösung.

$11x\equiv10 \pmod{17}$	$17y\equiv-10 \pmod{11}$
$11x\equiv10+2.17 \pmod{17}$	$17y\equiv-10+4.11 \pmod{11}$
$11x\equiv44 \pmod{17}$	$17y\equiv34 \pmod{11}$
$x\equiv4 \pmod{17}$	$y\equiv2 \pmod{11}$.

Demnach ist ferner:

$12z+1=17(2+11m)+11$ oder (3) $12z=187m+44$.

Erste Auflösung.

$z=15m+3+\frac{7m+8}{12}$; setze $7m+8=12p$, so ist:

$m=2p-\frac{2(p+4)}{7}$; setze $p+4=7r$, so ist $p=7r-4$; daher $m=12r-8$ oder $r=n+1$ gesetzt, giebt $m=4+12n$, $z=66+187n$.

Zweite Auflösung. Verwandle den Bruch $\frac{44}{187}$ zur Basis 12 in eine Kettenreihe, so entstehen die Elemente 2, 9, 10, 7, 0, 8, 5, 7, 9, 2, 1, 4, 11, 3, 6, 4 nebst den bezüglichen Resten 154, 165, 110. 11, 132, 88, 121, 143, 33, 22, 77, 176, 55, 99, 66, 44. Es ist also:

$12.66=187.4+44$; daher $z=66$ und $m=4$.

Dritte Auflösung.

$12z\equiv44 \pmod{187}$	$187m\equiv-44 \pmod{12}$
$3z\equiv11 \pmod{187}$	$17m\equiv-4 \pmod{12}$
$3z\equiv11+187 \pmod{187}$	$17m\equiv-4+6.12 \pmod{12}$
$z\equiv66 \pmod{187}$	$m\equiv4 \pmod{12}$,

also $z=66$, $m=4$. Da nun der Reis weniger als 1000 Ho. beträgt, so sind in jedem Fasse:

$187.4+45=793$ Ho.

β) Die verwischte Ziffer in der Angabe der *kg* sei x, der ₰ y und der ℳ z, dann waren 10x+1 *kg* à 10y+208 ₰ und 100z+98,38 ℳ der Preis der Ware. Daher ist:

$$(10x+1)(10y+208)=100(100z+98{,}38)$$ oder

$$100xy=10000z+9630-2080x-10y$$ oder

$$100xy=10000z+9700-2100x-100y+20x+90y-70;$$

$$xy=100z+97-21x-y+\frac{2x+9y-7}{10}.$$

Setze: $\frac{2x+9y-7}{10}=m$, so ist $2x=10m+7-9y$; also

$x=5m+3-4y+\frac{1-y}{2}$. Setze $\frac{1-y}{2}=n$, so wird $y=1-2n$. Hieraus folgt, daß n nur den Wert 0 haben kann, weshalb y=1 ist. Setze diesen Wert für y ein, so wird:

$$218(10x+1)=100(100z+98{,}38).$$ Hieraus

$$109x=500z+481.$$

Erste Auflösung.

$$x=\frac{500z+481}{109}=\frac{545z+436-45(z-1)}{109}=5z+4-\frac{45(z-1)}{109}.$$

Setze $\frac{z-1}{109}=n$; dann ist $z=1+109n$; daher $x=9+500n$.

Da x und z einzifferige Zahlen sein müssen, so kann n in den Werten für x und z nur 0 sein, weshalb x=9, z=1; daher lautete die Rechnung

91 *kg* à 2,18 ℳ=198,38 ℳ.

Zweite Auflösung. Verwandle $\frac{481}{500}$ zur Basis 109 in eine Kettenreihe, so entstehen die Elemente 104, 93, 56, 97, 96, 15, 4, 63, 0, 23, 83, 6, 35, 10, 74, 36, 91, 84, 87, 45, 61, 28, 13, 32, 52, 58, 69, 106, 65, 67, 39, 49, 100, 54, 30, 80, 48, 17, 43, 89, 17, 71, 78, 76, 8, 102, 26, 41, 22, 1 nebst den bezüglichen Resten 429, 261, 449, 441, 69, 21, 289, 1, 109, 381, 29, 161, 49, 341, 169, 421, 389, 401, 209, 281, 129, 61, 149, 241, 269, 321, 489, 301, 309, 181, 229, 461, 249, 141, 369, 221, 89, 201, 409, 81, 329, 361, 349, 41, 469, 121, 189, 101, 9, 481; daher ist:

$$109 . 9=500 . 1+481;$$ also x=9, z=1.

Dritte Auflösung. Setze $z=z_1-1$, so erhalten wir die Gleichung:

$$109x-500z_1=-19.$$

Der Bruch $\frac{109}{500}$ liefert die Näherungswerte $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{23}$, $\frac{12}{55}$, $\frac{17}{78}$, $\frac{46}{211}$, $\frac{109}{500}$; daher ist:

$$109 . 211-500 . 46=-1;$$ also

$$109 . (211 . 19)-500 . (46 . 19)=-19.$$

$x=4009$, $z_1=874$, $z=873$; also allgemein $x=4009+500m$, $z=873+109m$, oder hierin $m=n-8$ gesetzt, giebt $x=9+500n$, $z=1+109n$; dieselben Werte wie oben.

Vierte Auflösung.

$109x\equiv 481 \pmod{500}$	$500z\equiv -481 \pmod{109}$
$109x\equiv 481+500 \pmod{500}$	$545z\equiv 0 \pmod{109}$
$109x\equiv 981 \pmod{500}$	$45z\equiv 481 \pmod{109}$
$x\equiv 9 \pmod{500}$	$45z\equiv 481-4\,.\,109 \pmod{109}$
	$z\equiv 1 \pmod{109}$.

Daher $x=9$, $z=1$ wie oben.

29. α) Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist:

$$x+y+xy=191;\ \text{daher}\ x=\frac{191}{y+1}=-1+\frac{192}{y+1}.$$

Soll nun x eine ganze Zahl sein, so muß 192 durch $y+1$ teilbar sein; man suche daher die Teiler von 192 auf, diese sind: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96.

Ist also $y=1$, so ist $x=-1+\frac{192}{2}=95$.

„ „ $y=2$, „ „ $x=-1+\frac{192}{3}=63$ u. s. w.

Hiernach erhalten wir folgende Werte für x und y:

Ist y=	1	2	3	5	7	11	15	23	31	47	63	95
so ist x=	95	63	47	31	23	15	11	7	5	3	2	1

β) Sind die beiden Zahlen x und y, so ist:

$$xy=6(x+y);\ \text{folglich}\ y=\frac{6x}{x-6}.$$

Aus dem Divisor dieses Quotienten geht hervor, daß x nicht kleiner als 7 angenommen werden darf.

Ist x=	7	8	9	10	12	15	18	24	42
so ist y=	42	24	18	15	12	10	9	8	7

30. α) Sind die beiden Zahlen x und y, so ist:

$$x-y=\frac{x}{y};\ \text{also}\ x=\frac{y^2}{y-1}.$$

Hier darf y nicht kleiner als 2 angenommen werden. Ist also $y=2$, so wird $x=4$. Dies sind die einzig möglichen ganzen Zahlen; denn setzt man $y=3$, so wird $x=4\frac{1}{2}$; für $y=4$ wird $x=5\frac{1}{3}$ u. s. w.

β) Hier soll $x+y=\frac{x}{y}$ sein, woraus $x=\frac{y^2}{1-y}$. Nun giebt es keine ganzen positiven Zahlen für y, die x ebenfalls zu einer ganzen positiven Zahl machen, daher ist die Auflösung unmöglich.

31. Sind die beiden Zahlen x und y, so ist:

$$x+y=24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right);\text{ hieraus folgt:}$$

$$xy(x+y)=24(x+y);\text{ also } xy=24.$$

Die Aufgabe reduziert sich also auf die Forderung, für x und y zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 24 ausmacht. Ist also $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24,$
so ist $y=24,\ 12,\ 8,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$

32. Die Zahl sei x, so muß sowohl $x+1$ als auch $x-1$ ein Quadrat sein. Dieses Quadrat heiße p^2, so ist:

$$x+1=p^2;\text{ also } x=p^2-1 \text{ und daher } x-1=p^2-2.$$

Da nun $x-1$ ein Quadrat sein soll, so muß p^2-2 ein solches sein. Es sei $p-q$ die Wurzel, so ist:

$$p^2-2=(p-q)^2;\text{ also } p=\frac{q^2+2}{2q}.$$

Da nun $x=p^2-1$, so ist, wenn wir den Wert für p hierin einsetzen: $x=\left(\frac{q^2+2}{2q}\right)^2-1=\frac{q^4+4}{4q^2}$, worin für q beliebige ganze oder gebrochene Zahlen gesetzt werden können. Ist $q=1$, so wird $x=\frac{5}{4}$; ist $q=\frac{1}{2}$, so wird $x=\frac{65}{16}$ u. s. w.

33. Es soll sowohl $1+x$ als auch $1-x$ ein vollständiges Quadrat werden. Man setze $1+x=p^2$, so ist $x=p^2-1$. Daher wird: $1-x=1-(p^2-1)=2-p^2$, worin $2-p^2$ ebenfalls ein Quadrat sein soll. Setze $p=1-q$, so wird:

$$x=(1-q)^2-1=q^2-2q;\text{ daher ist auch}$$

$$2-p^2=1-(q^2-2q)=1+2q-q^2.$$

Setze die Wurzel von $1+2q-q^2=1-qn$, worin n ein eigentlicher Bruch sein muß, so wird:

$$1+2q-q^2=(1-qn)^2;\text{ also } q=\frac{2(n+1)}{n^2+1}.$$

Da nun $x=q^2-2q$, so wird, wenn der für q gefundene Wert eingesetzt wird:

$$x=\left(\frac{2(n+1)}{n^2+1}\right)^2-2\cdot\left(\frac{2(n+1)}{n^2+1}\right)=\frac{4n(1-n^2)}{(n^2+1)^2},$$

worin für n beliebige echte Brüche gesetzt werden können. Ist $n=\frac{1}{2}$, so ist $x=\frac{24}{25}$ u. s. w.

34. Heißen die drei Zahlen x, y, z, so soll sein:

$$x^2+y^2=z^2;\text{ daher } x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y).$$

Wäre jeder dieser beiden Faktoren oder deren Hälfte eine Quadratzahl, so wäre auch ihr Produkt eine solche, nämlich x^2. Setzt man demnach

$$\tfrac{1}{2}(z+y)=p^2 \text{ und } \tfrac{1}{2}(z-y)=q^2,\text{ so ist}$$

$$z=p^2+q^2,\ y=p^2-q^2;\ x^2=z^2-y^2=4p^2q^2;\text{ also } x=2pq.$$

Man überzeugt sich auch leicht, daß

$$(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2+q^2)^2.$$

Diese Formeln geben für x, y, z immer ganze Zahlen,

wenn für p und q ganze Zahlen angenommen werden. Ist $p=2$, $q=1$, so heißen die 3 Zahlen 3, 4, 5; für $p=3$, $q=2$ heißen dieselben 5, 12, 13 u. s. w.

35. Die beiden andern Quadrate, worin die Summe zweier Quadrate a^2+b^2 zerlegt werden soll, sind so zu nehmen, daß die Wurzelgrößen verschwinden. Dies geschieht, wenn man setzt:

$$a^2+b^2=(x-a)^2+(nx-b)^2.$$

Hieraus folgt: $x=\frac{2(a+bn)}{n^2+1}$. Mithin heißen die Wurzeln der beiden Quadrate:

$$x-a=\frac{2bn-a(n^2-1)}{n^2+1} \text{ und}$$

$$nx-b=\frac{2an+b(n^2-1)}{n^2+1}.$$

Die beiden Quadrate sind daher:

$$\left(\frac{2an+b(n^2-1)}{n^2+1}\right)^2 \text{ und } \left(\frac{2bn-a(n^2-1)}{n^2+1}\right)^2.$$

36. Setze $\sqrt{a^2x^2+b}=ax+m$, so ist, diese Gl. ins Quadrat erhoben:

$$a^2x^2+b=a^2x^2+2amx+m^2; \text{ folglich}$$
$$x=(b-m^2):(2am).$$

37. Da $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ ist, so ist auch $(bm^2-n^2)^2+(2mn)^2b=(bm^2+n^2)^2$, daher ist ferner

$$a^2(bm^2-n^2)^2+(2amn)^2b=a^2(bm^2+n^2)^2.$$

Vergleichen wir diese identische Gl. mit $a^2x^2+by^2=z^2$, so ergiebt sich, daß wir, wenn wir $x=bm^2-n^2$ und $y=2amn$ setzen, der Aufgabe genügen, weil $a^2x^2+by^2=a^2(bm^2+n^2)^2$.

38. Es sei $\sqrt{a^2x^2+bx+c}=ax+n$, so ist:

$$a^2x^2+bx+c=a^2x^2+2anx+n^2; \text{ daher}$$
$$x=(c-n^2):(2an-b).$$

39. Da $a^2x^2+bxy+cy^2$ ein vollkommenes Quadrat werden soll, so setze man:

$$\sqrt{a^2x^2+bxy+cy^2}=ax+\frac{m}{n}y; \text{ so ist:}$$

$$a^2x^2+bxy+cy^2=a^2x^2+\frac{2am}{n}xy+\frac{m^2}{n^2}y^2 \text{ oder:}$$

$$bxy+cy^2=\frac{2am}{n}xy+\frac{m^2}{n^2}y^2; \text{ hieraus hat man:}$$

$$(bn^2-2amn)x=(m^2-cn^2)y.$$

Also $x=m^2-cn^2$, $y=bn^2-2amn$. Daher ist:

$$a^2x^2+bxy+cy^2=(am^2-acn^2-bmn)^2.$$

40. Es sei $\sqrt{ax^2+bx+c^2}=nx+c$, so ist:

$$ax^2+bx+c^2=n^2x^2+2cnx+c^2 \text{ oder}$$
$$(a-n^2)x=2cn-b; \text{ also } x=(2cn-b):(a-n^2).$$

41. α) Heißen die beiden Zahlen x und y, so ist:

(1) $x+y=x^3+y^3$; hieraus erhält man:

(2) $1=x^2-xy+y^2$.

Es sei nun $\sqrt{x^2-xy+y^2}=y-nx$, so wird

(3) $x^2-xy+y^2=y^2-2nxy+n^2x^2$; daher

(4) $(2n-1)y=(n^2-1)x$; also $y=\frac{n^2-1}{2n-1}x$.

Setze diesen Wert für y in (2), so wird:

$$x^2-\frac{n^2-1}{2n-1}x^2+\left(\frac{n^2-1}{2n-1}\right)^2x^2=1 \text{ oder}$$

$$x^2(n^2-n+1)^2=(2n-1)^2; \text{ also } x(n^2-n+1)=2n-1;$$

folglich $x=\frac{2n-1}{n^2-n+1}$; also $y=\frac{n^2-1}{2n-1}\times\frac{2n-1}{n^2-n+1}=\frac{n^2-1}{n^2-n+1}$.

Zweite Auflösung. Die Gl. (2) kann auch auf folgende Weise geschrieben werden:

$$y^2=1+xy-x^2.$$

Setze hierin $y=nx-1$, so ist:

$$(nx-1)^2=1+x(nx-1)-x^2;$$

also $x(n^2-n+1)=2n-1$; daher der Wert für x und y wie oben. Hieraus folgt, daß für n jede Zahl, die >1 ist, angenommen werden darf. Ist z. B. $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, so ist:

$$x=1, \tfrac{5}{7}, \tfrac{7}{13}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{11}{31}, \tfrac{13}{43}, \tfrac{5}{19}, \tfrac{17}{73}, \tfrac{19}{91},$$
$$y=1, \tfrac{8}{7}, \tfrac{15}{13}, \tfrac{8}{7}, \tfrac{35}{31}, \tfrac{48}{43}, \tfrac{21}{19}, \tfrac{80}{73}, \tfrac{99}{91}.$$

β) Heißen auch hier die beiden Zahlen x und y, so ist:

(1) $x-y=x^3-y^3$; durch $x-y$ dividiert, giebt:

(2) $1=x^2+xy+y^2$ oder (3) $y^2=1-xy-x^2$.

Setze $y=nx-1$, so wird:

$$(nx-1)^2=1-x(nx-x^2); \text{ folglich}$$

$$x=\frac{2n+1}{n^2+n+1} \text{ und } y=n\cdot\frac{2n+1}{n^2+n+1}-1=\frac{n^2-1}{n^2+n+1}.$$

Auch hier kann für n jede Zahl, die >1 ist, angenommen werden.

Ist $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$,

so ist $x=\tfrac{5}{7}, \tfrac{7}{13}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{11}{31}, \tfrac{13}{43}, \tfrac{5}{19}, \tfrac{17}{73}, \tfrac{19}{91}, \tfrac{7}{37}$,

und $y=\tfrac{3}{7}, \tfrac{8}{13}, \tfrac{5}{7}, \tfrac{24}{31}, \tfrac{35}{43}, \tfrac{16}{19}, \tfrac{63}{73}, \tfrac{80}{91}, \tfrac{33}{37}$.

42. Wenn $x^2+y^2=z^2$, so ist nach Nr. 34 dieses §.

$$x=m^2-n^2, \; y=2mn \text{ und } z=m^2+n^2.$$

Untersuchen wir jetzt, welche bestimmten Werte m und n haben, da den Bedingungen der gestellten Gl. nur 4 ganze Zahlen entsprechen können. Deshalb setzen wir die Werte für x, y, z und u in die Gl. $x^3+y^3+z^3=u^3$ und wir erhalten:

$$(m^2-n^2)^3+(2mn)^3+(m^2+n^2)^3=m^3n^3(m^2-n^2)^3.$$

Diese Gl. entwickelt und durch n^2 dividiert giebt:

$$\frac{2m^4}{n^2}+6n^2+8mn=mn(m^2-n^2)^3.$$

Nun muß $\frac{m^4}{n^2}$ eine ganze Zahl sein; dieses ist aber nicht anders möglich, als daß $n^2=1$.

Setze diesen Wert für n^2 in die letzte Gl., so haben wir:

$$2(m^4+3+4m)=m(m^2-1)^3 \text{ oder}$$

$2(m+1)^2.(m-2m+3)=m(m+1)^2(m-1)^2(m^2-1)^2$; also

$2(m^2-2m+3)=m(m-1)^2(m^2-1)$ oder auch

$2(m^2-1)^2+4=m(m-1)^2(m^2-1)$; durch $(m-1)^2$ dividiert, giebt:

$$2+\frac{4}{(m-1)^2}=m(m^2-1).$$

Soll nun in dieser Gl. $\frac{4}{(m-1)^2}$ eine ganze Zahl und die Gl. eine richtige sein, so kann m nur den Wert 2 haben; alsdann haben wir, da $n=1$, $m=2$ ist:

$$x=2^2-1^2=3,\ y=2.2.1=4,\ z=2^2+1^2=5;$$
$$u=2.1.(2^2-1)=6.$$

43. Nach §. 385, Nro. 201 β) Seite 125 ist:

$$u=\frac{2xy}{x+y} \text{ oder } nx+ny=xy+xy; \text{ daher:}$$

$x(n-y)=y(x-n)$. Setze $qx=(x-n)p$ und $qy=(n-y)p$, so wird:

$$x=n+\frac{nq}{p-q},\ y=n-\frac{nq}{p-q}.$$

Zerlegt man n in die beiden Faktoren $p+q$ und $p-q$, so ist: $x=(p+q)(p-q)-\frac{(p+q)(p-q)q}{p-q}=p(p-q)$.

Da nun $n=\left(\frac{n+z^2}{2z}\right)^2-\left(\frac{n-z^2}{2z}\right)^2$ und ebenso

$$n=(p+q)(p-q)=p^2-q^2, \text{ so ist auch}$$

$$p^2-q^2=\left(\frac{n+z^2}{2z}\right)^2-\left(\frac{n-z^2}{2z}\right)^2; \text{ daher}$$

$$p=\frac{n+z^2}{2z} \text{ und } q=\frac{n-z^2}{2z}.$$

Substituiere diese Werte für p und q in die für x und y gefundenen Ausdrücke, so wird:

$$x=\frac{n+z^2}{2z}\left(\frac{n+z^2}{2z}+\frac{n-z^2}{2z}\right)=n\cdot\frac{n+z^2}{2z^2} \text{ und}$$

$$y=\frac{n+z^2}{2z}\left(\frac{n+z^2}{2z}-\frac{n-z^2}{2z}\right)=\frac{n+z^2}{2}.$$

Ist nun $n=105$, so ist, wenn $z=1$, $x=105.\frac{106}{2}=5565$ und $y=\frac{106}{2}=53$.

Für $z=2, 4, 6$ u. s. w. erhalten wir für x und y

keine ganzen Zahlen; überhaupt darf z nicht die Form 2m haben; auch ist die Anzahl der Werte für z beschränkt, indem es nicht höher als 7 angenommen werden darf. Für $z=3$ wird $x=\frac{105 \,.\, 114}{2 \,.\, 9}=665$, $y=\frac{105+9}{2}=57$. Für $z=5$ wird $x=\frac{105 \,.\, 130}{2 \,.\, 25}=273$ und $y=\frac{105+25}{2}=65$; für $z=7$ wird $x=\frac{105 \,.\, 154}{2 \,.\, 49}=165$ und $y=\frac{105+49}{2}=77$.

44. Hier sollen für x und y solche positive und rationale Zahlenwerte gefunden werden, daß der Gleichung

$$(1)\ x^y=y^x$$

Genüge geschieht. Setze $y=mx$, so ist

$$(2)\ x^{mx}=(mx)^x=m^x x^x.$$

Ziehe aus Gl. (2) die xte Wurzel, so wird:

(3) $x^m=mx$; durch x dividiert giebt:

(4) $x^{m-1}=m$; hieraus erhalten wir:

$$(5)\ x=\sqrt[m-1]{m}=m^{\frac{1}{m-1}}.$$

Setze $m=s:r$; so ist: (6) $x=(s:r)^{\frac{r}{s-r}}$.

Aus (6) ergeben sich alle Werte für x, woraus dann weiter alle Werte für y folgen. Da aber x rational werden soll, so muß r durch $s-r$ teilbar sein. Setze daher:

$r=n(s-r)$, so wird $(n+1)r=ns$ und $\frac{s}{r}=\frac{n+1}{n}$.

Hieraus folgt: (7) $x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Nun ist $y=mx=\frac{s}{r}x=\frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ oder

$$y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

Da $n+1$, durch n dividiert, nur in dem einzigen Falle eine ganze Zahl giebt, wenn $n=1$ ist, so ist auch nur eine Auflösung der Gl. in ganzen Zahlen möglich, nämlich $x=2$ und $y=4$. Ist also:

	$n=1,$	$2,$	$3,$	$4,$	$5,$	6	u. s. w.
so ist	$x=2,$	$\frac{9}{4},$	$\frac{64}{27},$	$\frac{625}{256},$	$\frac{7776}{3125},$	$\frac{117649}{46656}$	u. s. w.
und	$y=4,$	$\frac{27}{8},$	$\frac{256}{81},$	$\frac{3125}{1024},$	$\frac{46656}{15625},$	$\frac{823543}{279936}$	u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

A. Progressionen.

1. Begriff und Einteilung derselben.

§. 416. Unter Progression oder Reihe versteht man eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten gemeinsamen Gesetze fortschreiten. Dieses Fortschreiten kann zunehmend oder abnehmend sein. Es ist zunehmend, wenn die folgenden Glieder immer größer, und abnehmend, wenn dieselben immer kleiner werden. Deshalb ist jede zunehmende Progression rückwärts gelesen eine abnehmende, und jede abnehmende hingegen rückwärts betrachtet eine zunehmende. Geschieht das Fortschreiten durch Addition oder Subtraktion einer und derselben Zahl, so ist die Progression eine arithmetische; findet aber das Fortschreiten vermittelst der Multiplikation oder Division mit einer und derselben Zahl statt, so wird sie eine geometrische genannt. Die Reihe

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots$$

ist also eine zunehmende arithmetische Progression, weil sie durch Addition von 2 fortschreitet, und die Reihe

$$20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, \ldots$$

ist eine abnehmende arithmetische Progression, weil sie durch Subtraktion von 1 fortschreitet. Hingegen sind die Reihen

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$$

$$15625, 3125, 625, 125, 25, 5, 1, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{25}, \ldots$$

geometrische Progressionen und zwar erstere eine zunehmende, weil sie durch Multiplikation von 2, und die zweite eine abnehmende, weil sie durch Division von 5 fortschreitet.

Die Zahl oder Größe, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression zu- oder abnehmen, heißt die Differenz oder der Unterschied. Die Zahl oder Größe aber, die in einer geometrischen Progression angiebt, wie vielmal jedes Glied größer oder kleiner ist als das vorhergehende, wird Exponent genannt.

Aus der Betrachtung, daß in der obigen arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7, u. s. w. das erste Glied $1=1$, das zweite Glied 3 aus $1+2$, also aus der Summe des ersten Gliedes und der einmaligen Differenz, das dritte Glied 5 aus $1+2+2=1+2.2$, also aus der Summe des ersten Gliedes und der doppelten Diffe-

renz, das vierte Glied 7 aus 1+2+2+2=1+3.2, also aus der Summe des ersten Gliedes und der dreifachen Differenz u. s. w. besteht, ergiebt sich, daß jedes folgende Glied einer arithmetischen Progression aus der Summe des ersten Gliedes und der Differenz besteht, letztere so oftmal genommen, als Glieder vorhergehen. Will man also das 50. Glied obiger Progression finden, so hat man, da 49 Glieder vorhergehen, 1+49.2=99. Ist also das erste Glied und die Differenz einer arithmetischen Progression gegeben, so kann man nicht bloß jedes beliebige Glied derselben berechnen, sondern auch die Reihe beliebig fortsetzen.

I. Arithmetische Progressionen.

2. Auflösungen der arithmetischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 81.

a) Entwickelung der beiden Grundformeln (1—6).

§. 417. 1. Heißt das erste Glied einer arithmetischen Progression a und die Differenz d, so läßt sich dieselbe auf folgende Weise ganz allgemein ausdrücken:

a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d, a+7d, a+8d 2c.

Hat diese Reihe 20 Glieder, so wird das letzte a+(20—1)d =a+19d sein; hat sie n Glieder, so ist das letzte Glied also a+(n—1)d und bezeichnet man das letzte Glied allgemein mit t so ist:

(1) t=a+(n—1)d.

2. Da jedes Glied einer zunehmenden arithmetischen Progression das erste Glied derselben enthält, jedes der folgenden Glieder aber eine Differenz mehr als das ihm zunächst vorhergehende hat, so muß die Summe aus dem ersten und letzten Gied, der Summe aus dem zweiten und dem vorletzten, sowie auch der Summe aus dem dritten und vorvorletzten Gliede u. s. w. gleich sein. Denn jede dieser Summen enthält das erste Glied doppelt, und da das zweite Glied eine Differenz mehr hat, als das erste, so enthält das vorletzte wieder eine Differenz weniger als das letzte, und weil das dritte Glied eine Differenz mehr hat als das zweite, so hat das vorvorletzte wieder eine Differenz weniger als das vorletzte u. s. w., wodurch es geschieht, daß auch diese Differenzen in den drei Summen und überhaupt in allen auf diese Weise gebildeten Summen gleich vielmal vorkommen. Um dies augenfällig zu machen, schreibe man die Glieder einer Progression so untereinander, daß das

letzte Glied unter das erste, das vorletzte unter das zweite, das vorvorletzte unter das dritte u. s. w. zu stehen kommt, und summiere die unter einander stehenden Glieder, so erhält man jedesmal gleiche Summen. Ist also das erste Glied $=a$, die Differenz $=d$, das letzte Glied $=a+(n-1)d$, so hat man:

$$\begin{array}{cccc} a\ , & a+d\ , & a+2d\ , & a+3d\ , \\ a+(n-1)d, & a+(n-2)d, & a+(n-3)d, & a+(n-4)d \\ \hline 2a+(n-1)d, & 2a+(n-1)d, & 2a+(n-1)d, & 2n+(n-1)d' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a+4d \quad \ldots\ldots\ a+(n-1)d. \\ a+(n-5)d \ldots\ldots \quad a \\ \hline 2a+(n-1)d \ldots\ldots 2a+(n-1)d \end{array}.$$

Diese aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe ist offenbar die Summe der beiden Progressionen. Ist nun die Anzahl dieser gleichen Glieder $=n$, so ist ihre Summe $=n[2a+(n-1)d]$; folglich die Summe der einen Progression

$$=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d].$$

Die allgemeine Summenformel ist daher, wenn wir dieselbe mit s bezeichnen:

$$(2)\quad s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d].$$

Weil nach (1) dieses §. auch $t=[a+(n-1)d]$, so ist auch

$$(3)\quad s=\tfrac{1}{2}n(a+t).$$

Man findet also die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliziert.

3. α) Hiernach kann man das letzte Glied t und die Summe s einer jeden arithmetischen Progression berechnen, wenn das erste Glied a, die Differenz d und die Anzahl der Glieder n gegeben sind. Demnach ist die Summe aller Zahlen von 1 bis $1000=\tfrac{1}{2}\,.\,1000(1+1000)=500\,.\,1001=500500$.

β) Ist $a=6$, $t=2833$, $n=38$, so ist

$$s=\tfrac{1}{2}\,.\,38(6+2833)=19\,.\,2839=53941.$$

4. Ist $a=17$, $d=5\tfrac{1}{2}$ und $n=79$, so ist

$$t=17+(79-1)\,.\,5\tfrac{1}{2}=17+429=446 \text{ und}$$
$$s=\tfrac{1}{2}\,.\,79[2\,.\,17+(79-1)\,.\,5\tfrac{1}{2}]=18288\tfrac{1}{2}.$$

Zur Ergänzung des in dem Vorhergehenden Gesagten sei noch Folgendes bemerkt. Wollte man die Progression

25, 21, 17, 13, 9, 5, 1

weiter über 1 hinaus fortsetzen, so müßte man zunächst 4 von 1 subtrahieren, welches (—3) giebt, und würde die Subtraktion noch weiter stattfinden, so erhielt man:

25, 21, 17, 13, 9, 5, 1, (—3), (—7), (—11), (—19) u. s. w.

Die Glieder (—3), (—7) u. s. w. nennt man negativ, im Gegen-

satze zu den andern, welche positiv heißen. Da nun sowohl die positiven als auch die negativen Glieder ins Unendliche fortgesetzt werden können, so besteht also eine arithmetische Progression aus zwei unendlichen unter sich gleichen Abteilungen, wovon die eine die positiven, die andere die negativen Glieder enthält. Aus diesem Grunde wird es immer in der Progression eine Stelle geben, wo der Übergang vom Positiven zum Negativen stattfindet und für welche Null als entsprechendes Glied gelten kann. Jedoch ist man nicht genötigt, dieses Glied als erstes zu betrachten; jede beliebige Zahl kann als solches gelten.

5. Hier ist: α) $t = 29\frac{3}{4} + (711-1) \,.\, 7\frac{1}{4} = 5177\frac{1}{4}$.
$s = \frac{1}{2} \,.\, 711(29\frac{3}{4} + 5177\frac{1}{4}) = 1851088\frac{1}{2}$.
β) $t = -151\frac{1}{3} + (53-1)1\frac{5}{6} = -56$ und
$s = \frac{1}{2} \,.\, 53[2 \,.\, (-151\frac{1}{3}) + (53-1) \,.\, 1\frac{5}{6}] =$
$26\frac{1}{2} \times (-207\frac{1}{3}) = -5494\frac{1}{3}$.

6. α) $t = 28\frac{1}{2} + (47-1) \,.\, (-5\frac{3}{7}) = -221\frac{3}{14}$;
$s = \frac{1}{2} \,.\, 47(28\frac{1}{2} - 221\frac{3}{4}) = -4528\frac{1}{14}$.
β) $t = -7\frac{3}{4} + (73-1) \,.\, (-\frac{5}{12}) = -37\frac{3}{4}$.
$s = \frac{1}{2} \,.\, 73[2 \,.\, (-7\frac{3}{4}) + (73-1) \,.\, (-\frac{5}{12})] = -1660\frac{3}{4}$.

b) Entwickelung der übrigen Formeln (7—11).

§. 418. 7. Bei einer jeden arithmetischen Progression kommen immer fünf verschiedene Größen vor, nämlich a, d, t, n und s und diese fünf Größen sind in den beiden Gleichungen

$$(1)\ t = a + (n-1)d \text{ und } (2)\ (s = \tfrac{1}{2}n(a+t)$$

enthalten. Sind daher von den fünf verschiedenen Größen drei gegeben, so lassen sich die übrigen mit Hülfe dieser beiden Gleichungen finden. Denn substituiert man die Werte der drei gegebenen Größen in diesen Gleichungen, so bleiben noch zwei Größen unbestimmt, und weil zwei Gleichungen gegeben sind, so lassen sich auch diese beiden aus denselben berechnen.

Ist 1) a, d, n gegeben, so ist nach (1) des §. 417:

$$t = a + (n-1)d.$$

Ist 2) a, d, s gegeben, so ergiebt sich aus der Formel

$$t = a + (n-1)d, \text{ daß}$$

$$n = \frac{t-a}{d} + 1 \text{ und aus der Formel}$$

$$(3)\ s = \tfrac{1}{2}n(a+t) \text{ folgt, daß } n = \frac{2s}{a+t}.$$

Stellt man diese beiden Werte für n einander gleich, so ist:

$$\frac{2s}{a+t} = \frac{t-a}{d} + 1.$$

Hieraus wird: (4) $t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{2sd + (a - \frac{1}{2}d)^2}$.

Ist 3) a, n, s, gegeben, so ergiebt sich aus

$$s = \tfrac{1}{2}n(a+t), \text{ daß}$$

$2s=n(a+t)$ und hieraus folgt, daß

$$(5)\ t=\frac{2s-an}{n}=\frac{2s}{n}-a.$$

Ist 4) d, n, s gegeben, so folgt aus (1), daß $a=t-(n-1)d$ und aus (3), daß

$$a=\frac{2s-nt}{n}=\frac{2s}{n}-t.$$

Stellt man diese für a gefundenen Werte einander gleich, so ist:

$$t-(n-1)d=\frac{2s}{n}-t \text{ oder } 2t=(n-1)d+\frac{2s}{n};$$

$$\text{folglich: } (6)\ t=\frac{(n-1)d}{2}+\frac{s}{n}.$$

8. Ist 1) a, d, n gegeben, so ist schon in Beisp. 2 Seite 520 der Wert für s gefunden. Ist 2) a, d, t gegeben, so folgt aus (1), daß

$$n=\frac{t-a}{d}+1 \text{ und aus (3), daß } n=\frac{2s}{a+t}.$$

Daher ist: $\frac{2s}{a+t}=\frac{t-a}{d}+1$. Hieraus findet man:

$$(7)\ s=\frac{a+t}{2}+\frac{(t-a)(a+t)}{2d}=\frac{(a+t)(d+t-a)}{2d}.$$

Ist 3) a, n, t gegeben, so ist in (3) der Wert für s schon gefunden. Ist 4) d, n, t gegeben, so folgt aus (3), daß

$$a=\frac{2s}{n}-t \text{ und aus (2), daß}$$

$a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$. Aus den beiden Werten für a folgt

$$\frac{2s}{n}-t=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}; \text{ folglich}$$

$$(8)\ s=\tfrac{1}{2}n[2t-(n-1)d].$$

9. Ist 1) a, n, t gegeben, so stelle man aus (2) und (3) die Werte für s einander gleich und man findet:

$\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d]=\tfrac{1}{2}n(a+t)$. Hieraus folgt, daß (9) $d=\frac{t-a}{n-1}$.

Ist 2) a, n, s gegeben, so entwickele man d aus (2) und man erhält: $n(n-1)d=2(s-an)$; folglich (10) $d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$.

Ist 3) a, t, s gegeben, so entwickele man d aus dem in Aufg. 8 Gleichung (7) für s gefundenen Wert, nämlich:

$$s=\frac{a+t}{2}+\frac{(t-a)(t+a)}{2d} \text{ und es wird:}$$

$(2s-a-t)d=(t-a)(t+a)$; folglich (11) $d=\frac{(t-a)(t+a)}{2s-a-t}$.

Ist 4) n, t, s gegeben, so entwickele man d aus dem in (8) für s gefundenen Wert und man hat:

$n(n-1)d=2(nt-s)$; folglich (12) $d=\frac{2(nt-s)}{n(n-1)}$.

10. Ist 1) a, d, t gegeben, so entwickele man n aus (1) und man findet (13) $n=\frac{t-a}{d}+1$.

Ist 2) a, d, s gegeben, so stelle man aus (1) und (6) die für t gefundenen Werte einander gleich, so ist:

$a+(n-1)d=\frac{(n-1)d}{2}+\frac{s}{n}$; hieraus resultiert

$dn^2+n(2a-d)=2s$; daher (14) $n=\pm\sqrt{\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}-\frac{2a-d}{2d}$

$=\frac{\pm\sqrt{8ds+(2a-d)^2}-2a+d}{2d}$.

Ist 3) a, t, s gegeben, so bestimme man aus n (3) und man findet: (15) $n=\frac{2s}{a+t}$.

Ist 4) d, t, s gegeben, so stelle man aus (2) und (3) di dort für s gefundenen Werte einander gleich, und man hat

$\frac{2s-(n-1)dn}{2n}=\frac{2s-nt}{n}$ oder $n^2-\frac{n(d+2t)}{d}=-\frac{2s}{d}$. Es ist also

$\left(n-\frac{d+2t}{2d}\right)^2=\left(\frac{d+2t}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}$; folglich

(16) $n=\frac{d+2t}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{d+2t}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}}=\frac{d+2t\pm\sqrt{(d+2t)^2-8ds}}{2d}$.

11. Ist 1) d, n, t gegeben, so entwickele man a aus (1) und man hat: (17) $a=t-(n-1)d$.

Ist 2) d, n, s gegeben, so bestimme man a aus (2) und es ist: (18) $a=\frac{2s-(n-1)dn}{2n}=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$.

Ist 3) d, t, s gegeben, so stelle die in (13) und (15) für n gefundenen Werte einander gleich und es ist: $\frac{t-a}{d}+1=\frac{2s}{a+t}$.

Entwickele diese Gleichung und man findet:

$a^2-ad=t^2+dt-2ds$ oder $(a-\frac{1}{2}d)^2=(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds$; folglich

(19) $a=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds}$.

Ist 4) n, t, s gegeben, so entwickele man aus (3) und man erhält:

(20) $a=\frac{2s-nt}{n}=\frac{2s}{n}-t$.

Zur leichtern Uebersicht stellen wir die für die fünf Größen gefundenen Werte in folgender Formeltafel zusammen:

Nr.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.	Nr.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	a, d, n,	t	$=a+(n-1)d$	11	a, t, s,	d	$=\frac{(t-a)(t+a)}{2s-t-a}$
2	a, d, s,		$=\pm\sqrt{2sd+(a-\frac{1}{2}d)^2}-\frac{1}{2}d$	12	n, t, s,		$=\frac{2(nt-s)}{n(n-1)}$
3	a, n, s,		$=\frac{2s}{n}-a$	13	a, d, t,	n	$=\frac{t-a}{d}+1$
4	d, n, s,		$=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$	14	a, d, s,		$=\frac{d-2a\pm\sqrt{8ds+(2a-d)^2}}{2d}$
5	a, d, n,	s	$=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$	15	a, t, s,		$=\frac{2s}{a+t}$
6	a, d, t,		$=\frac{a+t}{2}+\frac{(t-a)(t+a)}{2d}$	16	d, t, s,		$=\frac{d+2t\pm\sqrt{(d+2t)^2-8ds}}{2d}$
7	a, n, t,		$=\frac{1}{2}n(a+t)$	17	d, n, t,	a	$=t-(n-1)d$
8	d, n, t,		$=\frac{1}{2}n[2t-(n-1)d]$	18	d, n, s,		$=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$
9	a, n, t,	d	$=\frac{t-a}{n-1}$	19	d, t, s,		$=\frac{1}{2}d\pm\sqrt{(t+\frac{1}{2}d)^2-2ds}$
10	a, n, s,		$=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$	20	n, t, s,		$=\frac{2s}{n}-t.$

c) Bestimmung einzelner Glieder (12—23).

§. 419. 12. α) Es werden a und s gesucht, wenn $t=24$, $d=\frac{5}{7}$ und $n=22$. Nach Formel (17) ist

$$a=24-(22-1)\times\tfrac{5}{7}=24-15=9.$$

Mit Hülfe des für a gefundenen Wertes kann man jetzt s sowohl nach Formel (7) als auch nach Formel (8) suchen. Es ist also:

$$s=\tfrac{1}{2}\,.\,22(9+24)=11\times33=363.$$

β) Hier ist $a=-6$, $d=\frac{3}{4}$, $s=146\frac{1}{4}$; gesucht werden t und n. Nach Formel (2) und (14) ist:

$$t=\sqrt{2\,.\,146\tfrac{1}{4}\,.\,\tfrac{3}{4}+[(-6)-\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{4}]^2}-\tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{3}{4}$$

$$=\sqrt{219\tfrac{3}{8}+(-6\tfrac{3}{8})^2}-\tfrac{3}{8}$$

$$=\sqrt{\frac{14040+2601}{64}}-\tfrac{3}{8}=\tfrac{120}{8}-\tfrac{3}{8}=15\tfrac{3}{4}.$$

$$n=\frac{\frac{3}{4}-(-2\,.\,6)}{2\,.\,\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{2\,.\,146\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}+\left(\frac{-2\,.\,6-\frac{3}{4}}{2\,.\,\frac{3}{4}}\right)^2}$$

$$n=\frac{51}{6}+\sqrt{\frac{16641}{36}}=\frac{51}{6}+\frac{129}{6}=30.$$

13. Hier ist $a=-\frac{3}{4}$, $d=-\frac{7}{3}$, $t=-21\frac{3}{4}$; gesucht werden n und s. Nach Formel (13) und (6) ist:

$$n=\frac{-21\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})}{-\frac{7}{8}}+1=\frac{-21}{-\frac{7}{8}}+1=24+1=25.$$

$$s=\frac{-\frac{3}{4}+(-21\frac{3}{4})}{2}+\frac{(-21\frac{3}{4})^2-(-\frac{3}{4})^2}{2\,.\,(-\frac{7}{8})};\ \text{also}$$

$$s=\frac{-22\frac{1}{2}}{2}+\frac{473\frac{1}{16}-\frac{9}{16}}{-\frac{7}{4}}=-11\tfrac{1}{4}-270=-281\tfrac{1}{4};$$

14. d und t sind zu bestimmen, wenn $a=8\frac{1}{4}$, $n=147$ und $s=15967\frac{7}{8}$. Nach Formel (10) und (3) ist:

$$d=\frac{2\,.\,15967\frac{7}{8}-2\,.\,8\frac{1}{4}\,.\,147}{147(147-1)}=\frac{31935\frac{3}{4}-2425\frac{1}{2}}{21462}=1\tfrac{3}{8}.$$

$$t=\frac{2\,.\,15967\frac{7}{8}}{147}-8\tfrac{1}{4}=217\tfrac{1}{4}-8\tfrac{1}{4}=209.$$

15. n und a sind zu suchen, wenn $d=0{,}27$, $t=18{,}53$ und $s=628{,}43$. Nach Formel (16) und (19) ist:

$$n=\frac{2\,.\,18{,}53+0{,}27}{2\,.\,0{,}27}\pm\sqrt{\left(\frac{2\,.\,18{,}53+0{,}27}{2\,.\,0{,}27}\right)^2-\frac{2\,.\,628{,}43}{0{,}27}}$$

$$=\frac{37{,}33}{0{,}54}\pm\sqrt{\frac{1393{,}5289}{0{,}2916}-\frac{1256{,}86}{0{,}27}}=\frac{3733}{54}\pm\sqrt{\frac{361201}{2916}}$$

$=\frac{3733}{54}\pm\frac{691}{54}$. Nun ist der Wert $\frac{3733}{54}+\frac{601}{54}=80\frac{7}{27}$ unbrauchbar, folglich $n=\frac{3733-601}{54}=58.$

$$a=\frac{1}{2}\,.\,0{,}27+\sqrt{(18{,}58+\frac{1}{2}\,.\,0{,}27)^2-2\times0{,}27\times628{,}43}$$
$$=0{,}135+\sqrt{9{,}030025}=0{,}135+3{,}005=3{,}14.$$

16. Um die Summe der aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, von 1 anfangend, zu finden, bezeichne man die nte ungerade Zahl mit t, so verwandelt sich die Formel für $t=a+(n-1)d$ in die folgende: $t=1+(n-1)2$, weil 2 die Differenz dieser ungeraden Zahlen ist. Dieses giebt für $t=2n-1$. Setzt man nun diesen Wert für s in die Formel (7), so findet man: $s=\frac{1}{2}n[1+(2n-1)]=\frac{1}{2}n\,.\,2n=n^2$.

17. α) Gegeben: $d=8\frac{2}{3}$, $n=58$, $s=14026\frac{1}{3}$; gesucht a und t. Nach Formel (18) und (4) ist:

$$a=\frac{14026\frac{1}{3}}{58}-\frac{(58-1)\,.\,8\frac{2}{3}}{2}=241\frac{5}{6}-247=-5\frac{1}{6}.$$

$$t=\frac{14026\frac{1}{3}}{58}+\frac{(58-1)\,.\,8\frac{2}{3}}{2}=488\frac{5}{6}.$$

β) Gegeben: $a=5$, $t=23$, $s=392$; gesucht n und d. Nach Formel (15) und (11) ist:

$$n=\frac{2\,.\,392}{5+23}=28,$$

$$d=\frac{(23+5)(23-5)}{2\,.\,392-23-5}=\frac{23^2-5^2}{756}=\frac{2}{3}.$$

18. α) Da das siebente Glied der Progression eine negative Zahl und das 37. eine positive ist, so geht daraus hervor, daß die Differenz positiv und das Anfangsglied negativ sein muß. Heißt nun das erste Glied a und die Differenz d, so ist das siebente Glied $=a+6d$ und das 37. Glied $=a+36d$. Da jenes nun $=-6$ und dieses $=15\frac{3}{4}$ ist, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$(1)\ a+6d=-6 \text{ und } (2)\ a+36d=15\tfrac{3}{4}.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt:

$$30d=21\tfrac{3}{4};\ \text{folglich } d=\tfrac{29}{40}.$$

Daher ist, wenn wir den Wert für d in (1) setzen:

$$a+6\,.\,\tfrac{29}{40}=-6;\ \text{folglich } a=-10\tfrac{7}{20}.$$

Um nun t zu bestimmen, hat man $a=-10\frac{7}{20}$, $d=\frac{29}{40}$, und $n=55$; also ist nach Formel (1)

$$t=-10\tfrac{7}{20}+(55-1)\tfrac{29}{40}=28\tfrac{4}{5}.$$

Betrachtet man jetzt a, n, t als gegeben, so ist nach Formel (7)

$$s=\tfrac{1}{2}\,.\,55(-10\tfrac{7}{8}+28\tfrac{4}{5})=\tfrac{1}{2}\,.\,55\,.\,18\tfrac{9}{20}=507\tfrac{3}{8}.$$

β) Heißt die Differenz d und das erste Glied a, so ist das pte Glied $=a+(p-1)d$ und das qte Glied $=a+(q-1)d$. Da ersteres $=r$ und das andere $=u$ ist, so erhält man folgende 2 Gleichungen:

$$(1)\ a+(p-1)d=r;\ (2)\ a+(q-1)d=u.$$

Hieraus erhält man $d=\frac{u-r}{q-p}$; daher ist $a=\frac{(q-1)r-(p-1)u}{q-p}$. Da die Anzahl der Glieder n ist, so hat man aus a, d, n nach Formel (5)

$$s=\tfrac{1}{2}n\left\{2\cdot\frac{(q-1)r-(p-1)u}{q-p}+(n-1)\frac{u-r}{q-p}\right\} \text{ oder}$$

$$=\tfrac{1}{2}n\left\{\frac{2(qr-pu)+(n+1)(u-r)}{q-p}\right\}$$

Um nun das letzte Glied t zu finden, betrachte man wieder a, d, n als gegeben; alsdann hat man nach Formel (1)

$$t=\frac{(q-1)r-(p-1)u}{q-p}+(n-1)\frac{u-r}{q-p}$$

$$=\frac{(n-p)u-(n-q)r}{q-p}.$$

19. α) Kennt man die Differenz der verlangten Reihe, so lassen sich die Glieder leicht bestimmen. Die 8 zu suchenden Glieder bilden mit den beiden gegebenen zusammen 10 Glieder, demnach ist $a=7$, $t=13$, $n=10$; also ist nach Formel (9)

$d=\frac{13-7}{10-1}=\frac{2}{3}$. Demnach ist die Reihe:

$7,\ 7+\frac{2}{3},\ 7+2\cdot\frac{2}{3},\ 7+3\cdot\frac{2}{3},\ 7+4\cdot\frac{2}{3},\ 7+5\cdot\frac{2}{3},\ 7+6\cdot\frac{2}{3},$
$7+7\cdot\frac{2}{3},\ 7+8\cdot\frac{2}{3},\ 7+9\cdot\frac{2}{3}$ oder
$7,\ 7\frac{2}{3},\ 8\frac{1}{3},\ 9,\ 9\frac{2}{3},\ 10\frac{1}{3},\ 11,\ 11\frac{2}{3},\ 12\frac{1}{3},\ 13.$

β) Da hier n Glieder interpoliert werden sollen, so sind mit den beiden gegebenen a und b, $(n+2)$ Glieder, ferner das Anfangsglied $=a$, das letzte Glied $=b$. Man muß die Differenz suchen. Nach Formel (9) ist

$$d=\frac{b-a}{(n+2)-1}=\frac{b-a}{n+1}.$$

Demnach heißt das erste zu interpolierende Glied

$a+\frac{b-a}{n+1}$ und das rte Glied $=a+r\frac{b-a}{n+1}$.

20. Heißt die Differenz d und das erste Glied a, so ist das 19te Glied $a+18d$, das 43. Glied $a+42d$, das 57. Glied, $a+56d$, also die Summe dieser 3 Glieder $=3a+116d$, und weil diese Summe 827 ausmacht, so ist:

(1) $3a+116d=827$.

Die Summe der 4 ferner angegebenen Glieder beträgt $4a+223d$.

Es ist daher

(2) $4a+223d=1581$.

Aus (1) und (2) folgt, daß $a=5$ und $d=7$.

21. Heißt die Anzahl der Glieder der ersten Reihe x und die

Anzahl der Glieder der zweiten Reihe y, ist ferner $t=39$, $s=207$ und $t=124$ und $s=917$, so suche man durch diese gegebenen Werte das erste Glied a zu bestimmen, und man findet im ersten Falle nach Formel (20)

$$a=\frac{2.207}{x}-39 \text{ und im 2. Falle } a=\frac{2.917}{y}-124.$$

Da nun die Anfangsglieder in beiden Reihen gleich groß sind, so ist

$$\frac{2.207}{x}-39=\frac{2.917}{y}-124, \text{ hieraus erhält man:}$$

$$x=\frac{414}{\frac{1834}{y}-85}.$$

Nun muß y so gewählt werden, daß $\frac{1834}{y}$ nicht allein eine ganze Zahl und größer wird als 85, sondern auch, daß die Differenz $\frac{1834}{y}-85$ ein Teiler von 414 wird. Die Zahl 1834 hat 2, 7, 14, 131 u. s. w. und 414 hat 2, 6, 9, 18, 46 u. s. w. zu Teilern. Wählen wir unter den Teilern von 1834 für $y=14$, so wird

$$x=\frac{414}{\frac{1834}{14}-85}=\frac{414}{131-85}=\frac{414}{46}=9.$$

Ist also $x=9$, $y=14$, so ist $a=\frac{2.207}{9}-39=7$.

22. Die erste Reihe habe x Glieder und die zweite y, ist ferner für die erste Reihe $a=9$ und $s=25$ und für die zweite Reihe $a=8$, $s=36$, so suche man durch diese gegebenen Werte das Endglied t zu bestimmen. Man hat nach Formel (3) $t=\frac{2.25}{x}-9$ und $t=\frac{2.36}{y}-8$. Da nun die beiden Endglieder einander gleich sind, so ist:

$$\frac{2.25}{x}-9=\frac{2.36}{y}-8; \text{ daher } y=\frac{72x}{50-x}=-72+\frac{3600}{50-x}.$$

Die Aufgabe verlangt, daß man für x eine solche ganze Zahl setze, daß y ebenfalls eine ganze Zahl werde. Damit nun y ein Ganzes werde, muß $50-x$ ein Teiler von 3600 sein. Setzt man nun der Reihe nach

$x=2, 5, 10, 14, 20, 25, 26, 30, 35, 40, 45$, so ist

$y=3, 8, 18, 28, 48, 72, 78, 108, 168, 288, 648$.

Da nun $a=9$, $s=25$ und $n=2$, so ist nach Formel (10)

$$d=\frac{2.25-2.9.2}{2(2-1)}=7.$$

Da in der zweiten Reihe a=8, s=36 und n=3, so ist nach derselben Formel

$$d=\frac{2.36-2.8.3}{3(3-1)}=4.$$

Hiernach heißt die erste Reihe 9, 9+7 oder 9, 16.
" " " zweite " 8, 8+4, 8+2.4 oder 8, 12, 16.

Ist dagegen für die erste Reihe n=5 und für die zweite n=8, so ist d=−2 und d=−1.

Demnach heißt im zweiten Falle
die erste Reihe 9, 7, 5, 3, 1,
die zweite " 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Ist n=10 und n=18, so ist $d=-\frac{13}{9}$ und $d=-\frac{12}{17}$.

Hiernach heißt
die erste Reihe 9, $7\frac{5}{9}$, $6\frac{1}{9}$, $4\frac{2}{3}$, $3\frac{2}{9}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{9}$, $-2\frac{5}{9}$, −4,
die zweite Reihe 8, $7\frac{5}{17}$, $6\frac{10}{17}$, $5\frac{15}{17}$, $5\frac{3}{17}$, $4\frac{8}{17}$, $3\frac{13}{17}$, $3\frac{1}{17}$, $2\frac{6}{17}$, $1\frac{11}{17}$, $\frac{16}{17}$, $\frac{4}{17}$, $-\frac{8}{17}$, $-1\frac{3}{17}$, $-1\frac{15}{17}$, $-2\frac{10}{17}$, $-3\frac{5}{17}$, −4.
Sucht man für die anderen Fälle, wie vorstehend, die Werte für d, so findet man die anderen Reihen auf dieselbe Weise.

23. α) Eine Folge von Brüchen, deren Zähler gleich sind, deren Nenner aber eine arithmetische Progression bilden, heißt eine harmonische Reihe. Es bilden also mehrere Zahlen eine harmonische Reihe, wenn ihre reciproken Werte eine arithmetische Progression bilden. Das allgemeine Schema einer solchen Reihe ist:

$$\frac{b}{a}, \frac{b}{a+d}, \frac{b}{a+2b}, \ldots\ldots \frac{b}{a+(n-1)d}.$$

Die einfachste harmonische Reihe ist $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{n}$, und eben diese Reihe hat den Reihen der gedachten Art überhaupt den Namen gegeben, weil ihre ersten Glieder die Ausdrücke der Seitenlängen der s. g. harmonischen Töne sind.

Soll zwischen 3 und 9 ein harmonisches Glied eingeschaltet werden, so suche man d zu bestimmen. Die Reihe der reciproken Werte ist arithmetisch, also $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-d$, $\frac{1}{9}$. Da $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-2d$ ist, so ist $d=\frac{1}{9}$; folglich die harmonische Reihe 3, $4\frac{1}{2}$, 9.

β) Für je 3 aufeinanderfolgende Glieder einer harmonischen Reihe verhält sich die Differenz des ersten und zweiten Gliedes zu der Differenz des zweiten und dritten, wie das erste Glied zum dritten. Soll nun zwischen a und b das harmonische Glied (=x) gefunden werden, so ist

$$(a-x):(x-b)=a:b, \text{ folglich } x=\frac{2ab}{a+b}.$$

γ) Sollen zwischen $2\frac{1}{2}$ und $5\frac{3}{4}$ zwei harmonische Glieder eingeschaltet werden, so ist die Reihe der reciproken Werte

$$\tfrac{2}{5},\ \tfrac{2}{5}-d,\ \tfrac{2}{5}-2d,\ \tfrac{4}{23}.$$

Da nun $\frac{2}{5}-3d=\frac{4}{23}$, so ist $d=\frac{26}{345}$ und die verlangte Reihe $2\frac{1}{2}$, $3\frac{9}{112}$, $4\frac{1}{86}$, $5\frac{3}{4}$.

Sollen drei Glieder eingeschaltet werden, so ist $d=\frac{13}{230}$ und die Reihe lautet $2\frac{1}{2}$, $2\frac{72}{79}$, $3\frac{16}{33}$, $4\frac{18}{53}$, $5\frac{3}{4}$.

Werden endlich vier Glieder eingeschaltet, so ist $d=\frac{26}{575}$ und die Reihe $2\frac{1}{2}$, $2\frac{167}{204}$, $3\frac{41}{178}$, $3\frac{119}{152}$, $4\frac{71}{126}$, $5\frac{3}{4}$.

δ) Werden zwischen m und n zwei harmonische Glieder eingeschaltet, so ist die Differenz der Reihen der reciproken Werte, also $d=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ und die Reihe $m,\ \frac{3mn}{m+2n},\ \frac{3mn}{2m+n},\ n.$

Sollen aber drei eingeschaltet werden, so ist

$d=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ und die Reihe $m,\ \frac{4mn}{m+3n},\ \frac{4mn}{2m+2n},\ \frac{4mn}{3m+n},\ n.$

Bei Einschaltung von vier Gliedern endlich ist $d=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$ und die Reihe $m,\ \frac{5mn}{m+4n},\ \frac{5mn}{2m+3n},\ \frac{5mn}{3m+2n},\ \frac{5mn}{4m+n},\ n.$

3. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der arithmetischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 82.

a) Aufgaben (1—14).

§. 420. 1. α) Bilde ich mit meinen Nüssen ein gleichseitiges Dreieck, so kommt in die erste Reihe 1, in die zweite 2, in die dritte 3, überhaupt in jede folgende Reihe eine Nuß mehr zu liegen, als in der vorhergehenden, also ist $a=1$, $d=1$. Nun enthalte das Dreieck x Reihen, also $n=x$, mithin hat das gleichseitige Dreieck $\frac{1}{2}x[2\,.\,1+(x-1)1]=\frac{1}{2}x(x+1)$ Nüsse. Gewinne ich soviel Nüsse, als das Dreieck enthält, so habe ich jetzt $2\,.\,\frac{1}{2}x(x+1)=x(x+1)$ Nüsse. Nun sollen auf jeder Seite des Quadrates soviel Nüsse liegen, als zuvor in der Seite des Dreiecks enthalten waren, also x, mithin enthält das Quadrat x^2 Nüsse, und weil mir nach Bildung desselben 20 Nüsse übrig bleiben, so ist

$x^2+20=x(x+1)$; folglich $x=20$ Reihen; also ist:

$s=\frac{1}{2}\,.\,20[2+(20-1)\,.\,1]=10\,.\,21=210$ Nüsse.

β) Erhält der Bediente das erste Jahr 105 ℳ und jedes folgende Jahr 5 ℳ mehr, so bildet sein Lohn in den 11 Dienstjahren eine arithmetische Reihe, worin $a=105$, $d=5$ und $n=11$ gegeben sind; gesucht werden t und s. Nach Formel (1) und (7) ist:

$t=105+(11-1).5=105+50=155$ ℳ und
$s=\frac{1}{2}.11(105+155)=5\frac{1}{2}\times 260=1430$ ℳ.

2. Werden für den ersten Meter 3,24 ℳ und für jeden folgenden 5 ₰=0,05 ℳ mehr bezahlt, so bilden die Bohrkosten für den ganzen Brunnen eine arithmetische Reihe, worin $a=3,24$, $d=0,05$, $n=500$ ist. Gesucht werden t und s. Nun ist:
$t=3,24+(500-1).0,05=3,24+24,95=28,19$ ℳ,
$s=\frac{1}{2}.500[2.3,24+(500-1).0,05]=7857,50$ ℳ.

3. Der Spieler erhalte all sein eingesetztes Geld nach dem xten Spiele, d. h. nachdem er xmal gespielt hat, zurück, so hat er, da $a=1$, $d=1$ und $n=x$, im ganzen verloren, also
$s=\frac{1}{2}x[2.1+(x-1).1]=\frac{1}{2}x(x+1)$ *Fl.*
Nun hat er zum letzten Male x *Fl* eingesetzt; da er jetzt gewinnt und diese x *Fl* vervierzehnfacht werden, wodurch er sein verlorenes Geld wieder erhält, so muß der Gewinn dem Verluste gleich sein. Es ist also
$14x=\frac{1}{2}x(x+1)$ oder $14=\frac{1}{2}(x+1)$; folglich $x=27$.
Mithin erhält er beim 27. Spiele all sein Geld wieder.

4. War das erste Goldstück 1 Goldgulden, das zweite 2, das dritte 3 u. s. w. wert, und waren solcher Goldstücke 100 in dem Becher, so ist: $a=1$, $d=1$, $n=100$. Daher ist:
$s=\frac{1}{2}.100[2.1+(100-1)1]=5050$ Goldgulden.

5. 8600 ℳ à $4\frac{1}{2}$ pCt. bringen in 1 Jahre 387 ℳ Zinsen. Dadurch, daß jedes Jahr 200 ℳ zum Kapital zugelegt werden, vermehren sich jährlich die Zinsen um 9 ℳ, so daß also (8600+200) ℳ à $4\frac{1}{2}$ pCt. (387+9) ℳ Zinsen einbringen u. s. w. Demnach ist $a=387$, $d=9$, $n=17$. Gesucht wird s. Es ist nun
$s=\frac{1}{2}.17[2.387+(17-1).9]=7803$ ℳ
betragen diese Zinsen in 17 Jahren.

6. Hier ist $a=360$ ℳ, $d=-45$ ℳ, weil die Progression eine abnehmende ist und $s=990+360=1350$ ℳ. Gesucht wird n nach Formel (14):
$$n=\frac{\sqrt{8.(-45).1350+(720-(-45))^2}-720+(-45)}{2.(-45)}=5 \text{ Reiter.}$$

7. Hier ist $a=4,904$, $d=9,808$, $s=397,224$; gesucht wird n. Nun ist nach Formel (14):
$$n=\frac{9,808-2.4,904}{2.9,808}+\sqrt{\frac{2.397,224}{9,808}+\left(\frac{2.4,904-9,808}{2.9,808}\right)^2};$$
$$=\sqrt{\frac{2.397,224}{9,808}}=\sqrt{81}=9 \text{ Sekunden.}$$

8. Einen senkrecht aufgeworfenen Körper, z. B. einen Stein oder eine Kugel zieht die Schwere in der ersten Sekunde

4,904 *m*, in der zweiten 3 . 4,904 *m*, in der dritten 5 . 4,904 *m*, in der vierten 7 . 4,904 *m* u. s. w. oder in 2 Sekunden 4 . 4,904, in 3 Sekunden 9 . 4,904 u. s. w. herunter. Wenn nun ein Körper mit der anfänglichen Geschwindigkeit von 313,856 *m*=64 . 4,904 *m* senkrecht aufwärts geworfen wird, so steigt er

in der 1. Sekunde 64 . 4,904—1 . 4,904=63 . 4,904 *m*;
„ „ 2. „ 64 . 4,904—3 . 4,904=61 . 4,904 „
„ „ 3. „ 64 . 4,904—5 . 4,904=59 . 4,904 „
„ „ 4. „ 64 . 4,904—7 . 4,904=57 . 4,904 „
u. s. w.

Hieraus folgt, daß der Körper in jeder folgenden Sekunde 2 . 4,904=9,808 *m* weniger zurücklegt, als in der vorhergehenden und in der letzten 63 . 4,904 *m* weniger, als in der ersten Sekunde. Demnach ist a=313,856—4,904=308,952, d=—9,808, t=64 . 4,904—63 . 4,904=4,904. Gesucht wird die Höhe seines Steigens und die Zeit, die er dazu gebraucht, also s und n. Nach Formel (6) ist:

$$s=\frac{308,952+4,904}{2}+\frac{[4,904+308,952][4,904-308,952]}{2\,.\,(-9,808)}$$

$$=\frac{313,856}{2}+\frac{(4,904)^2-(308,952)^2}{-19,616}=5021,695\ m.$$

Nach Formel (13) beträgt die Zeit, die er zum Steigen gebrauchte:

$$n=\frac{4,904-308,952}{-19,616}+1=31+1=32 \text{ Sekunden.}$$

Also zu Anfang der 33. Sekunde fängt er wieder an herabzufallen und gelangt zur Erde in derselben Zeit, welche er zum Aufsteigen nötig hatte, schlägt auch mit derselben Geschwindigkeit auf, mit welcher er die Erde verließ, wie er überhaupt an denselben Punkten des Weges im Aufsteigen und Herabfallen dieselbe Geschwindigkeit hat. Demnach kömmt er in 2 . 32=64 Sekunden wieder an dem Orte an, von wo er aufgestiegen war.

9. Wenn beide Körper nach x Sekunden zusammenstoßen, so ist, da der fallende Körper in der ersten Sekunde 4,904 *m*, in jeder folgenden Sekunde aber 2 . 4,904=9,808 *m* mehr zurücklegt, a=4,904, d=9,808 und n=x, folglich macht er in x Sekunden nach Formel (5):

$$\tfrac{1}{2}x[2\,.\,4,904+(x-1)9,808]=4,904x^2\ m.$$

Da der steigende Körper in der ersten Sekunde mit einer Geschwindigkeit von 318 *m* senkrecht aufwärts geschossen wird, so legt er in derselben 318—4,904 *m* zurück, und da er in jeder folgenden Sekunde 9,808 *m* weniger zurücklegt, so ist a=318—4,904, d=—9,808 und n=x, mithin legte dieser in der Zeit x nach derselben Formel (5) zurück:

$\frac{1}{2}x[2(318-4{,}904)+(x-1).(-9{,}808)]=$
$317{,}996x-4{,}904x^2$ *m.*

Beim Zusammentreffen haben sie den Weg von 975 *m* abgemacht; also ist:

$4{,}904x^2+317{,}996x-4{,}904x^2=795$;

daher $317{,}996x=795$; folglich $x=2{,}5$ Sekunden.

10. Treffen die beiden Boten nach x Tagen zusammen, so hat, da A am ersten Tage 1 Meile, jeden folgenden Tag aber immer 1 Meile mehr zurücklegt, und hiernach $a=1$, $d=1$ und $n=x$ ist, der erste in der angegebenen Zeit

$\frac{1}{2}x[2.1+(x-1).1]=\frac{1}{2}x(x+1)$ Meilen gemacht.

Legt der zweite aber am ersten Tage 20 Meilen zurück, jeden folgenden Tag aber immer 2 Meilen weniger, so hat der zweite Bote, da hier $a=20$, $d=-2$ und $n=x$, während dieser Zeit $\frac{1}{2}x[2.20+(x-1)(-2)]=x(21-x)$ Meilen gemacht.

Beim Zusammentreffen haben sie 165 Meilen gemacht; demnach ist:

$\frac{1}{2}x(x+1)+x(21-x)=165$ oder

$x^2-43x=-330$; hieraus erhält man durch Umformung

$x(x-43)=10(10-43)$; folglich $x=10$ Tage.

11. Erhält der erste Mann a *M*, so erhält der zweite, der ein Bestimmtes, etwa d, weniger bekommt, $a-1.d$, also der fünfte $a-4.d$, der zwölfte $a-11.d$; der sechszehnte $a-15d$ und der siebente $a-6.d$. Da nun der fünfte und zwölfte Mann zusammen 30 *M* und der sechszehnte und siebente Mann 27 *M* erhalten, so ist:

(1) $(a-4d)+(a-11d)=30$ oder $2a-15d=30$,

(2) $(a-15d)+(a-6d)=27$ oder $2a-21d=27$.

Aus (1) und (2) folgt $a=18\frac{3}{4}$ *M* und $d=\frac{1}{2}$. Also erhält

der fünfte Mann $18\frac{3}{4}-4.\frac{1}{2}=16\frac{3}{4}$ *M*

„ zwölfte „ $18\frac{3}{4}-11.\frac{1}{2}=13\frac{1}{4}$ „

„ sechszehnte „ $18\frac{3}{4}-15.\frac{1}{2}=11\frac{1}{4}$ „

„ siebente „ $18\frac{3}{4}-6.\frac{1}{2}=15\frac{3}{4}$ „

Zur Bestimmung der verteilten Summe haben wir

$a=18\frac{3}{4}$, $d=\frac{1}{2}$ und $n=28$. Daher ist

$s=\frac{1}{2}.28[2.18\frac{3}{4}+(28-1)(-\frac{1}{2})]=336$ *M*.

12. Da bei einer Tiefe von 62,77 *m* die Wärme $9{,}5^0$ R. beträgt und bei je 36,09 *m* um 1^0 R. zunimmt, so ist $a=36{,}09$, $d=36{,}09$, $n=80^0-9{,}5^0=70{,}5^0$. Gesucht wird t. Nach Formel (1) ist $t=36{,}09+(70{,}5-1)36{,}09=2544{,}35$. Hierzu die 62,77 *m* addiert, giebt die Tiefe an, bei welcher die Wärme $=80^0$ ist, nämlich 2607,12 *m*. Um die Tiefe der Erde zu finden, bei welcher das Blei schmilzt, hat man wieder, da hier $n=283{,}2-9{,}5=273{,}7$ ist, $t=36{,}09+(273{,}7-1).36{,}09=9877{,}83$, wozu 62,77 addiert, giebt 9940,6 *m*. Um die Tem-

peratur zu finden, welche am Mittelpunkte der Erde herrscht, hat man außer den bereits bekannten a und d noch $t=6377400-62{,}77=6377337{,}23$. Nun ist nach Formel (13)

$$n=\frac{6377337{,}23-36{,}09}{36{,}09}+1=176706{,}49.$$

Hierzu kommen die $9{,}5^0$, die man bei einer Tiefe von 62,77 *m* antrifft, folglich beträgt die Hitze im Mittelpunkte der Erde

$$176706{,}49^0+9{,}5^0=176715{,}99^0.$$

13. Die Fahrt habe x Tage gedauert. In diesen x Tagen haben 175 Mann hinreichenden Wasservorrat, also hätte derselbe Vorrat auch für 175x Mann auf einen Tag ausgereicht. Vor dem Ausbruche des Skorbuts ist das Schiff 30 Tage auf der Fahrt gewesen; zudem hat ein Sturm die Fahrt um 3 Wochen =21 Tage verzögert; daher haben die 175 Mann schon 51 Tage lang vom Wasservorrat gezehrt oder 175 . 51 Mann 1 Tag lang. Es blieb daher noch für 175(x—51) Mann auf 1 Tag Wasservorrat. Nach 30 Tagen, also vom 31. Tage der Fahrt an, starben jeden Tag 3 Mann, weshalb am 31. Tage nur noch 172 Mann auf dem Schiffe waren. Da sich nun mit jedem folgenden Tage die Anzahl der Mann um 3 vermindert, so erhalten wir die arithmetische Progression:

$$172+(172-3)+(172-2.3)+(172-3.3)+..+172-(x-31).3.$$

Hierin ist $a=172$, $d=-3$, $t=172-(x-31).3$ und weil $n=x-30$, so ist die Summe

$$s=[2.172-3.(x-31)]\tfrac{1}{2}(x-30) \text{ Mann; daher ist:}$$

$$175(x-51)=[2.172-3(x-21)]\tfrac{1}{2}(x-30) \text{ oder}$$

$$350(x-51)=(437-3x)(x-30).$$

Hieraus folgt $x=79$ Tage.

14. α) Wenn $y=7x+3$ ist und für x allgemein $3+2n$ gesetzt wird, wobei n nach und nach die Werte 0, 1, 2, 3..... erhält, so ist $y=7(3+2n)+3=24+14n$. Die Differenz der Reihe ist also konstant und zwar $d=14$. Es ist daher die Progression eine arithmetische.

β) Es sei y eine Funktion des ersten Grades von x, also $y=ax+b$. Setzen wir nun für x eine Reihe von Werten, die eine arithmetische Reihe bilden, also etwa folgende, c, $c+d$, $c+2d$, $c+3d$ u. s. w., so erhalten wir für die entsprechenden Werte von y:

$$y_1=ac+b;\ y_2=ac+b+ad;\ y_3=ac+b+2ad;$$
$$y_4=ac+b+3ad,$$

also eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Anfangsglied $ac+b$ und deren Differenz ad ist.

b) Regel vom falschen Satze.

§. 421. Gegeben sei die Gleichung $ax+b=c$. Denken wir uns für x zwei Glieder einer arithmetischen Reihe gesetzt: $\alpha+\mu\delta$, $\alpha+\nu\delta$, die wir mit α' und α'' bezeichnen wollen. Wir erhalten dann für $ax+b$ Werte, die im allgemeinen nicht gleich c sind. Subtrahieren wir sie von c, so haben wir die sogenannten Fehler der Gleichung. Setzen wir nun die vorher angegebenen Werte in $ax+b$ wirklich ein, so erhalten wir:

$$a\alpha+a\mu\delta+b \text{ und } a\alpha+a\nu\delta+b, \text{ also die beiden Fehler:}$$
$$c-a\alpha-a\mu\delta-b \text{ und } c-a\alpha-a\nu\delta-b.$$

Bezeichnen wir den ersten Fehler mit φ', so ist der letztere, der mit φ'' bezeichnet werden möge, gleich $\varphi'-a(\nu-\mu)\delta$. Da wir nun die Differenz δ der Progression unbestimmt lassen, so können wir uns δ so gewählt denken, daß der wahre Wert von x unter den Gliedern der nach beiden Seiten beliebig erweitert gedachten Progression, aus welcher wir zwei Werte für x setzten, vorkommt. Setzen wir also den wahren Wert von $x=\alpha+\sigma\delta$, so wird der Fehler der Gleichung, wie vorhin $=\varphi'-a(\sigma-\mu)\delta$. Dieser muß aber $=0$ sein; wir haben also die Gleichung $0=\varphi'-a(\sigma-\mu)\delta$, woraus $\sigma-\mu=\frac{\varphi'}{a\delta}$ folgt. Aus der Gleichung $\varphi''=\varphi'-a(\nu-\mu)\delta$ folgt aber $a\delta=\frac{\varphi'-\varphi''}{\nu-\mu}$. Substituieren wir dieses Resultat, so ist also jetzt $\sigma-\mu=\frac{\varphi'(\nu-\mu)}{\varphi'-\varphi''}$. Aus den beiden Gleichungen $\alpha'=\alpha+\mu\delta$ und $\alpha''=\alpha+\nu\delta$ folgt aber durch Subtraktion $(\nu-\mu)\delta=\alpha''-\alpha'$; also $\nu-\mu=\frac{\alpha''-\alpha'}{\delta}$.

Durch Einsetzen dieses Wertes erhalten wir endlich:

$$\sigma-\varphi=\frac{\varphi'(\alpha''-\alpha')}{(\varphi'-\varphi'')\delta} \text{ oder } (\sigma-\mu)\delta=\frac{\varphi'\alpha''-\varphi'\alpha'}{\varphi'-\varphi''}.$$

Nun war aber der wahre Wert von x

$$=\alpha+\sigma\delta=\alpha+\mu\delta+(\sigma-\mu)\delta=\alpha'+(\sigma-\mu)\delta.$$

Durch Einsetzen des vorigen Wertes finden wir also den wahren Wert von $x=\alpha'+\frac{\varphi'\alpha''-\varphi'\alpha'}{\varphi'-\varphi''}$; also auch, wenn wir den Nenner allgemein machen $x_1=\frac{\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'}{\varphi'-\varphi''}$, wenn x_1 eben den wahren Wert von x bedeutet. Man setzt also für x in der Gleichung $ax+b=c$ zwei beliebige Werte α' und α'' und sucht die zugehörigen Fehler φ' und φ''. Dann multipliziert man den ersten Fehler mit dem zweiten Werte für x und den zweiten Fehler mit dem ersten Werte für x und subtrahiert letzteres

Produkt vom ersten und dividiert die Differenz durch die Differenz der beiden Fehler, so erhält man den wahren Wert für x.

Wir wollen nun annehmen, man habe zwei Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei Unbekannten, etwa

$$(1)\ mx+ny=o$$
$$(2)\ px+qy=r.$$

Aus denselben folgt durch Elimination: $(qm-np)x=oq-rn$. Um den Wert für x zu finden, wird man also zwei Werte für x setzen: α' und α'', die Fehler aus der Eliminationsgleichung berechnen u. s. w. wie vorher. Diese Fehler können wir aber aus den beiden gegebenen Gleichungen direkt ohne Hülfe der Eliminationsgleichung finden. Denken wir uns für x einen beliebigen Wert A gesetzt, so ist der Fehler, den die Eliminationsgleichung liefert und den wir mit F bezeichnen wollen:

$$F=oq-rn-qmA+npA.$$

Denken wir uns nun aber in der ersten der gegebenen Gleichungen $x=A$ gesetzt und bestimmen aus derselben y, so erhalten wir $y=\frac{o-mA}{n}$. Setzen wir die beiden so gefundenen Werte für x und y in die zweite der gegebenen Gleichungen, so erhalten wir für $px+qy$ den Wert $pA+q\cdot\frac{o-mA}{n}$. Hiermit ist der entsprechende Fehler $F'=r-pA-\frac{qo}{n}+\frac{mqA}{n}$ gegeben. Vergleichen wir diesen Fehler mit F, so ergiebt sich $F=-nF'$. Was für den Wert $A=x$ gilt, gilt natürlich ebenso für die beliebigen Werte α' und α''. Zur Bestimmung des Wertes von x hat man nach dem Obigen die Formel: $x=\frac{\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'}{\varphi'-\varphi''}$, wo α' und α'' die beiden willkürlich für x gesetzten Werte bedeuten und φ' und φ'' die diesen entsprechenden aus der Eliminationsgleichung zu berechnenden Fehler, nämlich $oq-rn-(qm-np)\alpha'$ und $oq-rn-(qm-np)\alpha''$. Setzen wir nun aber in die erste der gegebenen Gleichungen die Werte α' und α'' ein, bestimmen dann die zugehörigen Werte von y und setzen diese Werte in die zweite Gleichung, bestimmen die entsprechenden Fehler $r-px-qy$ und bezeichnen diese Fehler mit φ'_1 und φ'_2, so ist nach dem Vorherbewiesenen $\varphi'=-n\varphi'_1$ und $\varphi''=-n\varphi'_2$. Setzen wir diese Werte in die Formel $x=\frac{\varphi'\alpha''-\varphi''\alpha'}{\varphi'-\varphi''}$, so wird aus derselben $x_1=\frac{(-n)(\varphi'_1\alpha''-\varphi'_2\alpha')}{(-n)(\varphi'_1-\varphi'_2)}=\frac{\varphi'_1\alpha''-\varphi'_2\alpha'}{\varphi'_1-\varphi'_2}$. Diese Formel enthält folgenden Satz: Um aus den beiden Gleichungen $mx+ny=o$ und $px+qy=r$ den Wert von x zu finden, wird man in die

erste Gleichung für x zwei beliebige Werte α' und α'' setzen, die diesen entsprechenden Werte für y aus derselben nehmen, etwa y_1 und y_2 und dann je zwei zusammengehörende in die zweite Gleichung einsetzen und wird dann also aus der zweiten zwei Fehler:

$$\varphi'_1 = r - p\alpha' - qy_1 \text{ und } \varphi'_2 = r - p\alpha'' - qy_2$$

erhalten. Man multipliziert dann den ersten Fehler mit dem zweiten Werte von x, den zweiten Fehler mit dem ersten für x angenommenen Werte und subtrahiert letzteres Produkt von ersterem; ebenso subtrahiert man die beiden Fehler und dividiert die erste Differenz durch die zweite; der auf diese Weise entstandene Quotient liefert den wahren Wert für x.

Die Werte von α' und α'' sind ganz willkürlich; setzen wir z. B. 0 und 1 für dieselben, so wird

$$x_1 = \frac{\varphi'_1 \cdot 1 - \varphi'_2 \cdot 0}{\varphi'_1 - \varphi'_2} = \frac{\varphi'_1}{\varphi'_1 - \varphi'_2}.$$

Bei dieser Voraussetzung brauchen wir also, um den wahren Wert für x zu finden, nur den ersten Fehler durch die Differenz zwischen beiden zu dividieren. Auch läßt die Regel Abkürzungen zu, wenn für α'' eine Zahl genommen wird, die nur um 1 größer ist als α', wenn also $\alpha'' = \alpha' + 1$ genommen wird. Setzen wir diesen Wert ein, so wird

$$x_1 = \frac{\varphi'_1(\alpha'+1) - \varphi'_2\alpha'}{\varphi'_1 - \varphi'_2} = \frac{\varphi'_2\alpha' - \varphi'_2\alpha' + \varphi'_1}{\varphi'_1 - \varphi'_2} = \alpha' + \frac{\varphi'_1}{\varphi'_1 - \varphi'_2}.$$

In diesem Falle addiert man also zum ersten für x angegenommenen Werte α' den Quotienten, den man erhält, wenn man den zweiten Fehler vom ersten abzieht und diese Differenz in den ersten Fehler dividiert.

Die Regel vom falschen Satze giebt nur dann ein richtiges Resultat, wenn die Aufgabe auf eine Gleichung vom ersten Grade mit einer oder zweien Unbekannten führt. Daß sie indessen zur Ermittelung von Näherungswerten mit Vorteil bei höheren Gleichungen ihre Anwendung findet, wird im III. Teile dieses Werkes gezeigt werden.

c) Die verschiedenen Reihen nebst Summierung derselben (15—22).

§. 422. 15. Es sei eine Reihe von Zahlen: A, B, C, D u. s. w. gegeben. Subtrahieren wir jede von der folgenden, so erhalten wir in den Differenzen eine neue Reihe von Zahlen: B—A, C—B, D—C u. s. w. Diese Reihe heißt in Bezug auf die gegebene Reihe, welche „Hauptreihe" genannt wird, die erste Differenzenreihe. Subtrahieren wir nun auch in der ersten Differenzenreihe jedes Glied von dem folgenden, so bilden diese Differenzen eine Reihe, die in Bezug auf die Haupt-

reihe die zweite Differenzenreihe heißt u. s. w. Setzen wir dieses Verfahren fort und finden wir alsdann, daß alle Glieder der nten Differenzenreihe einander gleich sind, so heißt die Hauptreihe eine arithmetische Reihe der nten Ordnung. Setzen wir nun an die Stelle der Hauptreihe die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen, also folgende Reihe:

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \ldots (n-1)^2, n^2, (n+1)^2, (n+2)^2 \ldots,$

wo n gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist, so behauptet der hier ausgesprochene Satz, daß die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Reihe, also die erste Differenzenreihe, eine arithmetische Reihe in gewöhnlichem Sinne, also nach unserer umfassendern Definition eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Bilden wir nun die zweite Differenzenreihe, so ist klar, daß deren sämtliche Glieder einander gleich sind, so daß also der zu beweisende Satz auch in folgender Form ausgesprochen werden kann: „Die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen ist eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung". Für die ersten Glieder der fraglichen Reihe überzeugt man sich empirisch leicht von der Richtigkeit des Satzes; es ist nämlich:

Hauptreihe:	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64.
1. Differenzenreihe:		3,	5,	7,	9,	11,	13,	15.
2. „ „			2,	2,	2,	2,	2,	2.

Also sind wirklich die Glieder der zweiten Differenzenreihe alle gleich. Es kommt nun darauf an, den Satz allgemein zu beweisen. Wir nehmen zu dem Ende vier allgemein ausgedrückte, auf einander folgende Glieder der Hauptreihe, also etwa $(n-1)^2$, n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, wo n jede beliebige ganze Zahl sein kann. Wir bilden nun die diesen Gliedern entsprechenden drei Glieder der ersten Differenzenreihe; also:

$$n^2-(n-1)^2, \quad (n+1)^2-n^2, \quad (n+2)^2-(n+1)^2 \text{ oder}$$
$$n^2-n^2+2n-1, \quad n^2+2n+1-n^2, \quad n^2+4n+4-n^2-2n-1 \text{ oder}$$
$$2n-1, \quad 2n+1, \quad 2n+3.$$

Aus diesen drei Gliedern können wir nun die zwei Glieder der zweiten Differenzenreihe bilden:

$$(2n+1)-(2n-1), \quad (2n+3)-(2n+1) \text{ oder:}$$
$$2n+1-2n+1, \quad 2n+3-2n-1 \text{ oder endlich}$$
$$2. \quad 2.$$

Also sind wirklich die Glieder der zweiten Differenzenreihe einander gleich und zwar $=2$. Hierdurch ist der Satz allgemein bewiesen, da ja, indem wir n gehörig annehmen, die Zahlen: $(n-1)^2$, n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$ mit jeden 4 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen identisch werden können.

16. Der Satz dieser Nummer enthält den Satz der vorhergehenden als speziellen Fall in sich. Der letztere behauptete nämlich: Quadrieren wir die Glieder der arithmetischen Reihe

erster Ordnung: 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., so erhalten wir eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung; der jetzt zu beweisende Satz dagegen behauptet, wenn wir ihn, den Entwickelungen des vorhergehenden Satzes gemäß, in etwas anderer Fassung aussprechen: Quadrieren wir die Glieder einer beliebigen arithmetischen Reihe, die wir durch a, a+d, a+2d u. s. w. bezeichnen wollen, so erhalten wir eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung. Die fragliche Reihe ist also hier:

$$a^2,\ (a+d)^2,\ (a+2d)^2,\ (a+3d)^2 \ldots.$$

Zum Beweise schlagen wir auch ganz denselben Weg ein. Wir nehmen wieder 4 allgemein ausgedrückte Glieder der fraglichen Reihe, die wir durch

$$[a+(n-1)d]^2,\ (a+nd)^2,\ [a+(n+1)d]^2,\ [a+(n+2)d]^2$$

bezeichnen. Bilden wir jetzt die diesen 4 Ausdrücken entsprechenden drei Glieder der ersten Differenzenreihe:

$$(a+nd)^2-[a+(n-1)d]^2,\ [a+(n+1)d]^2-(a+nd)^2,$$
$$[a+(n+2)d]^2-[a+(n+1)d]^2 \text{ oder}$$
$$2ad+(2n-1)d^2,\ 2ad+(2n+1)d^2,\ 2ad+(2n+3)d^2.$$

Bilden wir nun die diesen drei Gliedern entsprechenden zwei Glieder der zweiten Differenzenreihe, so erhalten wir:

$$2d^2,\ 2d^2.$$

Diese zwei Glieder sind identisch gleich; es ist also die gegebene Reihe eine Reihe der zweiten Ordnung, folglich bilden die Quadrate der Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung eine solche der zweiten Ordnung.

17. Dieser Satz behauptet, daß die dritten Differenzen der Kuben der natürlichen Zahlen einander gleich seien, d. h. daß die Kuben der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe dritter Ordnung bilden. Zum Beweise nehmen wir fünf aufeinander folgende Glieder aus der Hauptreihe, also etwa:

$$(n-2)^3,\ (n-1)^3,\ n^3,\ (n+1)^3,\ (n+2)^3.$$

Hieraus folgen die 4 entsprechenden Glieder der ersten Differenzenreihe:

$$(n-1)^3-(n-2)^3;\ n^3-(n-1)^3;\ (n+1)^3-n^3;$$
$$(n+2)^3-(n+1)^3$$
$$\text{oder } 3n^2-9n+7;\ 3n^2-3n+1;\ 3n^2+3n+1;$$
$$3n^2+9n+7.$$

Bilden wir hieraus die 3 entsprechenden Glieder der zweiten Differenzenreihe, so erhalten wir:

$$6n-6;\ 6n;\ 6n+6.$$

Endlich können wir nun die zwei entsprechenden Glieder der dritten Differenzenreihe bilden:

$$6,\ 6,$$

und da diese also gleich sind, so ist in der That die Reihe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

18. Es sei $ax^3+bx^2+cx+d=y$. Setzen wir nun für x die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, so bilden die entsprechenden Werte für y die Glieder einer arithmetischen Reihe dritter Ordnung, d. h. ihre dritten Differenzen sind konstant. Wir setzen also für x etwa folgende fünf aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe:

$$a_1+(n-2)d_1;\ a_1+(n-1)d_1;\ a_1+nd_1;\ a_1+(n+1)d_1;\ a_1+(n+2)d_1.$$

Dadurch erhalten wir folgende fünf Werte für y:

$$y_1=aa_1{}^3+3aa_1{}^2(n-2)d_1+3aa_1(n-2)^2d_1{}^2+a(n-2)^3d_1{}^3+ba_1{}^2+2ba_1(n-2)d_1+b(n-2)^2d_1{}^2+ca_1+c(n-2)d_1+d.$$

$$y_2=aa_1{}^3+3aa_1{}^2(n-1)d_1+3aa_1(n-1)^2d_1{}^2+a(n-1)^3d_1{}^3+ba_1{}^2+2ba_1(n-1)d_1+b(n-1)^2d_1{}^2+ca_1+c(n-1)d_1+d.$$

$$y_3=aa_1{}^3+3aa_1{}^2nd_1+3aa_1n^2d_1{}^2+an^3d_1{}^3+ba_1{}^2+2ba_1nd_1+bn^2d_1{}^2+ca_1+cnd_1+d.$$

$$y_4=aa_1{}^3+3aa_1{}^2(n+1)d_1+3aa_1(n+1)^2d_1{}^2+a(n+1)^3d_1{}^3+ba_1{}^2+2ba_1(n+1)d_1+b(n+1)^2d_1{}^2+ca_1+c(n+1)d_1+d.$$

$$y_5=aa_1{}^3+3aa_1{}^2(n+2)d_1+3aa_1(n+2)^2d_1{}^2+a(n+2)^3d_1{}^3+ba_1{}^2+2ba_1(n+2)d_1+b(n+2)^2d_1{}^2+ca_1+c(n+2)d_1+d.$$

Wir können nun die 4 entsprechenden Glieder der ersten Differenzenreihen bilden:

$$y_2-y_1;\ y_3-y_2;\ y_4-y_3;\ y_5-y_4.$$

Diese sind, wenn wir sie mit A, B, C, D bezeichnen:

$$A=3aa_1{}^2d_1+3aa_1[(n-1)^2-(n-2)^2]d_1{}^2+a[(n-1)^3-(n-2)^3]d_1{}^3+2ba_1d_1+b[(n-1)^2-(n-2)^2]d_1{}^2+cd_1.$$

$$B=3aa_1d_1+3aa_1[n^2-(n-1)^2]d_1{}^2+a[n^3-(n-1)^3]d_1{}^3+2ba_1d_1+b[n^2-(n-1)^2]d_1{}^2+cd_1.$$

$$C=3aa_1d_1+3aa_1[(n+1)^2-n^2]d_1{}^2+a[(n+1)^3-n^3]d_1{}^3+2ba_1d_1+b[(n+1)^2-n^2]d_1{}^2+cd_1.$$

$$D=3aa_1d_1+3aa_1[(n+2)^2-(n+1)^2]d_1{}^2+a[(n+2)^3-(n+1)^3]d_1{}^3+2ba_1d_1+b[(n+2)^2-(n+1)^2]d_1{}^2+cd_1.$$

Bilden wir jetzt B—A, C—B, D—C, so erhalten wir drei Glieder der zweiten Differenzenreihe A^1, B^1, C^1. Es ist dann nämlich:

$$A^1=2\,.\,3aa_1d_1{}^2+a(6n-6)d_1{}^3+2bd_1{}^2.$$

$$B^1=2\,.\,3aa_1d_1{}^2+a\,.\,6n\,.\,d_1{}^3+2bd_1{}^2.$$

$$C^1=2\,.\,3aa_1d_1{}^2+a(6n+6)d_1{}^3+2bd_1{}^2.$$

Aus diesen 3 Ausdrücken bilden sich endlich die zwei entsprechenden Glieder der dritten Differenzenreihen $B'-A'$ und $C'-B'$, nämlich $A''=6ad_1{}^3$ und $B''=6ad_1{}^3$.

Diese Differenzen sind also konstant und da dieser Beweis

für je 5 aufeinanderfolgende Glieder der Hauptreihe gilt, so ist bewiesen, daß alle Glieder der dritten Differenzenreihen konstant sind.

19. Denken wir uns die Reihe der ungeraden Zahlen

$$\underbrace{1},\ \underbrace{3,\ 5},\ \underbrace{7,\ 9,\ 11},\ \underbrace{13,\ 15,\ 17,\ 19}\ldots\ldots\ldots$$

und nehmen von Anfang an die erste, die Summe der zwei folgenden, die Summe der drei folgenden, die Summe der vier folgenden, wie die Striche andeuten, so erhalten wir die dritten Potenzen von 1, 2, 3, 4 u. s. w. Wenn dieser Satz richtig ist, so drückt sich also n^3 durch eine Reihe von n aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen aus. Es kommt noch darauf an, die erste derselben zu bestimmen. Die Reihe für 1^3 enthält eine ungerade Zahl, die für 2^3 enthält 2, die für 3^3 enthält 3 u. s. w. Die für $(n-1)^3$ enthält $(n-1)$ ungerade Zahlen. Die Reihen für $1^3, 2^3, 3^3 \ldots (n-1)^3$ enthalten also $1+2+3 \ldots\ldots + (n-1)$ ungerade Zahlen oder $\frac{1}{2}(n-1)n$.

Die Reihe für n^3 beginnt demnach mit der $[\frac{1}{2}(n-1)n+1]$ten ungeraden Zahl, dieselben in ihrer natürlichen Reihenfolge nebeneinander geschrieben, gedacht. Die erste ungerade Zahl ist nun $1=2.1-1$; die zweite $3=2.2-1$; die dritte $5=2.3-1$; die vierte $7=2.4-1$; die αte$=2.\alpha-1$. Also ist die $[\frac{1}{2}(n-1)n+1]$te ungerade Zahl

$$=2[\tfrac{1}{2}(n-1)n+1]-1=(n-1)n+1.$$

Die erste ungerade Zahl, womit die Reihe für n^3 beginnt, ist somit $(n-1)n+1$. Da diese Reihe nun aus n aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen besteht, so ist es leicht, die Reihe zu konstruieren:

$$(n-1)n+1;\ (n-1)n+3;\ (n-1)n+5;$$
$$\ldots\ldots\ (n-1)n+2n-1.$$

Die Summe dieser Reihe ist zunächst

$$=n(n-1)n+1+3+5+\ldots 2n-1=$$
$$n^2(n-1)+\tfrac{1}{2}n\,.\,2n=n^2(n-1)+n^2=n^3-n^2+n^2=n^3.$$

Also ist die Reihe wirklich gleich der dritten Potenz von n und damit ist der Satz allgemein bewiesen.

20. Mittels des vorhergehenden Satzes läßt sich nun leicht die Aufgabe lösen, die Summe der Kuben der natürlichen Zahlen zu finden, d. h. die Reihe $1^3+2^3+3^3 \ldots + n^3$ zu summieren. Es ist nämlich $1^3 =$ der ersten ungeraden Zahl, 2^3 gleich der Summe der zwei folgenden, 3^3 gleich der Summe der drei hierauf folgenden, 4^3 gleich der Summe der 4 hierauf folgenden u. s. w., n^3 endlich gleich der Summe von n ungeraden Zahlen. Es ist also $1^3+2^3+3^3+4^3 \ldots\ldots + n^3$ gleich der Summe der ersten ungeraden Zahl + den zwei folgenden + den 3 folgenden + den 4 folgenden ..... + den n letzten.

Die fragliche Summe ist also gleich der Summe einer Reihe von ungeraden Zahlen, in der die Anzahl der Glieder angezeigt wird durch die Summe $1+2+3+4 \ldots +n$. Die Anzahl der Glieder ist demnach $\frac{1}{2}n(n+1)$. Um also die Summe $1^3+2^3+3^3+4^3 \ldots +n^3$ zu finden, haben wir eine Reihe von ungeraden Zahlen zu summieren, also eine arithmetische Reihe, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 2 und deren Anzahl der Glieder $\frac{1}{2}n(n+1)$ ist. Nach Formel 5 der Formeltafel für die arithmetischen Progressionen ist $s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$. Setzt man in diese Formel die entsprechenden Werte, nämlich 1 statt a, 2 statt d und $\frac{1}{2}n(n+1)$ statt n, so erhalten wir:

$$s=\frac{1}{2} . \frac{1}{2}n(n+1)(2 . 1+[\frac{1}{2}n(n+1)-1]\times 2)=$$
$$\frac{1}{4}n(n+1)[2+n(n+1)-2]=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=$$
$$[\frac{1}{2}n(n+1)]^2.$$

21. Der hier zu beweisende Satz ist: Haben wir eine beliebige Zahl n und bilden eine arithmetische Reihe von n Gliedern, deren Anfangsglied n^2+2 und deren Differenz 3 ist, deren Endglied nach der Formel $t=a+(n-1)d$, also $=n^2+2+(n-1)3$ $=n^2+3n-1$, ist, so ist die Summe dieser Reihe gleich der dreifachen Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis n^2, also gleich der Summe $1^2+2^2+3^2 \ldots +n^2$. Setzen wir $n=1$, so ist der Satz $1^2+2=3 . 1^2$ oder $3=3$ richtig. Für $n=2$ wird der Satz $(2^2+2)+(2^2+5)=3(1^2+2^2)$ oder $15=15$, was wieder zutrifft. Für $n=3$ wird der Satz $(3^2+2)+(3^2+5)+(3^2+8)=3(1^2+2^2+3^2)$ oder $42=3 . 14=42$, was wieder zutrifft.

In dieser Weise können wir noch weiter fortschreiten. Versuchen wir jetzt den Beweis allgemein zu liefern. Wir nehmen an, der Satz gelte für $n=\alpha$ und zeigen dann, daß er auch für $n=\alpha+1$ gilt. Vorher haben wir die Richtigkeit z. B. für $n=3$ eingesehen; nach dem zu liefernden Beweise wird der Satz also auch noch für $n=3+1=4$ bestehen, also wieder nach dem Beweise, wenn er für $n=4$ besteht, auch für $n=4+1=5$ u. s. w. für $n=5+1=6$, für $n=6+1=7$, d. h. allgemein nehmen wir folgende Gleichungen an:

$$(\alpha^2+2)+(\alpha^2+5)+(\alpha^2+8) \ldots +[\alpha^2+(3\alpha-1)]=$$
$$[1^2+2^2+3^2 \ldots +\alpha^2]3$$ und leiten daraus folgende ab:

$$[(\alpha+1)^2+2]+[(\alpha+1)^2+5]+[(\alpha+1)^2+8]+ \ldots$$
$$+[(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1]=[1^2+2^2+3^2 \ldots$$
$$+\alpha^2+(\alpha+1)^2] . 3.$$

Setzen wir nun zum Beweise in dem Ausdrucke auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung $\alpha^2+2\alpha+1$ statt $(\alpha+1)^2$ und ordnen die einzelnen Glieder gemäß dem Ausdrucke auf der linken Seite der angenommenen Gleichung, so wird:

$[(\alpha+1)^2+2]+[(\alpha+1)^2+5]+\ldots.+[(\alpha+1)^2+ 3\alpha-1]+[(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1]=[\alpha^2+2]+ [\alpha^2+5]+\ldots+[\alpha^2+3\alpha-1]+[(a+1)^2+ 3(\alpha+1)-1]+[2\alpha+1]+[2\alpha+1]\ldots..+[2\alpha+1].$

Es besteht nämlich der Ausdruck $[(\alpha+1)^2+2]+[(\alpha+1)^2+5]\ldots.+[(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1]$, den wir kurz mit A bezeichnen wollen, aus $(\alpha+1)$ Gliedern und sein vorletztes Glied ist, weil der Unterschied der einzelnen Glieder 3 ist, gleich $[(\alpha+1)^2+3\alpha-1]$. Der Ausdruck $[\alpha^2+2]+[\alpha^2+5]+\ldots+[\alpha^2+3\alpha-1]$ besteht dagegen nur aus α Gliedern und werde mit B bezeichnet. Die α ersten Glieder des Ausdruckes A können wir sonach mit den α Gliedern des Ausdruckes B vergleichen; sie sind völlig identisch, nur steht in dem erstern $(\alpha+1)^2$ statt α^2. Da nun $(\alpha+1)^2=(\alpha^2)+2\alpha+1$ ist, so ist jedes der α ersten Glieder des Ausdrucks A gleich dem entsprechenden des Ausdrucks $B+(2\alpha+1)$. Dies ist auch in der Art, wie die letzte Gleichung geschrieben ist, angedeutet. Das letzte Glied des Ausdruckes A endlich, nämlich: $[(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1]$ können wir nicht mit einem Gliede von B zusammenstellen, weil es ja überzählig ist gegenüber B. Nach der letzten Gleichung wird also die Summe von A gleich der Summe von B, $+(3\alpha+1)$, $+(3\alpha+1)$ u. s. w. oder kurz: $\alpha.(2\alpha+1)$, endlich $+[(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1]$, also

$$A=B+\alpha(2\alpha+1)+(\alpha+1)^2+3(\alpha+1)-1= B+(\alpha+1)^2+2\alpha^2+\alpha+3\alpha+3-1=B+(\alpha+1)^2+ 2(\alpha^2+2\alpha+1)=B+(\alpha+1)^2+2(\alpha+1)^2=B+3(a+1)^2.$$

Nun ist aber $B=3(1^2+2^2+3^2+\ldots\alpha^2)$; also ist

$$A=B+3(\alpha+1)^2=3[1^2+2^2+3^2+\ldots+\alpha^2+(\alpha+1)^2].$$

Mithin ist also:

A oder $[(\alpha+1)^2+2]+[(\alpha+1)^2+5]+\ldots.+[(\alpha+1)^2+ 3(\alpha+1)-1]=3(1^2+2^2+3^2+\ldots.\alpha^2+(\alpha+1)^2]$,

was zu beweisen war.

22. Aus dem vorhergehenden Satze läßt sich nun auch eine Lösung dieser Aufgabe ableiten: Die Summe einer Reihe von Quadratzahlen zu finden, das heißt: die Reihe $1^2+2^2+3^2+\ldots n^2$ zu summieren. Bezeichnet man die Summe mit S, so ist nach der vorhergehenden Aufgabe:

$$3S=(n^2+2)+(n^2+5)+(n^2+8)+\ldots+(n^2+3n-1) \text{ oder}$$
$$3S=n^2+n^2+n^2\ldots(n\text{mal})+2+5+8+\ldots.+3n-1= n.n^2+2+5+8+\ldots+3n-1.$$

Die Summe $2+5+..+3n-1$ ist aber eine arithmetische Reihe, deren Anzahl der Glieder $=n$ ist; die Summe ist also gleich $\frac{1}{2}n[2+(3n-1)]=\frac{1}{2}n(3n+1)$. Also wird

$$3S=\tfrac{1}{2}n.2n^2+\tfrac{1}{2}n.(3n+1)=\tfrac{1}{2}n(2n^2+3n+1) =\tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1);\ \text{folglich:}$$
$$S=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

II. Geometrische Progressionen.

4. Auflösungen der geometrischen Progressionen in Heis, Sammlung § 83.

a) Entwickelung der beiden Grundformeln (1—4).

§. 423. Eine Reihe von Zahlen, wovon jede dem Produkte aus der vorhergehenden und einer konstanten Zahl (Exponent genannt) gleich ist, wird eine geometrische Progression genannt. Hiernach kann die Reihe von Zahlen

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 u. s. w.,

wovon das erste Glied = 1 und der Exponent = 2 ist, auch auf folgende Weise dargestellt werden:

1, 1.2, 1.2.2, 1.2.2.2, 1.2.2.2.2, 1.2.2.2.2.2, 1.2.2.2.2.2.2, 1.2.2.2.2.2.2.2 u. s. w., oder auch

$1,\ 1.2^1,\ 1.2^2,\ 1.2^3,\ 1.2^4,\ 1.2^5,\ 1.2^6,\ 1.2^7$ u. s. w.

Hieraus folgt, daß das zweite Glied einer geometrischen Progression aus dem Produkte des ersten Gliedes in den Exponenten, das dritte Glied aus dem Produkte des 1. Gliedes in den Exponenten in der 2. Potenz; das vierte Glied aus dem Produkte des 1. Gliedes in den Exponenten auf die 3. Potenz erhoben; das fünfte Glied aus dem Produkte des 1. Gliedes in den Exponenten in der 4. Potenz u. s. w. überhaupt das nte Glied aus dem Produkte des ersten Gliedes in den Exponenten auf die (n—1)te Potenz erhoben, besteht. Ist also das erste Glied und der Exponent einer geometrischen Progression gegeben, so kann jedes beliebige Glied der Progression leicht bestimmt werden. Wollte man z. B. das 15te Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied = 6 und deren Exponent = 3 ist, bestimmen, so würde dasselbe $6 . 3^{14} = 6 . 4782969 = 28697814$ sein.

Bezeichnet man nun allgemein das erste Glied einer geom. Progr. mit a, den Exponenten mit e, so läßt sich jede geom. Progression auf folgende Weise darstellen:

$$a,\ ae,\ ae^2,\ ae^3,\ ae^4,\ ae^5,\ ae^6, \ldots\ldots ae^{n-2},\ ae^{n-1}.$$

Besteht diese Progression aus n Gliedern, so ist das letzte ae^{n-1} und nennt man dasselbe t, so ist

$$(1)\quad t = ae^{n-1}.$$

§. 424. Bezeichnet man die auf das erste Glied a folgenden Glieder einer geom. Progression von n Gliedern mit b, c, d.... das letzte Glied mit t und das auf t folgende mit u=et, so hat man: b=ae, c=be, d=ce....a=et. Addiert man beiderseits diese gleichen Ausdrücke, so erhält man:

$$b+c+d \ldots\ldots + u = (a+b+c \ldots\ldots + t)e.$$

Nennt man nun die Summe der Glieder dieser Progr.=s, so ist die linke Seite dieser Gleichung, nämlich b+c+d+....

$+u=s+u-a$ und die rechte Seite nämlich $(a+b+c+\ldots+t)e=se$. Es ist daher $s+u-a=se$ oder $s(e-1)=u-a$; folglich $s=\frac{u-a}{e-1}$ oder, wenn man den Wert für $u=et$ in diese Formel setzt:

$$(2)\ s=\frac{et-a}{e-1}.$$

Da nun nach §. 423 (1) $t=ae^{n-1}$ und das auf t folgende Glied $et=ae^{n-1}\times e=ae^n$, so hat man auch

$$(3)\ s=\frac{ae^n-a}{e-1}=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{a(1-e^n)}{1-e}.$$

Um die Summe einer geom. Progr. zu finden, kann man auch auf folgende Weise verfahren. Bezeichnet man das erste Glied mit a, den Exponenten mit e und die Anzahl der Glieder mit n, so ist:

$$(1)\ s=a+ae+ae^2+ae^3+ae^4+ae^5+ae^6+\ldots+ae^{n-2}+ae^{n-1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit e, so ist

$$(2)\ se=ae+ae^2+ae^3+ae^4+ae^5+ae^6+\ldots+ae^{n-1}+ae^n.$$

Nimmt man jetzt die Differenz zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2), so findet man:

$$se-s=ae^n-a \text{ oder } s(e-1)=a(e^n-1); \text{ folglich}$$

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{a(1-e^n)}{1-e}.$$

2. Ist nun $a=1$, $e=2$, $n=13$, so ist $t=1.2^{13-1}=1.2^{12}=4096$ und

$$s=\frac{2.4096-1}{2-1}=8192-1=8191.$$

3. α) Setzt man die entsprechenden Werte in Formel (1), so ist $t=7.3^{11-1}=7.3^{10}=413343$.

$$s=\frac{3.413343-7}{3-1}=620011.$$

β) Hier hat man $t=1024.5^7=80000000$

$$\text{und } s=\frac{5.80000000-1024}{5-1}=99999744.$$

γ) Man erhält hier $t=8\frac{1}{2}.(2\frac{1}{2})^{10}=81062\frac{649}{2048}$

$$\text{und } s=\frac{2\frac{1}{2}.81062\frac{649}{2048}-8\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1}=135098\frac{399}{2048}.$$

δ) Man hat hier: $t=5\frac{1}{4}.0{,}25^5=0{,}005126953125$

$$\text{und } s=\frac{5\frac{1}{4}(1-0{,}25^6)}{1-0{,}25}=6{,}998291015625.$$

4. α) Auch hier hat man unter Berücksichtigung der Formel (1):

$$t=4096.0{,}375^4=81.$$

$$s=\frac{4096(1-0{,}375^5)}{1-0{,}375}=6505.$$

β) Ist der Exponent e positiv, wie in den bisherigen Beispielen, so haben alle Glieder die nämlichen Vorzeichen; ist aber e negativ, wie in diesem Beispiele, so wechseln die Vorzeichen ab. Wenn daher $a=3$, $e=-4$ und $n=7$, so heißt die Progression

$+3,\ 3.(-4),\ 3.(-4)^2,\ 3.(-4)^3,\ 3.(-4)^4$ u. s. w. oder
$+3,\ -12,\ +48,\ -192,\ +768$ und es ist
$t=3.(-4)^6=3.4096=12288$ und

$$s=\frac{(-4).12288-3}{-4-1}=\frac{-49155}{-5}=+9831.$$

γ) Hier ist: $t=(-7).(-3\tfrac{1}{2})^5=+3676\tfrac{17}{32}$ und

$$s=\frac{(-3\frac{1}{2}).3676\frac{17}{32}-(-7)}{-3\frac{1}{2}-1}=+2857\tfrac{31}{32}.$$

b) Die unendlich abnehmenden Progressionen (5—8).

§. 425. 5. Da eine geometrische Progression sowohl vor- als rückwärts, so weit man will, fortgesetzt werden kann, so ist sie gleichsam ihrem Wesen nach auf beiden Seiten unendlich und zwar auf der einen Seite unendlich wachsend, auf der andern ohne Ende abnehmend, und zwar so, daß kein Glied wirklich Null wird, wol aber jeden Grad der Kleinheit erreichen kann. Schon die gewöhnliche Arithmetik führt auf solche unendliche Reihen, z. B. bei der Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche ($\frac{3}{7}=0{,}4285714$)....(Periode 428571) und bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln aus solchen Zahlen, die keine vollkommenen Quadrat- und Kubikzahlen sind, z. B.

$$(\sqrt{5}=2{,}23606\ldots \text{ und } \sqrt[3]{12}=2{,}28942\ldots).$$

Nun kann die Summe einer unendlich zunehmenden Reihe nicht angegeben werden, weil dieselbe unendlich groß ist, wohl aber ist dies der Fall bei der unendlich abnehmenden Reihe. Die Summierung einer solchen Reihe beruht darauf, daß man den Exponenten e als einen echten Bruch und die Anzahl der Glieder n als eine unendlich große Zahl betrachtet. Ist also $e<1$ und $n=\infty$, so wird e in der Formel

$$s=\frac{a(1-e^n)}{1-e}=\frac{a}{1-e}-\frac{ae^n}{1-e}$$

unendlich klein oder gleich Null; folglich wird auch $\frac{ae^n}{1-e}=0$; daher auch t als letztes Glied dieser Reihe $=0$ wird und hiernach ist die Summe einer unendlich abnehmenden Reihe, also $s=\frac{a}{1-e}$. Die Summe von unendlich vielen Gliedern einer fallenden geometrischen Reihe ist demnach gleich dem ersten Gliede

der Progression dividiert durch die um den Exponenten verminderte Einheit.

6. α) Ist $a=1$, $e=\frac{1}{2}$ und $n=\infty$, so heißt die Reihe:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots$ ohne Ende.

Ihre Summe s ist daher $=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

β) Ist $a=1$, $e=\frac{1}{3}$ und $n=\infty$, so ist $s=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1\frac{1}{2}$.

7. Es ist: $s=\frac{11}{1-\frac{2}{9}}=14\frac{1}{7}$.

8. Die Reihe heißt: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\ldots\ldots$ ohne Ende und es ist $s=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{1\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

c) Entwickelung der übrigen Formeln (9—24).

§. 426. Die 3 in §. 423 und 424 (1), (2), (3) für t und s entwickelten Formeln könnten als die Grundformeln betrachtet werden, worauf die Theorie der geometrischen Reihen beruht. In denselben kommen fünf Größen vor, nämlich a, e, t, n, s, die in einem solchen Zusammenhange untereinander stehen, daß, wenn drei derselben gegeben sind, die übrigen beiden völlig bestimmt sind und gefunden werden können.

9. Soll t aus den Größen a, e, s bestimmt werden, so hat man aus (2) (4) $t=\frac{s(e-1)+a}{e}$.

Soll aber t aus e, n, s bestimmt werden, so stelle man aus (1) und (2) die Werte für a einander gleich und man erhält: $\frac{t}{e^{n-1}}=et-(e-1)s$.

Entwickelt man diese Gleichung, so findet man:

$(e^n-1)t=s(e-1)\,.\,e^{n-1}$; folglich

(5) $t=[s(e-1)\,.\,e^{n-1}]:(e^n-1)$.

10. Soll s aus a, n, t bestimmt werden, so hat man aus Formel (1) $e^{n-1}=t:a$; also $e=\sqrt[n-1]{t:a}=(t:a)^{\frac{1}{n-1}}$.

Nun ist ferner nach Formel (2) $e=\frac{s-a}{s-t}$. Stellt man die für e gefundenen Werte gleich, so ist:

$(t:a)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{s-a}{s-t}$ oder $(t^{\frac{1}{n-1}}:a^{\frac{1}{n-1}}).=\frac{s-a}{s-t}$, woraus:

$(s-t)\,.\,t^{\frac{1}{n-1}}=(s-a)\,.\,a^{\frac{1}{n-1}}$ oder

$st^{\frac{1}{n-1}}-t^{\frac{n}{n-1}}=sa^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}$.

Ordnet man diese Gleichung und bestimmt s, so hat man:

$$(6)\ s=[t^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}]:[t^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}].$$

Soll s aus e, n, t bestimmt werden, so stelle man die sich aus den Formeln (1) und (2) ergebenden Werte für a einander gleich und man hat:

$$\frac{t}{e^{n-1}}=et-s(e-1) \text{ oder } t=et\,.\,e^{n-1}-s(e-1)e^{n-1}.$$

Ordnet man diese Gleichung, so hat man:

$$s(e-1)e^{n-1}=(e^n-1)t; \text{ folglich}$$

$$(7)\ s=[(e^n-1)t]:[(e-1)e^{n-1}].$$

11. Soll a aus e, n, t bestimmt werden, so hat man unmittelbar aus der Formel (1) $(8)\ a=\frac{t}{e^{n-1}}$.

Soll a aus e, n, s bestimmt werden, so hat man aus Formel (3) $(9)\ a=\frac{s(e-1)}{e^n-1}$.

Soll a aus e, t, s bestimmt werden, so hat man aus Formel (4) $(10)\ a=et-s(e-1)$.

12. Ist a, n, t gegeben, so ergiebt sich aus Formel (1)

$$(11)\ e=\sqrt[n-1]{t:a}.$$

Ist aber a, t, s gegeben, so erhält man aus Formel (2)

$$(12)\ e=(s-a):(s-t).$$

13. Soll n aus a, e, t bestimmt werden, so findet man aus Formel (1) $e^{n-1}=t:a$ oder vermittelst Logarithmen:

$$(n-1)\log e=\log t-\log a \text{ oder } n-1=\frac{\log t-\log a}{\log e}; \text{ also}$$

$$(13)\ n=\frac{\log t-\log a}{\log e}+1.$$

Soll n aus a, e, s bestimmt werden, so suche man aus den beiden Formeln (1) und (2) die Werte für t und stelle diese einander gleich. Es ist dann: $ae^{n-1}=\frac{s(e-1)+a}{e}$ oder diese Gleichung mit e multipliziert: $ae^n=s(e-1)+a$; also:

$$e^n=\frac{s(e-1)+a}{a} \text{ oder vermittelst Logarithmen:}$$

$$n\log e=\log[s(e-1)+a]-\log a; \text{ daher ist}$$

$$(14)\ n=\frac{\log[s(e-1)+a]-\log a}{\log e}.$$

Stellt man aus den Formeln (1) und (2) die beiden Werte für e einander gleich, so erhält man n aus a, t, s. Es ist dann:

$$t^{\frac{1}{n-1}}:a^{\frac{1}{n-1}}=(s-a):(s-t) \text{ oder vermittelst Logarithmen:}$$

$$\frac{1}{n-1}\log t-\frac{1}{n-1}\log a=\log(s-a)-\log(s-t)$$ oder

$$\log t-\log a=(n-1)[\log(s-a)-\log(s-t)];$$ also

$$n-1=\frac{\log t-\log a}{\log(s-a)-\log(s-t)};$$ daher

$$(15)\quad n=\frac{\log t-\log a}{\log(s-a)-\log(s-t)}+1.$$

Soll endlich n aus e, t, s bestimmt werden, so setze man nach den beiden Formeln (1) und (2) die Werte für a einander gleich, und es ist:

$$t:e^{n-1}=et-s(e-1)$$ oder vermittelst Logarithmen:

$$\log t-(n-1)\log e=\log[et-s(e-1)]$$ oder

$$(n-1)\log e=\log t-\log[et-s(e-1)];$$ folglich

$$(16)\quad n=\frac{\log t-\log[et-s(e-1)]}{\log e}+1.$$

14. Zur Bestimmung von e aus a, n, s erhält man aus der Formel (3) die notwendige Gleichung. Hiernach ist:

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch a, so hat man:

$$\frac{s}{a}=\frac{e^n-1}{e-1},$$ oder geordnet: $$(17)\quad \frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0.$$

Diese Gleichung giebt für e den gesuchten Wert.

Soll t aus a, n, s bestimmt werden, so hat man aus der Formel (1): $$e=\sqrt[n-1]{t:a}.$$

Setzt man diesen Wert für e=z in die Formel (3), so hat man: $$\frac{a(z^n-1)}{z-1}=s$$ oder $$\frac{z^n-1}{z-1}=\frac{s}{a}.$$

Zur Bestimmung von t dient also die Gleichung

$$(18)\quad \frac{z^n-1}{z-1}-\frac{s}{a}=0,$$ worin $$z=\sqrt[n-1]{t:a}.$$

Die zur Bestimmung von e aus n, t, s dienende Gleichung ergiebt sich dadurch, daß man aus Formel (1) den Wert für a in Formel (3) setzt. Man erhält alsdann:

$$s=\frac{(t:e^{n-1})(e^n-1)}{e-1}$$

und hieraus, wenn man die Gleichung mit e^{n-1} multipliziert:

$$s\,.\,e^{n-1}=\frac{t\,.\,(e^n-1)}{e-1}$$ oder $$(19)\quad \frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{t}e^{n-1}=0.$$

Soll man endlich a aus n, t, s bestimmen, so setze man $e=\sqrt[n-1]{t:a}=z$ in Formel (3), so ist: $$s=\frac{a(z^n-1)}{z-1},$$

woraus sich durch Entwickelung die Gleichung

$$(20)\quad a(z^n-1)-s(z-1)=0$$

ergiebt, die für a den verlangten Wert liefert.

Stellen wir nun die für die verschiedenen Glieder gefundenen Werte zusammen, so erhalten wir folgende

Formeltafel für die geometrischen Progressionen.

Nr.	Gegebene Werte.	Gesucht.	Formeln.
1	a, e, n		$=ae^{n-1}$
2	a, e, s	t	$=\frac{s(e-1)+a}{e}$
3	a, n, s		$=\frac{z^n-1}{z-1}-\frac{s}{a}=0$, worin $z=\sqrt[n-1]{t:a}$
4	e, n, s		$=[s(e-1)\,.\,e^{n-1}]:[e^n-1]$
5	a, e, n		$=[a(e^n-1)]:[e-1]$
6	a, e, t	s	$=[et-a]:[e-1]$
7	a, n, t		$=[t^{\frac{n}{n-1}}-a^{\frac{n}{n-1}}]:[t^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}}]$
8	e, n, t		$=[(e^n-1)t]:[(e-1)\,.\,e^{n-1}]$
9	e, n, t		$=t:e^{n-1}$
10	e, n, s		$=[s(e-1)]:[e^n-1]$
11	e, t, s	a	$=et-s(e-1)$
12	n, t, s		$=a(z^n-1)-s(z-1)=0$, worin $z=\sqrt[n-1]{t:a}$
13	a, n, t		$=\sqrt[n-1]{t:a}$
14	a, n, s	e	$=\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0$
15	a, t, s		$=[s-a]:[s-t]$
16	n, t, s		$=\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{t}e^{n-1}=0$
17	a, e, t		$=\frac{\log t-\log a}{\log e}+1$
18	a, e, s	n	$=(\log[s(e-1)+a]):(\log e)$
19	a, t, s		$=\frac{\log t-\log a}{\log(s-a)-\log(s-1)}+1$
20	e, t, s		$=\frac{\log t-\log[et-s(e-1)]}{\log e}+1.$

15. Nach Formel (2) *) ist:

$$t=\frac{6+(\frac{3}{4}-1)19\frac{373}{512}}{\frac{3}{4}}=1\tfrac{139}{2048}:\tfrac{3}{4}=1\tfrac{217}{512}.$$

Nach (17) ist $n=\frac{\log 1\frac{217}{512}-\log 6}{\log \frac{3}{4}}+1=$

$$\frac{\log 729-\log 512-\log 6}{\log 3-\log 4}+1=$$

$$\frac{2,86273-2,70927-0,77815}{0,47712-0,60206}+1=+\frac{0,62469}{0,12494}+1=6.$$

16. Nach Formel (4) und (9) ist:

$$t=\frac{411771\,.\,(7-1)\,.\,7^{7-1}}{7^7-1}=\frac{411771\,.\,6\,.\,7^6}{7^7-1}=352947.$$

$$a=\frac{352947}{7^6}=3.$$

17. Mit gehöriger Berücksichtigung der für a, t und n gegebenen Werte ist nach (13):

$$e=\sqrt[14-1]{\frac{1024}{\frac{1}{8}}}=\sqrt[13]{8\,.\,1024}=\sqrt[13]{2^3\,.\,2^{10}}=\sqrt[13]{2^{13}}=2.$$

Nimmt man nun, um s zu finden, a, e, t als gegeben an, so ist nach (6):

$$s=\frac{2\,.\,1024-\frac{1}{8}}{2-1}=2047\tfrac{7}{8}.$$

18. Gemäß den hier für a, n, s gegebenen Werten hat man, da nach (14) $\frac{e^n-1}{e-1}=\frac{s}{a}$ ist:

$$\frac{e^3-1}{e-1}=\frac{95}{20}\text{ oder } e^2-e=\tfrac{15}{4}\text{; daher } (e+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{16}{4};$$

folglich $e=1\frac{1}{2}$ und $e=-2\frac{1}{2}$.

Ist $e=1\frac{1}{2}$, so ist die Progression 20, $20\,.\,1\frac{1}{2}$, $20\,.\,(1\frac{1}{2})^2$ oder 20, 30, 45 u. s. w.

Ist aber $e=-2\frac{1}{2}$, so ist die Progression 20, $20\,.\,(-2\frac{1}{2})$, $20\,.\,(-2\frac{1}{2})^2$ oder 20, —50, +125 u. s. w.

Berücksichtigt man die unter β. für n, t und s gegebenen Werte, so ist nach (16)

$$\frac{e^n-1}{e-1}=\frac{s}{t}\,.\,e^{n-1}\text{ oder }\frac{e^3-1}{e-1}=\frac{834e^2}{600}.$$

Entwickelt man diese Gleichung und vervollständigt das Quadrat, so ist:

$$(e-\tfrac{50}{39})^2=(\tfrac{80}{39})^2;\ e=3\tfrac{1}{3}\text{ und } e=-\tfrac{10}{13}.$$

---

*) Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich immer auf die Nummer der Formeltafel.

Ist nun $e=3\frac{1}{3}$, so ist nach (11)

$$a=3\tfrac{1}{3}.606-834(3\tfrac{1}{3}-1)=54$$

und deshalb heißt alsdann die Progression 54, 180, 600.

Ist $e=-\frac{10}{13}$, so ist $a=-\frac{10}{13}.600-834(-\frac{10}{13}-1)=$

$$-461\tfrac{7}{13}+1475\tfrac{7}{13}=1014.$$

In diesem Falle heißt die Progression 1014, —780, 600.

19. Gemäß den hier für a, e, s gegebenen Werten ist nach (2)

$$t=\frac{70(\frac{3}{7}-1)+40}{\frac{3}{7}}=\frac{40-40}{\frac{3}{7}}=0.$$

Nach §. 413 ist, wenn $t=0$, $n=\infty$.

20. e und s lassen sich nicht bestimmen, wenn $n=\infty$, denn alsdann hat man $e=\sqrt[\infty-1]{\frac{7}{5}}$, welches unbestimmbar ist.

21. Nach (11) ist $a=\frac{7}{5}.9642{,}59-33741{,}59(\frac{7}{5}-1)=3$ und daher nach (17) $n=\frac{\log 9642{,}59-\log 3}{\log \frac{7}{5}}+1=25.$

22. Heißt das erste Glied p, das zweite q, und ist $p>q$, so ist der Exponent der Progression $=q:p$. Also ist, da $a=p$, $n=n$, $e=q:p$ nach (1) $t=p(q:p)^{n-1}$, denn das nte Glied als letztes Glied der Progression ist $=t$. Nun ist ferner nach (5) $s=\frac{p[(q:p)^n-1]}{(q:p)-1}=\frac{p^2[(q:p)^n-1]}{q-p}$ oder die geometrische Progression p, q, $(q^2:p)$, $(q^3:p^2)$, $(q^4:p^3)\ldots\ldots(q^{n-1}:p^{n-2})$ hat zum ersten Gliede p, zum Exponenten $(q:p)$ und zum letzten Gliede $(q^{n-1}:p^{n-2})$; ihre Summe ist also

$$p^2[(q:p)^n-1]:(q-p).$$

Wenn aber obige Reihe unendlich ist, also $n=\infty$, so ist

$$s=\frac{p}{1-(q:p)}=\frac{p}{(p-q):p}=\frac{p^2}{p-q}.$$

23. α) Da das erste Glied der Reihe 6 und das zweite —12 ist, so ist der Exponent der Reihe —2. Es ist also $a=6$, $e=-2$ und $n=37$. Daher ist nach (5)

$$s=\frac{6[(-2)^{37}-1]}{-2-1}=\frac{6(-137438953472-1)}{-3}=$$
$$274877906949.$$

23. β) Die hier gegebene unbegrenzte geometrische Reihe hat zum ersten Gliede $(+m)$ und zum Exponenten $\left(-\frac{n}{m}\right)$; die Summe derselben beträgt also

$$s=\frac{m}{1-\left(-\frac{n}{m}\right)}=\frac{m}{1+\frac{n}{m}}=\frac{m^2}{m+n}.$$

24. Da das gte Glied $=m$, das hte Glied $=r$, so ist der Exponent $e=\frac{r}{m}$, $n=h$, $t=r$; folglich ist nach (9) das erste Glied

$a = r : (r^{h-1} : m^{h-1}) = (rm^{h-1} : r^{h-1}) = (r^2 m^{h-1}) : r^h$;

also ist das nte Glied oder $t = \frac{r^2 m^{h-1}}{r^h} \times \left(\frac{r}{m}\right)^{n-1} = \frac{r^2 m^{h-1} r^{n-1}}{r^h m^{n-1}}$

$= \frac{r^{n+1} m^h}{r^h m^n}$.

Die Summe vom gten bis zum hten Gliede ist $= m + r$.

d) Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche (25).

(Vgl. I. Teil der Auflösungen 5. Aufl. §. 197—200. Seite 196—199.)

§. 427. 25. α) Der unbegrenzte periodische Decimalbruch 0,11111..... läßt sich auch auf folgende Weise darstellen: 1(0,1+0,01+0,001+0,0001+0,00001+....) oder einmal die Progression $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$..... oder auch

$$\frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^5} \cdots\cdot$$

Das erste Glied dieser Progression ist $= \frac{1}{10}$ und der Exponent $= \frac{1}{10}$, also ist die Summe dieser Reihe $= \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$.

β) Der unbegrenzte Decimalbruch, dessen Periode 378 ist, läßt sich auch so darstellen:

$$378(0{,}001 + 0{,}000001 + 0{,}00000001 + \ldots.)$$

oder 378mal die Progression $\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000000}, \frac{1}{1000000000} \cdots$. Das erste Glied dieser Progression ist $= \frac{1}{1000}$; ihr Exponent $= \frac{1}{1000}$; demnach ist ihre Summe $\frac{\frac{1}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{1}{999}$ und da jedes Glied mit 378 multipliziert ist, so ist die Summe

$$378 \cdot \frac{1}{999} = \frac{14}{37}.$$

γ) Der hier gegebene Decimalbruch ist

$$= 285714(0{,}000001000001) = \frac{285714}{1000000}$$

$$+ \frac{285714}{1000000000000000} + \frac{285714}{1000000000000000000000000} + \cdots$$

Er bildet also eine unendliche Reihe, deren erstes Glied $= \frac{285714}{1000000}$ und deren Exponent $\frac{1}{1000000}$.

Ihre Summe oder

$$s = \frac{\frac{285714}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}} = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}.$$

δ) Hiernach ist die Summe des unbegrenzten Decimalbruches mit der Periode 01369863, also

$$s = \frac{\frac{1369863}{1000000000}}{1 - \frac{1}{1000000000}} = \frac{1369863}{99999999} = \frac{1}{73}.$$

ε) Um also unbegrenzte periodische Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln, nimmt man die Periode als Zähler eines Bruches, dem man zum Nenner so viele 9

giebt, als die Periode Stellen hat. Ist der unendliche Decimalbruch nicht gleich in seinen ersten Stellen periodisch, so zerlege man ihn in den nicht periodischen und den periodischen Teil, berechne diesen letztern nach dem angegebenen Verfahren und addiere den nicht periodischen Teil hinzu. Ein solcher Bruch ist der hier gegebene. Derselbe fängt erst mit der vierten Stelle an, periodisch zu werden.

Die Periode ist $=\frac{923076}{999999}=\frac{12}{13}$; also ist:

$$0{,}201923076=\frac{201\frac{12}{13}}{1000}=\frac{2625}{13000}=\frac{21}{104}.$$

e) Die Kettenreihen. Summierung derselben und Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in eine Kettenreihe (26—33).

§. 428. 26. Es ist:

$$\frac{1}{8}=\frac{1.8^3}{8^4};\ \frac{4}{8^2}=\frac{4.8^2}{8^4};\ \frac{6}{8^3}=\frac{6.8}{8^4}\ \text{und}\ \frac{3}{8^4}=\frac{3}{8^4},$$

weshalb $\frac{1}{8}+\frac{4}{8^2}+\frac{6}{8^3}+\frac{3}{8^4}=\frac{1.8^3+4.8^2+6.8+3}{8^4}$;

daher ist die Summe der unendlichen Kettenreihe, also

$$s=\left\{\frac{1.8^3+4.8^2+6.8+3}{8^4}\right\}:\left(1-\frac{1}{8^4}\right)=\frac{1.8^3+4.8^2+6.8+3}{8^4-1}$$
$$=\frac{819}{4095}=\frac{1}{5}.$$

27. α) Hier ist:

$$s=\left\{\frac{1.11^4+3.11^3+5.11^2+7.11+9}{11^5}\right\}:\left(1-\frac{1}{11^5}\right)$$
$$=\frac{1.11^4+3.11^3+5.11^2+7.11+9}{11^5-1}=\frac{19325}{161050}=\frac{773}{6442}.$$

β) $$s=\frac{1.5^4+4.5^3+3.5^2+2}{5^4-1}=\frac{1202}{3124}=\frac{601}{1562}.$$

γ) Da in der hier gegebenen Reihe zwei Glieder dem periodischen Teile derselben vorhergehen, so heißt diese Kettenreihe gemischtperiodisch, im Gegensatze zu der reinperiodischen Reihe, die gleich von Anfang an beginnt. Nun ist die Summe der beiden ersten Glieder $=\frac{1.7}{7^2}+\frac{2}{7^2}=\frac{9}{7^2}$ und $\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}=$

$\frac{3.7}{7^2.7^2}+\frac{4}{7^2.7^2}=\frac{1}{7^2}\left(\frac{21}{7^2}+\frac{4}{7^2}\right)$. Nun ist: $\frac{21}{7^2}+\frac{4}{7^2}=\frac{25}{7^2-1}$;

also $$\frac{1}{7^2}\left(\frac{21}{7^2}+\frac{4}{7^2}\right)=\frac{1}{7^2}\left(\frac{21+4}{7^2-1}\right).$$

Es ist daher

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}\ldots\ldots\frac{1}{7^2}\left(9+\frac{25}{7^2-1}\right)=\frac{9.7^2-9+25}{7^2(7^2-1)}=\frac{457}{2352}.$$

δ) Die Summe der drei ersten Glieder dieser gemischtperiodischen Kettenreihe ist:

$$\frac{1}{13}+\frac{2}{13^2}+\frac{3}{13^3}=\frac{1.13^2+2.13+3}{13^3}=\frac{198}{13^3}$$

und die Summe der periodischen Glieder ist:

$$\frac{5}{13^5}+\frac{8}{13^8}+\frac{10}{13^{10}} \text{ oder } \frac{5.13^5+8.13^2+10}{13^{10}}=\frac{1}{13^3}\left(\frac{1857827}{13^7-1}\right);$$

folglich beträgt die Summe der ganzen Reihe

$$\frac{1}{13^3}\left(198+\frac{1857827}{13^7-1}\right)=\frac{198.13^7-198+1857827}{13^3(13^7-1)}$$

$$=\frac{198.62748517-198+1857827}{13^3(13^7-1)}=\frac{12426063995}{137858489652}.$$

28. α) Die Summe der hier gegebenen unbegrenzten periodischen Kettenreihe beträgt

$$s=\left(\frac{an+b}{n^2}\right):\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{an+b}{n^2-1}.$$

β) $$s=\left(\frac{an^3+bn^2+cn+d}{n^4}\right):\left(1-\frac{1}{n^4}\right)=\frac{an^3+bn^2+cn+d}{n^4-1}.$$

29. Summieren wir zunächst die in Klammern stehenden Glieder, so erhalten wir, da das erste Glied $a=\frac{a}{n}$, der Exponent $e=\frac{a}{n}$ und das letzte Glied $t=\frac{a^m}{n^m}$ ist, nach (6)

$$s=\frac{et-a}{e-1}=\frac{\frac{a}{n}\cdot\frac{a^m}{n^m}-\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}-1}=\frac{\frac{a}{n}\left(\frac{a^m}{n^m}-1\right)}{\frac{1}{n}(a-n)}=\frac{a(a^m-n^m)}{n^m(a-n)}.$$

Mithin ist die Summe der unbegrenzten periodischen Kettenreihe:

$$s=\frac{\frac{a(a^m-n^m)}{n^m(a-n)}}{1-\frac{1}{n^m}}=\frac{\frac{a(a^m-n^m)}{a-n}}{n^m-1}=\frac{a(a^m-n^m)}{(a-n)(n^m-1)}.$$

30. Nach der „Theorie der Kettenreihen von Druckenmüller" kann jeder Bruch $\frac{r}{b}$ in eine Reihe von Brüchen verwandelt werden, deren Nenner die wachsenden Potenzen von einer und derselben Zahl x sind, welche die Basis genannt wird. Die dazu erforderlichen Rechnungen lassen sich durch folgende Gleichungen darstellen:

$$rx = bm + r'$$
$$r'x = bm' + r''$$
$$r''x = bm'' + r'''$$
$$r'''x = bm''' + r'''' \text{ u. s. w.}$$

wo m, m′, m″, m‴ .... die Quotienten sind, welche man erhält, wenn man rx, r′x, r″x, r‴x .... durch b dividiert und r′, r″, r‴, r⁗ .... die entsprechenden Reste. Alsdann wird $\frac{r}{b} = \frac{m}{x} + \frac{m'}{x^2} + \frac{m''}{x^3} + \frac{m'''}{x^4} + \frac{m''''}{x^5} + \ldots\ldots$

Eine solche Reihe wird eine **Kettenreihe** mit der Basis x genannt; die Zähler m, m′, m″, m‴, m⁗ ... heißen auch **Elemente**. Soll nun der Bruch $\frac{5}{7}$ in eine Kettenreihe mit der Basis 9 verwandelt werden, so ist r=5, b=7, x=9 und daraus folgt m=6, m′=3, m″=7, m‴=6 u. s. w. und r′=3, r″=6, r‴=5 gleich dem Zähler des gegebenen Bruches $\frac{5}{7}$. Es ist also:

$$\frac{5}{7} = \frac{6}{9} + \frac{3}{9^2} + \frac{7}{9^3} + \frac{6}{9^4} + \frac{3}{9^5} + \frac{7}{9^6} + \ldots\ldots$$

31. Verwandelt man $\frac{3}{7}$ mit der Basis 4 in eine Kettenreihe, so kann die Rechnung auch folgende Gestalt annehmen, welche dem Verfahren ähnlich ist, das man bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch beobachtet:

$$\begin{array}{r|l} r = 3 & 7 \\ \hline 3 \,.\, 4 = 12 & \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{2}{4^5} + \frac{3}{4^6} \\ 1 \,.\, 7 = 7 & \\ \hline r' = 5 & \\ 5 \,.\, 4 = 20 & \\ 2 \,.\, 7 = 14 & \\ \hline r'' = 6 & \\ 6 \,.\, 4 = 24 & \\ 3 \,.\, 7 = 21 & \\ \hline r''' = 3 & \end{array}$$

Hier wird r‴=r=dem Zähler des gegebenen Bruches $\frac{3}{7}$; folglich wird auch das Element m‴, das sich aus r‴ ergiebt, wieder 1 und deshalb r⁗=5 und darum das folgende Element 2 und der sich hierdurch ergebende Rest wieder 6 ꝛc. Ergiebt sich also bei der fortgesetzten Division ein Rest, der, wie in obigem Beisp., dem Zähler des gegebenen Bruches oder einem schon früher vorgekommenen Reste gleich ist, so folgt aus der Natur der Sache, daß auch die Elemente in der Kettenreihe in derselben Ordnung immer wieder zurückkehren, und man hat dann nicht mehr nötig, die Rechnung fortzusetzen. Eine solche Kettenreihe heißt eine **periodische**, und da in obiger Kettenreihe die Elemente 1, 2, 3 von An-

fang an alle wiederkehren, so heißt sie eine reinperiodische. Da nun der Nenner 7 des Hauptbruches $\frac{3}{7}$ keinen Primfaktor enthält, der ein Teiler der Basis 4 ist, so mußte die aus dem Bruche $\frac{3}{7}$ hervorgehende Kettenreihe unendlich werden. Sie wird aber endlich werden, wenn der Nenner des zu verwandelnden Bruches keine anderen Primfaktoren enthält, als auch die Basis. Dies ist z. B. bei dem Bruche $\frac{45}{64}$ zur Basis 16 der Fall. Denn $64=2.2.2.2.2.2$ und $16=2.2.2.2$. Verwandeln wir daher den Bruch $\frac{45}{64}$ zur Basis 16 in eine Kettenreihe, so erhalten wir:

$$\begin{array}{r|l} r=45 & 64 \\ \times 16 & \frac{11}{16}+\frac{4}{16^2} \\ \hline 720 & \\ 11.64=704 & \\ \hline r'=16 & \\ \times\ 16 & \\ \hline 256 & \\ 4.64=256 & \\ \hline r''=\ 0 & \end{array}$$

Also ist $\frac{45}{64}=\frac{11}{16}+\frac{4}{16^2}$, woraus folgt, daß $\frac{45}{64}=\frac{11.16+4}{16^2}$ und hieraus

$$\frac{45.16^2}{64}=11.6+4,$$

d. h. 45.16^2 muß durch 64 teilbar sein. Da nun aber 45 und 64 relative Primzahlen sind, so muß schon 16^2 durch 64 teilbar sein, was aber anders nicht möglich ist, als daß jeder Primfaktor von 64 auch ein Faktor von 16^2 ist.

Bei der Verwandlung des Bruches $\frac{97}{312}$ in eine Kettenreihe zur Basis 5 erhält man die Elemente 1, 2, 3, 4 nebst den bezüglichen Resten 173, 241, 269, 97. Bei der vierten Division erscheint also der Rest 97 = dem Zähler des gegebenen Bruches und die Periode hat sonach vier Elemente; folglich ergeben sich bei fortgesetzter Operation auch wieder die nämlichen Elemente und es ist daher

$$\frac{97}{312}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{1}{5^5}+\frac{2}{5^6}+\frac{3}{5^7}+\frac{4}{5^8}+\cdots\cdots$$

Verwandelt man den Bruch $\frac{28}{63}$ in eine Kettenreihe zur Basis 7, so erhält man die Elemente 3, 1, 3, 6 nebst den bezüglichen Resten 14, 35, 56, 14. Der bei der vierten Division sich ergebende Rest ist also gleich dem bei der ersten Division sich ergebenden und darum müssen bei fortgesetzter Operation dieselben Elemente 1, 3, 6 sich ergeben. Die Periode der Elemente erscheint hier also nicht gleich anfangs, sondern beginnt erst mit dem zweiten Elemente; dies kommt daher, weil der Nenner des Bruches $\frac{28}{63}$ nämlich 63 mit der Basis 7 einen gemeinschaftlichen Faktor hat. Ueberhaupt liefert jeder Bruch, dessen Nenner mit der Basis einen gemeinschaftlichen Faktor hat, außerdem aber wenigstens einen Primfaktor enthält, der nicht in der Basis vorkommt, eine gemischtperiodische Kettenreihe. Es ist also

$$\frac{29}{63}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{6}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{3}{7^7}+\frac{6}{7^7}+\cdots\cdots$$

32. Weil alle Reste kleiner sein müssen, als der Nenner des zu verwandelnden Bruches, so können nur so viele von einander verschiedene Reste bei der Verwandlung vorkommen, als der um 1 verminderte Nenner des gegebenen Bruches beträgt. Ist, wie in Aufg. 31, der Nenner des gegebenen Bruches 7, so sind die möglichen Reste nur 1, 2, 3, 4, 5, 6.

33. Wenn die Elemente immer wieder in derselben Ordnung wiederkehren, so heißt eine solche Kettenreihe eine periodische und die Elemente selbst bilden die Periode. Fängt die Reihe mit dem ersten Elemente an periodisch zu werden, so heißt sie eine reinperiodische, was immer der Fall sein wird, wenn Zähler und Nenner des Bruches zur Basis Primzahlen sind.

Die Verwandlung eines Bruches in eine Kettenreihe giebt uns ein schönes Mittel an die Hand, unbestimmte Gleichungen vom ersten Grade aufzulösen. Vgl. oben S. 471 und folgende.

f) Interpolierung und Summierung geometrischer Progressionen (34—40).

§. 429. 34. Wird die halbe Summe durch s und die halbe Differenz der beiden mittleren Glieder durch d bezeichnet, so ist s—d das zweite und s+d das dritte Glied der gesuchten Progression. Erhebt man nun das zweite Glied s—d ins Quadrat und dividiert dieses Quadrat durch das dritte Glied s+d, so entsteht das erste Glied, welches also $=\frac{(s-d)^2}{s+d}$ ist. Erhebt man ferner das dritte Glied ins Quadrat und dividiert dies Quadrat durch das zweite Glied s—d, so erhält man das vierte Glied, welches also $=\frac{(s+d)^2}{s-d}$ ist. Hiernach heißt die Progression:

$$\frac{(s-d)^2}{s+d}:(s-d)=(s+d):\frac{(s+d)^2}{s-d}.$$

Da nun die Summe aller vier Glieder a beträgt, so ist:

$$\frac{(s-d)^2}{s+d}+(s-d)+(s+d)+\frac{(s+d)^2}{s-d}=a \text{ oder}$$

$$\frac{4s(s^2+d^2)}{s^2-d^2}=a.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß

$$(1)\ d=s\sqrt{\frac{a-4s}{a+4s}}.$$

Ferner ist:

$$\frac{(s-d)^4}{(s+d)^2}+(s-d)^2+(s+d)^2+\frac{(s+d)^4}{(s-d)^2}=b.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\frac{4s^6+28s^4d^2+28s^2d^4+4d^6}{(s^2-d^2)^2}=b.$$

Substituiert man in diese Gleichung den unter (1) für d gefundenen Wert, so erhält man:

$$8as^2+4bs=a(a^2-b);$$

hieraus folgt, daß

$$s=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+2a^2(a^2-b)}}{4a}.$$

Durch gehörige Substitution der Werte für d und s in obige Progression ergeben sich die verlangten Glieder.

35. Das erste Glied der Progression ist $=a$, das letzte Glied $t=b$ und da zwei Glieder gegeben sind und ebenfalls zwei Glieder gesucht werden sollen, so hat die Progression 4 Glieder, also $n=4$. Es kommt nun darauf an, den Exponenten e zu bestimmen. Nach Formel (13) ist

$$e=\sqrt[n-1]{t:a}=\sqrt[4-1]{b:a}=\sqrt[3]{b:a};$$

folglich ist das zweite Glied

$$a.\sqrt[3]{b:a}=\sqrt[3]{(a^3b):a}=\sqrt[3]{a^2b}$$

und das dritte Glied

$$a.(\sqrt[3]{b:a})^2=a\sqrt[3]{b^2:a^2}=\sqrt[3]{(a^3b^2):a^2}=\sqrt[3]{ab^2}.$$

36. Hier ist das erste Glied $=a$, das letzte Glied $=b$ und die Anzahl der Glieder $n=5$; gesucht wird zunächst der Exponent der Progression, nämlich e. Nun ist

$e=\sqrt[5-1]{b:a}=\sqrt[4]{b:a}$; folglich heißt das

2. Glied $a\sqrt[4]{b:a}=\sqrt[4]{(a^4b):a}=\sqrt[4]{a^3b}$.

3. „ $a(\sqrt[4]{b:a})^2=a\sqrt{b:a}=\sqrt{ab}$.

4. „ $a(\sqrt[4]{b:a})^3=a\sqrt[4]{b^3:a^3}=\sqrt[4]{(a^4b^3):a^3}=\sqrt[4]{ab^3}$.

37. Hier ist $a=x^9$, $e=\frac{1}{x}y$, $t=y^9$, gesucht wird s. Nun ist

$$s=\frac{et-a}{e-1}=\frac{\frac{1}{x}y\cdot y^9-x^9}{\frac{1}{x}y-1}=\frac{y^{10}-x^{10}}{y-x}=\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}.$$

38. $a=p\sqrt[4]{p^3}$, $e=-\sqrt[4]{q:p}$ und $t=-q\sqrt[4]{q^3}$; also ist

$$s=\frac{et-a}{e-t}=\frac{a-et}{1-e}=\frac{p\sqrt[4]{p^3}-(\sqrt[4]{q:p})\,.\,(-q\sqrt[4]{q^3})}{1-(\sqrt[4]{q:p})}$$

$$=\frac{p\sqrt[4]{p^3}-\sqrt[4]{q:p}\,.\,q\sqrt[4]{q^3}}{1+\sqrt[4]{q:p}}=\frac{\sqrt[4]{p}\,.\,p\sqrt[4]{p^3}-\sqrt[4]{q}\,.\,q\sqrt[4]{q^3}}{\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}}=$$

$$\frac{p\sqrt[4]{p^4}-q\sqrt[4]{q^4}}{\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}}=\frac{p^2-q^2}{\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}}.$$

39. Heißt das erste Glied x^2 und das zweite $x\sqrt{xy}$, so ist der Exponent $\sqrt{\frac{y}{x}}$. Demnach heißt die aus fünf Gliedern bestehende geometrische Progression:

$$x^2+x\sqrt{yx}+xy+y\sqrt{xy}+y^2$$

und ihre Summe heißt:

$$\frac{y^2\,.\,\sqrt{y:x}-x^2}{\sqrt{y:x}-1}=\frac{y^2\sqrt{y}-x^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=\frac{x^2\sqrt{x}-y^2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

40. Ist das erste Glied p^2 und heißt der Exponent $\sqrt[3]{q:p}$, so heißt die aus sieben Gliedern bestehende geometrische Progression:

$$p^2+p\sqrt[3]{p^2q}+p\sqrt[3]{pq^2}+pq+q\sqrt[3]{p^2q}+q\sqrt[3]{pq^2}+q^2$$

und ihre Summe ist:

$$s=\frac{q^2\sqrt[3]{q:p}-p^2}{\sqrt[3]{q:p}-1}=\frac{q^2\sqrt[3]{q}-p^2\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}.$$

5. Auflösungen der Aufgaben als Anwendungen der geometrischen Progressionen in Heis, Sammlung §. 84.

Aufgaben (1—13).

§. 430. 1. *α*) Gegeben ist hier das erste Glied $a=1$, der Exponent $e=2$ und die Anzahl der Glieder $n=64$; gesucht wird die Summe s. Nach (5) ist:

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{1\,.\,(2^{64}-1)}{2-1}=2^{64}-1.$$

Die Berechnung der Potenz 2^{64} siehe im §. 260 Nr. 13 (I. Teil S. 296); sie giebt:

18446744073709551616.

Hiervon 1 subtrahiert giebt die verlangte Zahl.

β) Hier ist a=2, n=20, e=2, also beträgt die Anzahl der Verführten in 20 Jahren, oder

$$s=\frac{2(2^{20}-1)}{2-1}=1048575.$$

2. Hier ist a=1, e=3, n=9; gesucht wird t und s. Nun ist nach Formel (1) und (5):

$$t=ae^{n-1}=1.3^{9-1}=3^8=6561 \mathcal{M}.$$

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{1.(3^9-1)}{3-1}=\frac{19682}{2}=9841 \mathcal{M}.$$

Da er noch 2 $\mathcal{M}$ übrig hatte, so hatte er 9843 $\mathcal{M}$ mitgebracht.

3. Der Spieler habe zum ersten Male x *Fl* gesetzt. Da er nun beim Verlieren den Einsatz verdoppelte und achtmal verlor, so ist e=2 und n=8. Es fragt sich nun, wie viel er beim achten Spiel verlor. Es wird also t gesucht. Nun ist:

$$t=ae^{n-1}=x.2^{8-1}=2^7x=128x \; Fl,$$

welche er im achten Spiele verlor; also hat er im ganzen verloren $s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{x(2^8-1)}{2-1}=x(2^8-1)=255x \; Fl.$

Beim achten Spiele hatte er 128x *Fl* verloren; in der Meinung, auch beim neunten Spiele zu verlieren, verdoppelte er diesen Verlust und setzt daher 2.128x=256x. Hierbei gewinnt er aber und setzt nun, in der Hoffnung wieder zu gewinnen, zum zweitenmal die Hälfte von 256x, also 128x u. s. w. Hier ist also x=256x, e=$\frac{1}{2}$, n=5; gesucht wird s. Es ist nun

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{256x[(\frac{1}{2})^5-1]}{\frac{1}{2}-1}=\frac{-248x}{-\frac{1}{2}}=496x.$$

Da er nun jedesmal das Zwölffache seines Einsatzes gewann, so hat er in den 5 Spielen 12.496x=5952x *Fl* gewonnen. Hierdurch hat er einen Gewinn von 5697 *Fl*; daher ist 5952x=255x+5697; folglich x=1 *Fl* hat er zum ersten Male eingesetzt.

4. Hier ist e=3, s=5096, n=6, denn die Vermehrung hat in 5 Jahren stattgefunden und gefragt wird, wie viel Hasen da waren, ehe die Vermehrung begann, daher n also nicht 5 sondern 6 beträgt. Gesucht wird a. Nun ist:

$$a=\frac{s(e-1)}{e^n-1}=\frac{5096(3-1)}{3^6-1}=\frac{10192}{728}=14 \text{ Hasen}.$$

5. Dasjenige Jahr, in welchem die Ernte mehr als 30000 *hl*

einbringt, sei n, so wird man im nten Jahre $2 \cdot 7^n$ *hl* erhalten, dieses beträgt aber mehr als 30000, daher ist

$$2 \cdot 7^n > 30000 \text{ oder } 7^n > 15000; \text{ also auch}$$

$$n \log 7 > \log 15000 \text{ oder } 0{,}845098n > 4{,}1760913; \text{ folglich}$$

$$n > 4{,}942.$$

Da nun n den kleinsten Wert bezeichnet und zwar in ganzen Zahlen, so muß n=5 sein. Also ist nach 5 Jahren der Wunsch erfüllt. Deshalb ist der Ertrag der Ernte

$$2 \cdot 7^5 = 33614 \ hl.$$

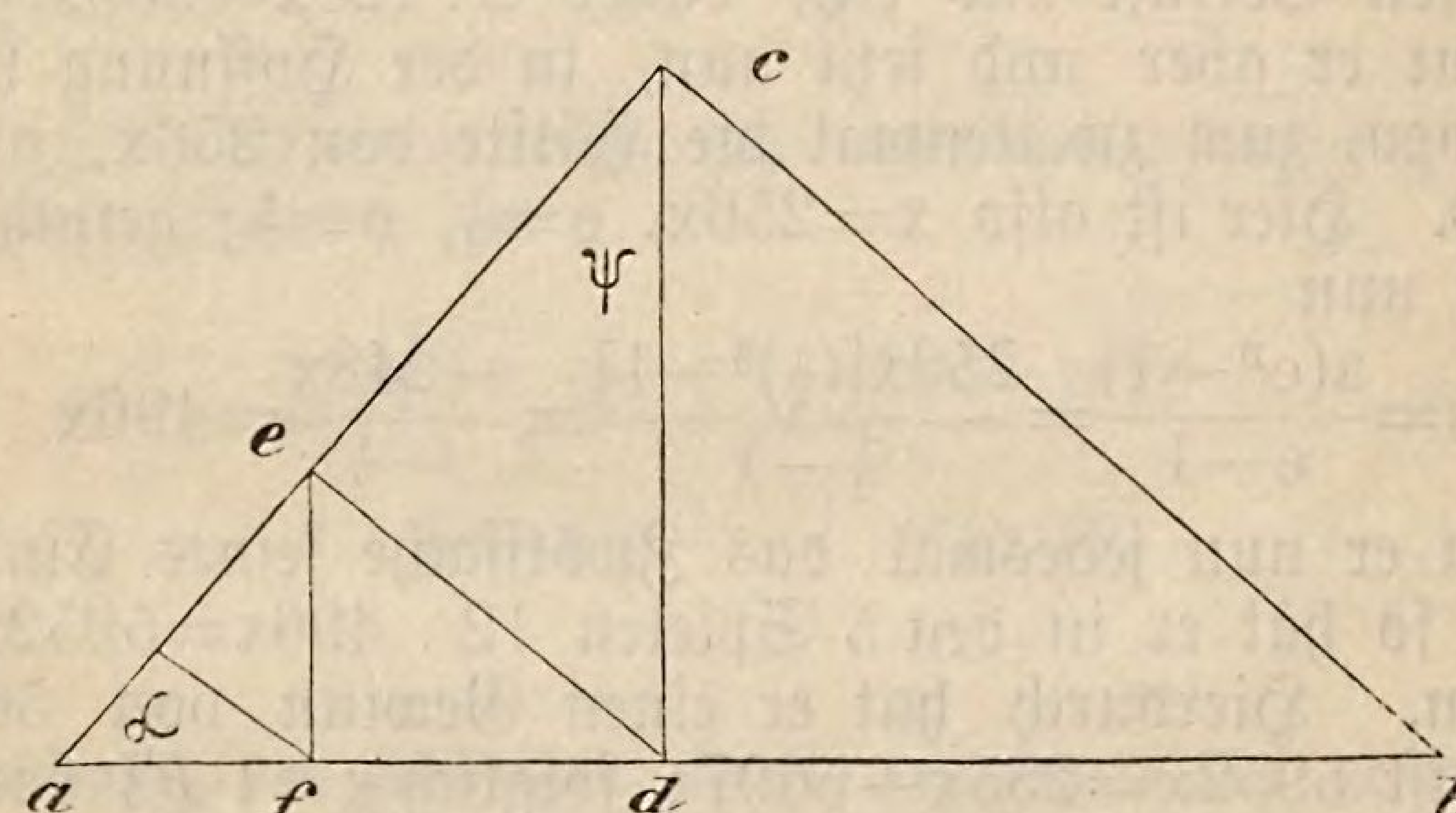
6. Hier ist a=m, $e=\frac{1}{2}$ und $n=\infty$; folglich ist nach §. 425 S. 547

$$s=\frac{a}{1-e}=\frac{m}{1-\frac{1}{2}}=2m.$$

7. Nach den zur Auflösung des Beispiels 22 in §. 425 gemachten Bemerkungen ist die geometrische Progression a, b, $b^2:a$, $b^3:a^2, \ldots\ldots b^{n-1}:a^{n-2}$, wovon das erste Glied =a, der Exponent b:a und das letzte Glied $b^{n-1}:a^{n-2}$ ist; ihre Summe ist also, weil die Progression unendlich ist,

$$s=\frac{a}{1-(b:a)}=\frac{a^2}{a-b}.$$

8. Der gegebene Winkel sei α. Fällen wir vom Punkte b auf dem Schenkel ab des Winkels α die Senkrechte cb auf ac, aus



dem Punkte c die Senkrechte cd auf ab; ferner sei ed ⊥ ac, ef ⊥ ab u. s. w. und es sei s=bc+cd+de+ef+ ......

Nun ist $\frac{dc}{bc}=\sin b=\cos\alpha$

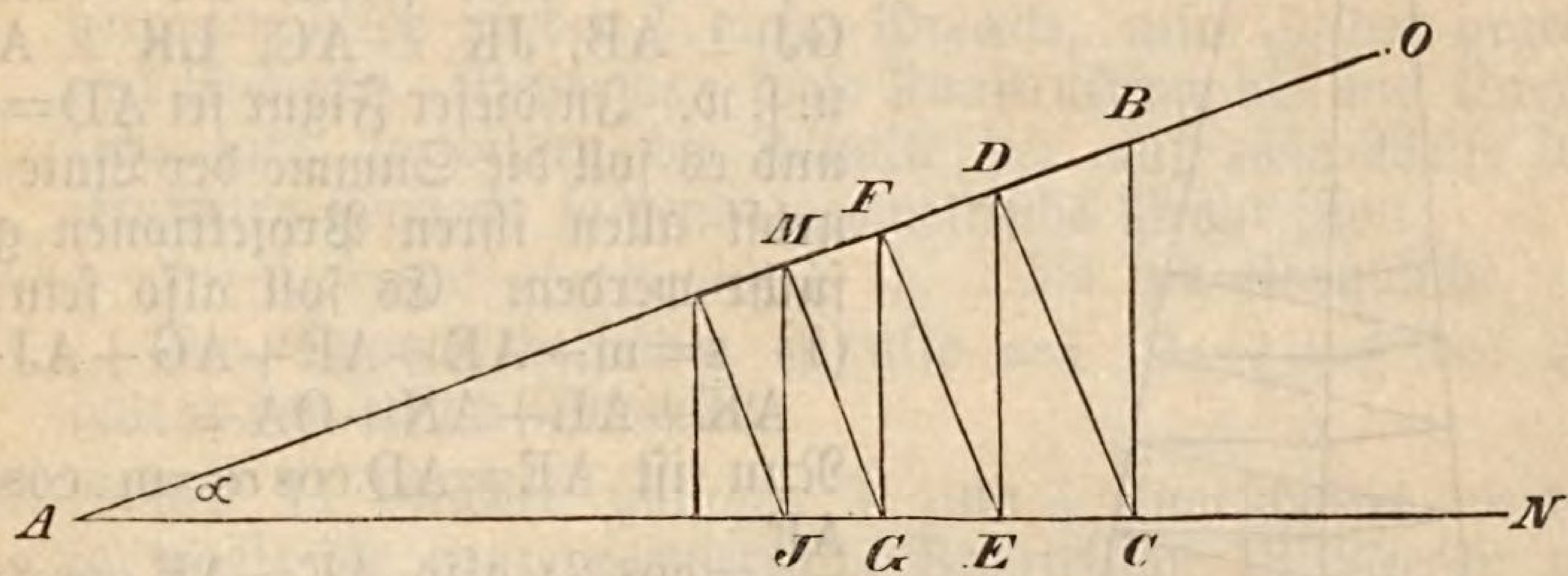
$$\frac{de}{dc}=\sin\psi=\cos\alpha,$$

also ist $dc=bc \cdot \cos\alpha = m \cdot \cos\alpha$; ferner

$de = dc \cdot \cos\alpha = m \cdot (\cos\alpha)^2;$
$ef = de \cdot \cos\alpha = m \cdot (\cos\alpha)^3$ u. s. w.; folglich ist
(1) $s = m + m \cdot \cos\alpha + m \cdot (\cos\alpha)^2 + m \cdot (\cos\alpha)^3 + \ldots\ldots$

Multiplizieren wir (1) mit $\cos\alpha$, so ist:
(2) $s \cdot \cos\alpha = m \cdot \cos\alpha + m \cdot (\cos\alpha)^2 + m \cdot (\cos\alpha)^3 + \ldots\ldots$

Subtrahieren wir (2) von (1), so ist
$s - s \cdot \cos\alpha = m$ oder $s(1 - \cos\alpha) = m$.
Da nun $1 - \cos\alpha = 2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2$ ist, so ist auch
$s[2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2] = m$; folglich $s = m : (2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2)$.



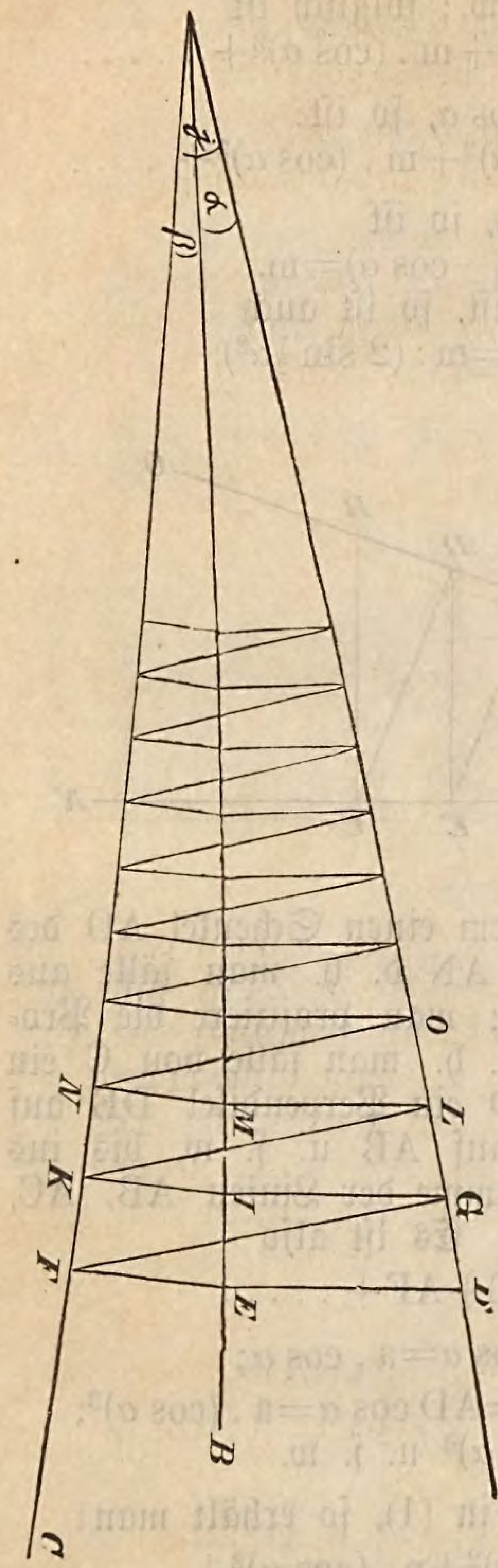
9. Es liege die Linie AB=a auf dem einen Schenkel AO des Winkel α; man projiziere sie auf AN d. h. man fälle aus B auf AN das Perpendikel BC; man projiziere die Projektion C auf den Schenkel AB d. h. man fälle von C ein Perpendikel auf AB; ziehe von D ein Perpendikel DE auf AC, von E die Senkrechte EF auf AB u. s. w. bis ins Unendliche. Es soll nun die Summe der Linien AB, AC, AD, AE u. s. w. gesucht werden. Es ist also

(1) $s = AB + AC + AD + AE + AF + \ldots\ldots$

Nun ist $AB = a$; $AC = AB \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$;
$AD = AC \cos\alpha = a \cdot (\cos\alpha)^2$; $AE = AD \cos\alpha = a \cdot (\cos\alpha)^3$;
$AF = AE \cos\alpha = a \cdot (\cos\alpha)^4$ u. s. w.

Substituiert man diese Werte in (1), so erhält man:
(2) $s = a + a \cdot \cos\alpha + a \cdot (\cos\alpha)^2 + a \cdot (\cos\alpha)^3 +$
$a \cdot (\cos a)^4 +$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\cos\alpha$ und subtrahiert diese Gleichung von (2), so erhält man:
$s(1 - \cos\alpha) = a$ oder $s[2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2] = a$; also
$s = a : (2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2)$.



10. Von den 3 Linien AD, AB und AC sollen sich die beiden ersten AD und AB unter dem spitzen Winkel α, die Linien AB und AC unter dem spitzen Winkel β und AD und AC unter dem spitzen Winkel γ durchschneiden. Man projiziere nun AD auf AB, d. h. man ziehe DE senkrecht auf AB, projiziere jetzt AE auf AC, also EF $\perp$ AC, ferner FG $\perp$ AD, GJ $\perp$ AB, JK $\perp$ AC, LK $\perp$ AD u. s. w. In dieser Figur sei AD=m und es soll die Summe der Linie m nebst allen ihren Projektionen gesucht werden. Es soll also sein:

(1) $s = m + AE + AF + AG + AJ + AK + AL + AN + OA + \ldots.$

Nun ist $AE = AD \cos\alpha = m \,.\, \cos\alpha$

$\frac{AF}{AE} = \cos\beta$; also $AF = AE \cos\beta = m \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta.$

$\frac{AG}{AF} = \cos\gamma$; also $AG = AF \cos\gamma = m \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma.$

$\frac{AJ}{AG} = \cos\alpha$; also $AJ = AG \cos\alpha = m \,.\, (\cos\alpha)^2 \cos\beta \,.\, \cos\gamma.$

$\frac{AK}{AJ} = \cos\beta$; also $AK = AJ \cos\beta = m \,.\, (\cos\alpha)^2 \,.\, (\cos\beta)^2 \,.\, (\cos\gamma).$

$\frac{AL}{AK} = \cos\gamma$; also $AL = AK \cos\gamma = m \,.\, (\cos\alpha)^2 \,.\, (\cos\beta)^2 \,.\, (\cos\gamma)^2$ u. s. w.

Setzt man nun die für AE, AF, AG, AJ, AK, AL gefundenen Werte in die Gleichung (1), so erhält man:

(2) $s = m + m \,.\, \cos\alpha + m \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta + m \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma + m(\cos\alpha)^2 \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \,.\, + m \,.\, (\cos\alpha)^2 \,.\, (\cos\beta)^2 \,.\, \cos\gamma + m \,.\, (\cos\alpha)^2 \,.\, (\cos\beta)^2 \,.\, (\cos\gamma)^2 + \ldots\ldots\ldots$ oder

$s = m(1 + \cos\alpha + \cos\alpha \,.\, \cos\beta) + (m \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma)(1 + \cos\alpha + \cos\alpha \,.\, \cos\beta) + (m(\cos\alpha)^2 \,.\, (\cos\beta)^2 \,.\, (\cos\gamma)^2)(1 + \cos\alpha + \cos\alpha \,.\, \cos\beta) + \ldots\ldots\ldots$

Hieraus folgt, daß das erste Glied $a = m(1 + \cos\alpha +$

$\cos\alpha.\cos\beta$), der Exponent $e=\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$ und da $n=\infty$, so ist also

$$s=\frac{a}{1-e}=\frac{m(1+\cos\alpha+\cos\alpha\,.\,\cos\beta)}{1-\cos\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma)}.$$

11. Da jedes der beiden auf den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks zu konstruierenden gleichschenkligen Dreiecke $\frac{1}{8}$ des gegebenen betragen soll, so betragen beide zusammen $\frac{1}{4}$ des gegebenen. Werden nun auf den Schenkeln der so entstandenen gleichschenkligen Dreiecke wieder gleichschenklige Dreiecke errichtet, wovon jedes wieder $\frac{1}{8}$ dieser Dreiecke beträgt, so betragen beide wieder $\frac{1}{4}$ dieser Dreiecke, also $\frac{1}{16}$ des gegebenen Dreiecks. Setzt man diese Konstruktion bis ins Unendliche fort, so bilden die Inhalte der auf diese Weise konstruierten Dreiecke folgende geometrische Progression: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\ldots..$ bis ins Unendliche.

Die Summe derselben ist also $=1:(1-\frac{1}{4})=\frac{4}{3}$ des Inhaltes des ersten Dreieckes.

12. Sollen 11 Glieder zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ eingeschaltet werden, so erhält die ganze geometrische Progression 13 Glieder, wovon das erste Glied $a=1$, das letzte Glied $t=\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder $n=13$ ist. Zur Bestimmung der gesuchten Glieder suche man den Exponenten e. Nun ist

$$e=\sqrt[n-1]{t:a}=\sqrt[12]{0,5};\text{ daher}$$

$$\log e=\frac{\log 0,5}{12}=\frac{-0,3010300}{12}=$$

$$\log(-0,0250858)=\log 0,9749142-1.$$

Zu diesem Logarithmus gehört die Zahl 0,9439; folglich ist der Exponent der Progression $=0,9439$, welches zugleich auch das zweite Glied derselben ist, da $a=1$. Sucht man die fernern Glieder vermittelst der Logarithmen, so ist:

3.	Glied	$=0,9439^2$	$=$ num log	$0,9498283-1=0,8909.$
4.	„	$=0,9439^3$	$=$ „ „	$0,9247425-1=0,8409.$
5.	„	$=0,9439^4$	$=$ „ „	$0,8996567-1=0,7937.$
6.	„	$=0,9439^5$	$=$ „ „	$0,8745708-1=0,7492.$
7.	„	$=0,9439^6$	$=$ „ „	$0,8494850-1=0,7071.$
8.	„	$=0,9439^7$	$=$ „ „	$0,8243992-1=0,6674.$
9.	„	$=0,9439^8$	$=$ „ „	$0,7993133-1=0,6300.$
10.	„	$=0,9439^9$	$=$ „ „	$0,7742275-1=0,5946.$
11.	„	$=0,9439^{10}$	$=$ „ „	$0,7491417-1=0,5612.$
12.	„	$=0,9439^{11}$	$=$ „ „	$0,7240558-1=0,5297.$

13. Die Annäherung des Achilles zur Schildkröte bildet folgende geometrische Progression: 1, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{144}$, $\frac{1}{1728}$ u. s. w. von unendlich vielen Gliedern; ihre Summe beträgt daher:

$\frac{1}{1-\frac{1}{12}}=1\frac{1}{11}$ Stadium für die Entfernung des Punktes, von wo Achilles ausging bis zu dem Punkte, wo er die Schildkröte erreichte.

Zinseszinsen und Rentenrechnung.

a) Das nach einer bestimmten Zeit angewachsene Kapital zu bestimmen (14—27).

§. 431. Wenn die Zinsen eines Kapitals nach einem bestimmten Zeitabschnitt, z. B. nach einem Jahre nicht ausbezahlt, sondern zum Kapitale geschlagen und wieder mitverzinset werden, so bleibt das Kapital nicht, wie bei der einfachen Verzinsung, unverändert, sondern nimmt mit jedem Zeitabschnitt zu. Weil nun die Zinsen jedes vorhergehenden Zeitabschnittes in dem nächstfolgenden wieder Zinsen einbringen und als Kapitalsumme betrachtet werden, so nennt man die auf solche Weise entstandenen Zinsen zusammengesetzte oder Zinseszinsen. Hierbei kommen 4 Größen in Betracht und zwar 1) das ursprüngliche oder Grundkapital; 2) die Zeit, während welcher das Kapital ausstehen soll; 3) der Zinsfuß, nach welchem die Zinsen berechnet werden und 4) das in der angegebenen Zeit durch Zinsen und Zinseszinsen angewachsene Kapital. Sind hiervon drei gegeben, so läßt sich die vierte allemal durch Rechnung finden.

14. Hier ist gegeben 1) das Grundkapital, 2) der Zinsfuß und und 3) die Zeit. Da das Kapital zu 4 pCt aussteht, so wird am Ende des ersten Jahres aus jeder Mark Kapital $\frac{104}{100}=1{,}04$ *M*; also beträgt am Ende des ersten Jahres das Kapital mit den Zinsen $1200 \,.\, 1{,}04$ *M*. Dieses Kapital samt den einjähr. Zinsen steht im zweiten Jahre wieder auf Zinsen und da bei 4 pCt. Zinsen aus jeder Mark wieder 1,04 *M* wird, so beträgt am Ende des zweiten Jahres das Kapital nebst Zinsen $1200 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}04 = 1200 \,.\, (1{,}04)^2$; also auch am Ende des dritten Jahres $1200 \,.\, (1{,}04)^3$ und demnach am Ende des 36ten Jahres $1200 \,.\, (1{,}04)^{36}$. Es ist daher, wenn wir das gesuchte Kapital mit k′ bezeichnen: $k' = 1200 \,.\, (1{,}04)^{36}$.

Vermittelst Log. haben wir:

$$\log k' = \log 1200 + 36 \log 1{,}04 \text{ oder}$$

$$\log k' = 3{,}0791812 + 0{,}6131988 = 3{,}6923800; \text{ also}$$

$$k' = \text{num} \log 3{,}6923800 = 4924{,}70 \, M;$$

mithin beträgt nach 36 Jahren das Kapital nebst Zinseszinsen 4924,70 *M*.

15. Das Kapital von 400 Pfund Sterling wächst bei 5 pCt in 60 Jahren zu $400 . (1,05)^{60}$ Pfund an. Daher ist:
$k' = 400 . (1,05)^{60}$ oder $\log k' = \log 400 + 60 \log 1,05$;
$\log k' = 2,6020600 + 60 . 0,0211893 = 3,8734180$
$k' = \text{num} . \log 3,8734180 = 7471,674$ Pfund.

16. Bei einem Zinsfuß von $4\frac{3}{4}$ beträgt das Kapital von 2400 *Fl* nach 27 Jahren mit Zinseszinsen:
$k' = 2400 . (1,0475)^{27}$; $\log k' = \log 2400 + 27 \log 1,0475$;
$\log k' = 3,3802112 + 27 . 0,0201540 = 3,9243692$;
$k' = \text{num} . \log 3,9243692 = 8401,73$ *Fl.*

17. Da der Zinsfuß p ist, so wird nach Verlauf des 1. Jahres aus jeder Einheit $1 + 0,01p$, also aus k am Ende des 1. Jahres $k(1 + 0,01p)$; am Ende des 2. Jahres $k(1 + 0,01p)^2$ und daher am Ende des nten Jahres $k(1 + 0,01p)^n$; daher $k' = k(1 + 0,01p)^n$.

18. Der Wald wird in 80 Jahren bei einer jährlichen Vermehrung von $2\frac{1}{4}$ pCt. auf $13490,6 . (1,0225)^{80}$ *cbm* angewachsen sein. Also ist:
$k' = 13490,6 . (1,0225)^{80}$
$\log k' = \log 13490,6 + 80 . \log 1,0225$ oder
$\log k' = 4,1300312 + 80 . 0,0096633 = 4,9030952$
$k' = \text{num} \log 4,9030952 = 80001$ *cbm.*

19. α) Aus 1 ₰ = 0,01 *M* wird in 1875 Jahren bei 4 pCt. $0,01 . (1,04)^{1875}$; also ist
$k' = 0,01 . (1,04)^{1875}$; $\log k' = \log 0,01 + 1875 \log 1,04$
$\log k' = -2 + 1875 . 0,0170333393 = 29,9375111875.$
Zu diesem Logarithmus gehört eine Zahl, die über 865986 Quadrillionen *M* ausmacht.
β) Wäre um dieselbe Zeit 1 ₰ = 0,01 *M* zu 5 pCt. ausgesetzt worden, so würde derselbe in 1875 Jahren mit Zinseszinsen auf mehr als 53 Quintillionen 695236 Quadrillionen *M* angewachsen sein.

20. α) Die 300 Thlr. in Gold sind 990 *M*. Bei 10 pCt. wird in 255 Jahren
$k' = 990 . (1,10)^{255}$ oder
$\log k' = \log 990 + 255 \log 1,10$
$= 2,9956352 + 255 . 0,0413927$
$= 13,5507737$
$k' = \text{num} . \log 13,5507737 = 35544600000000$ *M.*
β) Die Flasche kostet 0,6875 *M*, daher ist
$k' = 0,6875 . (1,10)^{255}$
$\log k' = \log 0,6875 + 255 \log 1,10$
$= 0,8372727 - 1 + 10,5551385$
$= 10,3924112$
$k' = 24683750000$ *M.*

γ) 1 Glas kostet $\frac{1}{8} . 0{,}6875 = 0{,}0859375$ *M*, also
$k' = 0{,}0859375 . (1{,}10)^{255}$
$\log k' = \log 0{,}0859375 + 255 \log 1{,}10$
$= 0{,}9341827 - 2 + 10{,}5551385$
$= 9{,}4893212$
$k' = 3085469000$ *M*.

δ) 1 Tropfen kostet $\frac{1}{1000} . 0{,}0859375 = 0{,}0000859375$ *M*
$k' = 0{,}0000859375 . (1{,}10)^{255}$
$\log k' = \log 0{,}0000859375 + 255 \log 1{,}10$
$= 0{,}9341827 - 5 + 10{,}5551385$
$= 6{,}4893212$
$k' = 3085469$ *M*.

21. α) Nimmt man 3 *l* Weingeist aus dem Gefäße heraus, so sind noch $20 - 3 = 17$ *l* darin; hierzu 3 *l* Wasser gegossen, liefert in 20 *l* Gemisch 17 *l* Weingeist; folglich ist in 1 *l* der Mischung $\frac{17}{20} = 0{,}85$ *l* Weingeist. Bei der fernern Abzapfung von 3 *l* Gemisch und durch Hinzufügung von 3 *l* Wasser enthält die Mischung in jedem *l* $0{,}85 . 0{,}85 = 0{,}85^2$. Geschieht dies 24-mal, so ist beim letztenmale in jedem *l* Gemisch nur noch $0{,}85^{24}$ *l* Weingeist, also in 20 *l* $20 . 0{,}85^{24}$; daher $x = 20 . 0{,}85^{24}$ oder $\log x = \log 20 + 24 \log 0{,}85$; also
$x = \text{num} \log 0{,}6070836 - 1 = 0{,}404654$ *l*.

β) Nach den in der vorhergehenden Aufgabe angestellten Betrachtungen bleibt, wenn $a = 20$, $b = 3$ und $n = 24$ gesetzt wird, nach der nten Mischung noch $a[(a - b) : a]^n$ *l* von der ursprünglichen Flüssigkeit zurück.

22. Werden mit 76 *g* Silber 20 *g* Kupfer zusammengeschmolzen, so enthalten diese 96 *g* Gemisch 76 *g* Silber, also 1 *g* Gemisch $\frac{76}{96} = \frac{19}{24}$ *g* Silber. Von dieser Mischung werden 20 *g* weggenommen; diese 20 *g* enthalten also $20 . \frac{19}{24} = 15\frac{5}{6}$ *g* Silber; das Gemisch dagegen enthält noch $76 - 15\frac{5}{6} = 60\frac{1}{6}$ *g* Silber. Die weggenommenen 20 *g* Gemisch werden aber durch 20 *g* Kupfer ersetzt, also enthält jetzt 1 *g* Gemisch nur noch $60\frac{1}{6} : 96 = \frac{361}{576} = (\frac{19}{24})^2$ *g* Silber. Bei der 3. Mischung würde 1 *g* Gemisch nur $(\frac{19}{24})^3$ *g* Silber und bei der 24. nur $(\frac{19}{24})^{24}$ *g* Silber enthalten. Es sind also zuletzt nur noch $76(\frac{19}{24})^{24}$ *g* Silber in dem Gemisch. Daher
$x = 76 . (\frac{19}{24})^{24}$; $\log x = \log 76 + 24 \log (\frac{19}{24}) = 0{,}4458312 - 1$,
also $x = 0{,}279146$ *g* Silber.

23. In $(a + b)$ *g* Gemisch sind a *g* Silber, also in 1 *g* Gemisch $a : (a + b)$ *g* Silber. Nach der 2. Mischung sind $[a : (a + b)]^2$, nach der nten Mischung $[a : (a + b)]^n$ in 1 *g* Gemisch enthalten. Statt a *g* Silber sind dann nur noch $a[a : (a + b)]^n$ *g* vorhanden.

24. Mischt man zu 9 Teilen guter Sorte 2 Teile schlechter, so ist, da in 11 Teilen 9 Teile guter Sorte sind, in 1 *kg* Gemisch

$\frac{9}{11}$ *kg* guter und $\frac{2}{11}$ *kg* schlechter Sorte. Bei der zweiten Mischung nimmt man 9 *kg* der ersten Mischung, worin also $9 \cdot \frac{9}{11}$ *kg* guter und $2 \cdot \frac{2}{11}$ *kg* schlechter sind; da im ganzen 11 *kg* gemischt werden, so sind von der guten Sorte in 1 *kg* Gemisch $9 \cdot \frac{9}{11} : 11 = \frac{9}{11} \cdot \frac{9}{11} = (\frac{9}{11})^2$ u. s. w. Da diese Operation 11mal geschieht, so ist das 11te mal nur noch $(\frac{9}{11})^{11}$ *kg* guter Sorte in 1 *kg* Gemisch enthalten. Nun ist vermittelst Logarithmen $(\frac{9}{11})^{11} = 0{,}10999$ *kg* guter; folglich 0,89001 *kg* schlechter Sorte. Da das *kg* von jener 4 *M* und das *kg* von dieser 2 *M* kostet, so kosten 0,10999 *kg* + 0,89001 *kg* = $0{,}10999 \times 4 + 0{,}89001 \times 2 = 0{,}43996 + 1{,}78002 = 2{,}21998$ *M*.

25. Werden die Zinsen halbjährig berechnet, so ist der Zinsfuß $4\frac{3}{4} : 2 = 2\frac{3}{8} = 2{,}375$; nun wächst 1 *Fl* in einem halben Jahre zu 1,02375 *Fl* an, folglich in 27 Jahren = 54 halben Jahren zu $1{,}02375^{54}$; daher 2400 *Fl* zu $2400 \cdot 1{,}02375^{54}$ an; daher ist: $k' = 2400 \cdot 1{,}02375^{54}$; $\log k' = \log 2400 + 54 \log 1{,}02375 = 3{,}9306872$;

daher $k' = \text{num} \cdot \log 3{,}9306872 = 8524{,}753$ *Fl*.

26. α) Da berechnet werden soll, wie groß das Kapital von 68000 *M* zu 5 pCt. in $6\frac{1}{2}$ Jahren wird, so berechne man zuerst, zu wie viel dasselbe anwächst in 6 Jahren, d. h. zu $68000 \cdot 1{,}05^6$ *M*. Nun fragt es sich, wie groß dieses Kapital nach Verlauf eines halben Jahres wird. Da fürs Jahr 5 pCt. berechnet werden, so macht dies für ein halbes Jahr $2\frac{1}{2} = 2{,}5$ pCt.; folglich wird das zuletzt erhaltene Kapital in dem halben Jahre auf $68000 \cdot 1{,}05^6 \cdot 1{,}025$ *M* anwachsen; daher ist:

$$k' = 68000 \cdot 1{,}05^6 \cdot 1{,}025;$$

$\log k' = \log 68000 + 6 \log 1{,}05 + \log 1{,}025 = 4{,}9703686$; also

$$k = \text{num} \cdot \log 4{,}9703686 = 93404{,}68 \text{ M}.$$

β) Das Kapital k wächst in a Jahren zu p pCt. mit Zinseszinsen zu $k(1+0{,}01p)^a$ an, und dieses in dem ajährigen Zeitraum angewachsene Kapital wird in $\frac{b}{c}$ Jahr

$$k(1+0{,}01p)^a \cdot \left(1+0{,}01p\frac{b}{c}\right)$$

groß werden, ein Wert, den das ursprüngliche Kapital also in $\left(a+\frac{b}{c}\right)$ Jahren erlangt hat.

27. Lehnt die Sparkasse von jemand 1500 *Fl* zu 3 pCt., so ist sie nach 10 Jahren $1500 \cdot 1{,}03^{10} = 2015{,}86$ *Fl* schuldig; sie hat dagegen, wenn sie dasselbe Kapital zu 5 pCt. ausleiht, $1500 \cdot 1{,}05^{10} = 2443{,}34$ *Fl* zu fordern, folglich gewinnt sie

$$2443{,}34 - 2015{,}86 = 427{,}48 \text{ Fl}.$$

b) Das Grundkapital wird gesucht (28—31).

§. 432. 28. Soll der jetzige Wert einer nach einer bestimmten Zeit zu zahlenden Schuld gesucht werden, so kann die Schuldsumme als ein in der bestimmten Zeit angewachsenes Kapital betrachtet werden, woraus das ursprüngliche oder Grundkapital abgeleitet werden soll. Da der Diskonto $3\frac{1}{2}$ pCt. beträgt, so ist 1 ℳ, die nach 1 Jahre zahlbar ist, jetzt bar $\frac{200}{207}$ ℳ wert, also 1 ℳ, die nach 7 Jahren zu zahlen ist, jetzt nur $(\frac{200}{207})^7$ ℳ wert; folglich 3600 ℳ auch $3600 . (\frac{200}{207})^7 = 2829,57$ ℳ.

29. Das ausgeliehene Kapital betrage x ℳ. Dieses Kapital beträgt in 9 Jahren oder 36 Vierteljahren, da die Zinsen vierteljährig berechnet werden, zum Zinsfuße $3\frac{3}{4}$ jährlich $\frac{15}{16} = 0,9375$ vierteljährig $x . 1,009375^{36}$ ℳ. Da das ausgeliehene Kapital nach 36 Vierteljahren auf 83954,2 ℳ angewachsen ist, so ist:

$x . 1,009375^{36} = 83954,2$; hieraus erhalten wir:

$\log x + 36 \log 1,009375 = \log 839542 - \log 10$ oder

$\log x + 0,1458900 = 4,9240424$; folglich

$\log x = 4,7781524$; daher $x = 60000$ ℳ.

30. Der Wald habe vor 12 Jahren x *cbm* Holz enthalten, so enthält derselbe nach dem angegebenen Zeitraum, da er sich jährlich um $4\frac{3}{4}$ pCt. vermehrt, $x . 1,0475^{12}$ *cbm*. Da auf diese Weise 12000 *cbm* entstanden sind, so ist:

$x . 1,0475^{12} = 12000$; $\log x + 12 \log 1,0475 = \log 12000$;

daher $x = \text{num} . \log 3,8373332 = 6876$ *cbm*.

31. Heißt der bare Wert des Kapitals x zum Zinsfuß p, so wächst dasselbe in n Jahren zu $x(1+0,01p)^n$ an. Da nun dasselbe k′ beträgt, so ist:

$x(1+0,01p)^n = k'$; also $x = k' : (1+0,01p)^n$.

c) Der Zinsfuß wird gesucht (32—37).

§. 433. 32. *α*) Da nach dem Zinsfuße p gefragt wird, so läßt sich die Antwort leicht aus der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe herleiten, indem man x mit k vertauscht. Es ist alsdann:

$k(1+0,01p)^n = k'$ oder $(1+0,01p)^n = k' : k$.

Ziehe aus beiden Teilen dieser Gl. die nte Wurzel und bestimme p, so wird

$$p = 100\left\{\sqrt[n]{k' : k} - 1\right\}.$$

β) Das Kapital von 18796 ℳ stehe zu x pCt., so betrug das-

selbe nach 10 Jahren $18796(1+0{,}01x)^{10}$ und weil dasselbe auf diese Weise auf 29189,6 ℳ angewachsen ist, so ist:

$$18796(1+0{,}01x)^{10}=29189{,}6;$$

$$(1+0{,}01x)^{10}=\frac{29189{,}6}{18796}=\frac{7297{,}4}{4699};$$

$$1+0{,}01x=\sqrt[10]{7297{,}4:4699}=1{,}045;\text{ daher}$$

$$0{,}01x=0{,}045;\text{ also } x=4{,}5\text{ pCt.}$$

γ) Da hier $k=600$, $k'=800$, $n=3$ ist, so braucht man nur diese Werte in die unter α) gefundene Formel einzusetzen, und man hat:

$$p=100\,.\sqrt[3]{\tfrac{800}{600}}-100=100(1{,}10064-1)=10{,}064\text{ pCt.}$$

33. Da die Erfahrung gelehrt hat, daß die Volksmenge eines Staates in einem sich gleichbleibenden Verhältnisse wächst, so kann man sich die jährliche Vermehrung derselben wie die jährliche Vermehrung eines Kapitals durch Zinseszinsen vorstellen und daher sind bei diesem und bei ähnlichen Beispielen dieselben Schlüsse und Folgerungen zulässig, wie bei der Zinseszinsrechnung. Setzt man daher in die 32. α) gefundene Formel die entsprechenden Werte, nämlich:

$$n=24,\ k'=33566+32500=66066\text{ und } k=32500,$$

so hat man, wenn x den jährlichen Zuchwachs auf 100 Seelen bezeichnet:

$$x=100\left(\sqrt[24]{\frac{66066}{32500}}-1\right)=100(1{,}03-1)=3\text{ pCt.}$$

34. Gießt man x l Wasser zu dem Weingeist, so sind in dem Gemische von $(180+x)$ l 180 l Weingeist, also in 1 l des Gemisches $\frac{180}{180+x}$ l Weingeist. Nimmt man nun x l heraus, so sind darin $\frac{180x}{180+x}$ l Weingeist und es bleiben also noch $\frac{180^2}{180+x}$ l Weingeist im Gefäße; folglich in 1 l des Gemisches $\left(\frac{180}{180+x}\right)^2$ l Weingeist. Da sich nun diese Operation 25mal wiederholt, so befinden sich zuletzt in 1 l Gemisch nur noch $\left(\frac{180}{18x+x}\right)^{25}$ l Weingeist; also sind jetzt statt $180\times$ 1 l nur noch $180\left(\frac{180}{180+x}\right)^{25}$ l Weingeist vorhanden, und da dies der 113te Teil des ursprünglichen Weingeistes ausmacht, so ist: $180.\left(\frac{180}{180+x}\right)^{25}=\frac{180}{113}$ oder $113\,.\left(\frac{180}{180+x}\right)^{25}=1$; also

$\log(180+x)=2,3373956$ oder $180+x=217,468$;
folglich $x=37,468$ *l* Wasser.

Man kann die erhaltene Gleichung auch auf folgende Weise umformen:

$$(180+x)^{25}=180^{25}.113 \text{ oder } 180+x=180\sqrt[25]{113};$$

$$\text{folglich } x=180[\sqrt[25]{113}-1],$$

ein Ausdruck, welcher der in 32. α) gefundenen Formel gleich ist. Man hätte daher auch die Antwort dieser Aufgabe aus der Antwort der angezogenen Aufgabe leicht ableiten können. Sucht man vermittelst Log. die 25te Wurzel aus 113, so erhält man:

$$x=180(1,208155-1)=37,468\ l.$$

35. α) Steigt die Bevölkerung um x pCt. in einem Jahre, so wird die Bevölkerung in 40 Jahren auf

$$6479730(1+0,01x)^{40}$$

steigen, und weil dies 9187176 ausmacht, so ist

$$6479730(1+0,01x)^{40}=9187176; \text{ also}$$

$$1+0,01x=\sqrt[40]{\frac{9187176}{6479730}}=\sqrt[40]{\frac{1531196}{1079955}} \text{ oder}$$

$$1+0,01x=1,00876; \text{ also } x=0,876 \text{ pCt.}$$

Behält hier x denselben Wert und steigt die Bevölkerung in 1830—1800=30 Jahren auf 13840751 Seelen, so hat man $9187176(1+0,01x)^{30}=13840751$; also

$$1+0,01x=\sqrt[30]{\frac{13840751}{9187176}} \text{ oder}$$

$$1+0,01x=1,01375;\ x=1,375 \text{ pCt.}.$$

Man hätte diese Resultate auch aus 32. α) ableiten können.
β) Wenn die Bevölkerung in 9 Jahren von 208700 auf 318500 angewachsen ist, so wurden aus je 1000 Seelen 1048; folglich war die Bevölkerung nach 24 Jahren, wenn sie in demselben Maße zunimmt,

$$208700 . 1,048^{24}=644299 \text{ Seelen.}$$

36. Das Kapital müsse zu x pCt. stehen, um sich in 10 Jahren zu verdoppeln. Aus jeden 100 des Kapitals wird also $100+x$ in einem Jahre; demnach wächst die Einheit zu $1+0,01x$ in 1 Jahre an; folglich in 10 Jahren zu $(1+0,01x)^{10}$. Da hierdurch das Kapital doppelt so groß wird, so ist also:

$$(1+0,01x)^{10}=2;\ x=100[\sqrt[10]{2}-1]=100 . 0,07177=7,177 \text{ pCt.}$$

37. Beträgt die jährliche Vermehrung x pCt. und sterben von je 50 Personen 3, also von je 100 Personen 6, so vermehrt

sich die Bevölkerung nur um (x—6) pCt., folglich wird aus jedem Einwohner am Ende des 1. Jahres

$$\frac{100+(x-6)}{100}=\frac{94+x}{100},\text{ also}$$

wird am Ende des 430ten Jahres aus 70 Einwohnern $70\left(\frac{94+x}{100}\right)^{430}$. Weil nun in diesem Zeitraum die Bevölkerung auf 660000 Einwohner angewachsen ist, so ist:

$$70\,.\left(\frac{94+x}{100}\right)^{430}=660000.\text{ Hieraus erhält man}$$

$$\frac{94+x}{100}=1,02151;\text{ folglich } x=8,151\text{ pCt.}$$

Auch hier hätte man die Antwort aus 32. α) herleiten können.

d) Die Zeit wird gesucht. (38—45)

§. 434. 38. Das Kapital habe x Jahre gestanden, so ist dasselbe in dieser Zeit bei $3\frac{1}{2}$ pCt. auf $12388\,.\,1,035^x$ *Fl* angewachsen.

Es ist also

$12388\,.\,1,035^x=22232,45$; hieraus erhält man:

$0,01494035x=0,2536381$; folglich x=17 Jahre.

39. α) Es verdoppele sich in x Jahren zu 3 pCt., so ist:

$1,03^x=2$; folglich x=23,45 Jahre.

β) Verdoppelt sich das Kapital in x Jahren zu 4 pCt., so ist:

$1,04^x=2$; also x=17,67 Jahre.

γ) Wenn sich das Kapital in x Jahren zu $4\frac{1}{2}$ pCt. verdoppeln soll, so hat man:

$1,045^x=2$; folglich x=15,75 Jahre.

δ) Soll es sich in x Jahren zu 5 pCt. verdoppeln, so hat man: $1,05^x=2$; folglich x=14,21 Jahre.

40. α) In x Jahren finde der in der Aufgabe angegebene Fall statt, dann ist bei $3\frac{3}{4}$ pCt. das Kapital von 2739 *Fl* auf $2739\,.\,1,0375^x$ und das Kapital von 3815 *Fl* bei $3\frac{3}{4}$ pCt. in 7 Jahren auf $3815\,.\,1,0375^7$ *Fl* angewachsen. Da in diesem Falle beide Kapitalien gleich groß sein sollen, so ist $2739\,.\,1,0375^x=3815\,.\,1,0375^7$. Hieraus folgt x=16 Jahre.

β) Nach x Jahren sei das Kapital von 8443 *M* zu 4 pCt. eben so viel wert, als 9000 *M* zu 6 pCt. nach 9 Jahren, so hat man:

$$8443\,.\,1,04^x=9000\,.\,1,06^9.$$

Hieraus folgt x=15 Jahre.

41. Vor x Jahren habe man 1 *Cent* auf Zinseszinsen setzen müssen, um α) bei 4 pCt., β) bei $4\frac{1}{2}$ pCt und γ) bei 5 pCt. Zinsen die Höhe der von Frankreich an Deutschland im Jahre 1871 zu zahlenden Kriegsschuld zu erreichen. In dieser Zeit wächst 1 *Cent* bei 4 pCt. zu $(1{,}04)^x$, bei $4\frac{1}{2}$ pCt. zu $(1{,}045)^x$ und bei 5 pCt. zu $(1{,}05)^x$ *Cent* an. Da dies nun im Jahre 1871 einen Betrag von 5 Milliarden *Frc* oder 500 Milliarden *Cent* ausmachen soll, so ist:

α) $(1{,}04)^x = 5 \, . \, 10^{11}$ oder $x \log 1{,}04 = \log 5 + 11 \log 10$; daher $0{,}01703334x = 11{,}69897000$; also $x = 687$ Jahre.

β) $(1{,}045)^x = 5 \, . \, 10^{11}$; also: $0{,}01911629x = 11{,}69897000$; folglich $x = 612$ Jahre.

γ) $(1{,}05)^x = 5 \, . \, 10^{11}$; also: $0{,}02118930x = 12{,}69897000$; folglich $x = 552$ Jahre.

Deshalb mußte 1 *Cent*

α) zu 4 pCt. vor 687 Jahren, also ums Jahr $1871 - 687 = 1184$;

β) zu $4\frac{1}{2}$ pCt. vor 612 Jahren, also ums Jahr $1871 - 612 = 1259$;

γ) zu 5 pCt. vor 552 Jahren, also ums Jahr $1871 - 552 = 1319$

auf Zinseszinsen gesetzt werden, um damit im Jahre 1871 den Betrag der 5 Milliarden *Frc* bezahlen zu können.

42. Das Kapital k erhalte nach x Jahren bei p pCt. den Wert k', so ist:

$$k(1+0{,}01p)^x = k'; \text{ daher:}$$
$$\log k + x \log (1+0{,}01p) = \log k'; \text{ oder}$$
$$x \log (1+0{,}01p) = \log k' - \log k; \text{ folglich:}$$
$$x = (\log k' - \log k) : \log (1+0{,}01p) \text{ Jahre.}$$

43. In $278 + 213 = 491$ *kg* Gemisch sind 278 *kg* blauer Farbe, also in 1 *kg* Gemisch $\frac{278}{491}$ *kg*. Soll nun die Mischung x mal vor sich gehen, so sind zuletzt noch in jedem *kg* des Gemisches $(\frac{278}{491})^x$ *kg* blauer Farbe. Bleibt auf diese Weise in der Mischung nur noch der hundertste Teil an blauer Farbe übrig, so ist also zuletzt in 1 *kg* des Gemisches nur noch $\frac{1}{100}$ *kg* blauer Farbe. Es ist daher $(\frac{278}{491})^x = \frac{1}{100}$; folglich $x = 8$ circa; die Mischung hat also ungefähr 8mal stattgefunden.

44. Das Kapital von 5000 *M* bringt in 1 Jahre zu 6 pCt. 300 *M* Zinsen ein, also betrug dasselbe am Ende des ersten Jahres mit den Zinsen 5300 *M*. Nun bringen nach der Aufgabe diese 5300 *M* noch $26\frac{1}{2}$ *M* Zinsen und es fragt sich, in welcher Zeit dies der Fall sein wird. Nun bringen 5300 *M* in 12 Monaten zu 6 pCt. 318 *M* Zinsen, also in 1 Monat $318 : 12 = 26\frac{1}{2}$ *M* Zinsen; folglich muß das Ka-

pital von 5000 ℳ 1 Jahr und 1 Monat auf Zinseszinsen stehen, um $5326\frac{1}{2}$ ℳ auszumachen.

45. Zu 4 pCt. wächst das Kapital in der Zeit x zu $1{,}04^x$ an. Da sein Bestand vor x Jahren nur $\frac{1}{3}$ des jetzigen Wertes ausmachen soll, so ist:

$\frac{1}{3}.1{,}04^x=1$ oder $1{,}04^x=3$; folglich $x=28{,}01$ Jahre.

e) Vermischte Beispiele (46—56).

§. 435. 46. Das Kapital betrage x ℳ; folglich hat man zum Zinsfuße p' nach n Jahren $x.(1+0{,}01p)^n$ ℳ zu bezahlen. Da man es aber zu p' pCt. verleiht, so hat man in diesem Falle $x(1+0{,}01p')^n$ zu fordern. Weil man auf diese Weise m ℳ gewinnt, so ist

$$x(1+0{,}01p')^n-x(1+0{,}01p)^n=m;$$
$$x[(1+0{,}01p')^n-(1+0{,}01p)^n]=m; \text{ daher}$$
$$x=m:[(1+0{,}01p')^n-(1+0{,}01p)^n] \text{ ℳ}.$$

47. Das Kapital von 16000 *Fl* bringt zu 5 pCt. in 1 Jahre 800 *Fl* Zinsen ein, also ist das Kapital am Ende des 1. Jahres mit den Zinsen 16800 *Fl*. Von diesem vergrößerten Kapitale werden 1 pCt. für Verwaltungskosten berechnet und in Abzug gebracht. Dieselben betragen im 1. Jahre 168 *Fl*, demnach haben die 16000 *Fl* nicht 800, sondern nur 800—168 =632 *Fl* Zinsen eingebracht; daher steht das Kapital eigentlich nur zu (632.100):16000=3,95 pCt. Nach Verlauf von 20 Jahren wird also das Kapital

$$16000.1{,}0395^{20}=34722{,}4 \text{ } Fl \text{ betragen.}$$

48. *a*) Da das Kapital k sich um die jährlichen Zinsen zu p pCt. vermehrt, aber um die Summe u vermindert, so wächst dasselbe auf folgende Weise an:

Nach dem 1. Jahre beträgt es $k(1+0{,}01p)-u$;
„ „ 2. „ „ „ $k(1+0{,}01p)^2-u(1+0{,}01p)-u$
„ „ 3. „ „ „ $k(1+0{,}01p)^3-u(1+0{,}01p)^2-u(1+0{,}01p)-u$

also nach n Jahren

$$k(1+0{,}01p)^n-u(1+0{,}01p)^{n-1}-u(1+0{,}01p)^{n-2}\ldots-u(1+0{,}01p)-u.$$

Demnach besteht das gesuchte Kapital aus zwei Teilen und zwar aus $k(1+0{,}01p)^n$ und aus der Summe einer geometrischen Progression, wovon das erste Glied u und der Exponent $(1+0{,}01p)$ und die Anzahl der Glieder n ist. Die Summe dieser Reihe ist

$$u[(1+0{,}01p)^n-1]:((1+0{,}01p)-1)=\frac{100u[(1+0{,}01p)^n-1]}{p},$$

folglich beträgt das Kapital nach n Jahren

$$k(1+0{,}01p)^n - 100u\frac{(1+0{,}01p)^n-1}{p} \text{ oder}$$

$$\left\{k-\frac{100u}{p}\right\}\left\{1+0{,}01p\right\}^n+\frac{100u}{p}.$$

β) Wird das Kapital jährlich um u vermehrt statt vermindert, so beträgt dasselbe nach n Jahren

$$k.(1+0{,}01p)^n+100u\frac{(1+0{,}01p)^n-1}{p} \text{ oder}$$

$$\left\{k+\frac{100u}{p}\right\}\left\{1+0{,}01p\right\}^n-\frac{100u}{p}.$$

Man kann demnach auch beide Formeln in α und β auf folgende Weise zusammenfassen, wobei das obere Zeichen für die Verminderung und das untere für die Vermehrung gilt:

$$\left\{k\mp\frac{100u}{p}\right\}\left\{1+0{,}01p\right\}^n\pm\frac{100u}{p}.$$

49. Hier ist k=600000 *M*, p=5, u=6000 *M*, n=12; also haben wir nach Aufg. 48. α), wenn wir das Vermögen mit x bezeichnen

$$x=[600000-\tfrac{100}{5}.6000](1{,}05)^{12}+\tfrac{100}{5}.6000$$
$$=480000.(1{,}05)^{12}+120000$$
$$=480000.1{,}79585+120000=982011 \text{ M.}$$

50. Der Schuldner ist nach Ablauf von 10 Jahren seinem Gläubiger 2578.$1{,}05^{10}$ *Fl* schuldig. Da aber der Schuldner seinem Gläubiger jährlich 100 *M* abträgt, so schuldet ihm der Gläubiger nach 10 Jahren $\frac{100(1{,}05^{10}-1)}{1{,}05-1}$. Hiermit gleicht der Schuldner einen Teil seiner Schuld aus und der Gläubiger hat daher nach Ablauf von 10 Jahren nur noch zu fordern

$$2578.1{,}05^{10}-\frac{100(1{,}05^{10}-1)}{1{,}05-1}=4199{,}3-1257{,}8=2941{,}5 \text{ Fl.}$$

51. Der Wald, dessen Zuwachs jährlich 5 pCt. beträgt, würde nach Ablauf von 10 Jahren 10000.$1{,}05^{10}$ *cbm* Holz enthalten, wenn nicht jährlich 800 *cbm* geschlagen würden. Hierdurch entsteht in der angegebenen Zeit eine Verminderung, die gleich ist derjenigen, die in 48. α) das Kapital durch Wegnahme von u u. s. w. erlitt. Setzt man daher k=10000, p=5, n=10, u=800, so ist nach 10 Jahren der eigentliche Bestand des Waldes:

$$\left(10000-\frac{100.800}{5}\right).(1{,}05)^{10}+\frac{100.800}{5} \text{ oder}$$

$$(-6000).(1{,}05)^{10}+16000=(-6000).1{,}6288946+16000=6226{,}6 \text{ cbm.}$$

52. Das Vermögen wird bei 4 pCt. nach 8 Jahren $2817.(1,04)^8$ *Fl* betragen. Da dasselbe aber jährlich außer den Zinsen auch noch um 420 *Fl* vermehrt wird, so wird mit Rücksicht auf 48. β), wenn man $k=2817$, $p=4$, $n=8$, $u=420$ setzt, der wirkliche Betrag des Vermögens nach 8 Jahren sein:

$$\left(2817+\frac{100\,.\,420}{4}\right)\cdot(1{,}04)^8-\frac{100\,.\,420}{4}$$

$$=13317\,.\,(1{,}04)^8-10500 \text{ oder}$$

$$13317\,.\,1{,}368569-10500=7725{,}23 \; Fl.$$

53. Am Ende des 1. Jahres ist der Pächter 280 *Fl* zu zahlen schuldig. Da er aber nicht bezahlt und für diese Unterlassung Zinsen geben muß, so sind die ersten 280 *Fl* am Ende des 2. Jahres auf $280\,.\,1{,}04$ *Fl* angewachsen, und weil er auch jetzt wieder die im 2. Jahre fällig werdenden 280 *Fl* zu zahlen unterläßt, so beträgt seine Schuld am Ende des 2. Jahres $280\,.\,1{,}04+280$ *Fl*. Am Ende des 3. Jahres ist daher seine Schuld aus den beiden ersten Jahren auf $280\,.\,(1{,}04)^2+280\,.\,(1{,}04)$ gestiegen, und da er auch jetzt mit den am Ende des 3. Jahres fällig werdenden 280 *Fl* im Rückstande bleibt, so beträgt die ganze Schuld am Ende des 3. Jahres

$$280\,.\,(1{,}04)^2+280\,.\,(1{,}04)+280 \text{ u. s. w.}$$

Da der Schuldner nun 8 Jahre hindurch mit der Abtragung seiner Pacht im Rückstande bleibt und deshalb Zinsen und Zinseszinsen berechnet werden, so bildet die Summe seiner sämtlichen Rückstände eine geometrische Progression, deren erstes Glied $=280$, deren Exponent $=1{,}04$ und deren Gliederzahl $=8$ ist; also ist nach der Formel (5)

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{280(1{,}04^8-1)}{1{,}04-1}=\frac{280\,.\,0{,}36856}{0{,}04}=$$

$$2580 \; Fl, \text{ genau } 2579{,}983 \; Fl.$$

54. Das Kapital sei in x Jahren verzehrt, so hat dasselbe zu $4\frac{1}{4}$ pCt. mit Zinseszinsen am Schlusse dieser Zeit eine Größe von $30000\,(1{,}0425)^x$ *M*. Da nun das, was er davon jährlich wegnimmt, mehr als die Zinsen beträgt, so muß er auch in der angegebenen Zeit das Kapital samt den Zinsen verzehrt haben. Was er nun verzehrt, ist einer geometrischen Progression gleich, wovon das erste Glied $a=4680$, $e=1{,}0425$, $n=x$ ist, mithin die Summe derselben

$$s=\frac{a(e^n-1)}{e-1}=\frac{4680[(1{,}0425)^x-1]}{1{,}0425-1}.$$

Da durch diese Wegnahme das Kapital nebst den Zinsen aufgezehrt wird, so ist:

$$30000 . (1{,}0425)^x - \frac{4680[(1{,}0425)^x - 1]}{1{,}0425 - 1} = 0 \text{ oder}$$
$$3405 . (1{,}0425)^x = 4680$$
$$0{,}0180761x = 0{,}1381288; \; x = 7{,}64 \text{ Jahre.}$$

55. Aus dem Kapitale k werde bei p pCt. Zinsen nach x Jahren die Summe k'. Am Ende dieser Zeit ist es dann zu $k(1+0{,}01p)^x$ angewachsen. Wird es nun außerdem jedes Jahr um die Summe u vermehrt oder vermindert, so bildet die Summe dieser Vermehrung oder Verminderung wieder eine geometrische Progression, wovon das erste Glied a=u, e=1+0,01p und n=x, also beträgt diese Summe

$$u \cdot \frac{(1+0{,}01p)^x - 1}{1+0{,}01p - 1}.$$

Da durch diese Vermehrung oder Verminderung das Kapital k' entstehen soll, so ist:

$$k(1+0{,}01p)^x \pm u \cdot \frac{(1+0{,}01p)^x - 1}{1+0{,}01p - 1} = k'$$
$$x = \left\{\log\left(k' \pm \frac{100}{p}u\right) - \log\left(k \pm \frac{100}{p}u\right)\right\} : \log(1+0{,}01p) \text{ Jahre.}$$

56. Die Erben hätten jetzt x *M* zu zahlen, so müssen diese x *M* soviel durch Zinseszins aufbringen, daß, wenn jedes Jahr 175 *M* davon genommen werden, am Ende des 12. Jahres alles aufgezehrt ist. Nach den in voriger Aufg. angestellten Betrachtungen ist demnach, wenn man k=x, p=4, u=175 und k'=0 setzt:

$$x(1{,}04)^{12} - \frac{175((1{,}04)^{12} - 1)}{1{,}04 - 1} = 0.$$
$$x(1{,}04)^{12} = 4375 . (1{,}04)^{12} - 4375;$$
$$1{,}60103x = 2629{,}50625; \; x = 1642{,}39 \; M.$$

f. Von den Jahresrenten (57—70).

§. 436. Im allgemeinen versteht man unter Rente jede bestimmte Geldeinnahme, die nach Ablauf einer bestimmten Frist, gewöhnlich jährlich erhoben wird. Hat jemand eine Rente auf eine festgesetzte Anzahl von Jahren zu genießen, so wird sie eine Zeitrente oder Jahresrente auch Annuität genannt; hat dagegen jemand eine Rente während seiner Lebenszeit zu erheben, so heißt dieselbe eine Leibrente oder Lebensrente. In den folgenden Aufgaben ist nur von den Renten der ersten Art die Rede.

57. Wenn jemand eine Jahresrente von 700 *M* auf 10 Jahre zu erheben hat, so denke man sich, er habe sie bereits 10 Jahre hindurch genossen, und es frage sich, wie viel dieselbe

am Anfange des 1. Jahres, wo er sie erhob, bar wert war. Als er am Ende des 10. Jahres die Rente von 700 *M* empfangen hatte, hörte der Genuß derselben auf, weil das zu dieser Rente gezahlte Kapital damit aufgezehrt war. Die 700 *M* aber, die er vor einem Jahre erhoben hatte, wären, wenn er sie zum Zinsfuße $4\frac{1}{4}$ verzinset hätte, jetzt zu $700 \,.\, 1{,}0425$ *M* angewachsen. Die vor 2 Jahren in Empfang genommene Rente von 700 *M* würde jetzt, wieder verzinset, den baren Wert von $700 \,.\, (1{,}0425)^2$ *M* haben, und überhaupt, unter der Voraussetzung, daß er die am Ende eines jeden vorhergehenden Jahres empfangene Rente zum Zinsfuß $4\frac{1}{4}$ verzinset und mit Zinseszinsen hätte anwachsen lassen, würde die zehnjährige Rente eine geometrische Progression bilden, deren erstes Glied $=700$, deren Exponent $=1{,}0425$ und deren Gliederzahl $=10$ wäre; ihre Summe ist daher:

$$s=\frac{700((1{,}0425)^{10}-1)}{1{,}0425-1};$$

und man kann sich die Summe dieser Jahresrente als das Rentenkapital vorstellen. Nun denke man sich, man habe dem Empfänger der Rente vor 10 Jahren den baren Wert der Rente auszahlen wollen, so muß dieser so groß sein, daß er in 10 Jahren mit den Zinsen und Zinseszinsen so anwächst, daß er der Größe des Rentenkapitals gleichkommt. Nun sei der bare Wert x *M*, welcher in 10 Jahren, zum Zinsfuß $4\frac{1}{4}$ angelegt, auf $x(1{,}0425)^{10}$ *M* anwächst. Daher ist:

$$x(1{,}0425)^{10}=\frac{700((1{,}0425)^{10}-1)}{1{,}0425-1}.$$

$$1{,}5162x=16470{,}5882(1{,}5162-1);\text{ folglich}$$

$$x=5607{,}63 \text{ M}.$$

58. Außer den in der vorigen Auflösung angestellten Betrachtungen kann man auch bei Berechnung des baren Wertes einer Jahresrente von folgenden Gesichtspunkten ausgehen. Man kann sich den baren Wert (x) als ein Kapital denken, das zum Zinsfuße p auf Zinseszinsen steht, durch die Zinsen jährlich vermehrt, aber um die nämliche Summe jährlich (hier also um die Rente r) vermindert wird, so zwar, daß in n Jahren alles aufgezehrt sein wird. Sonach kann man die Berechnung des baren Wertes auf Aufgabe 48. α) zurückführen, wenn man $k=x$, $u=r$ in die dort gefundene Formel einsetzt und, da das dort nach n Jahren gefundene Kapital in vorliegendem Falle aufgezehrt, d. h. annulliert wird, so ist:

$$\left(x-\frac{100r}{p}\right)(1+0{,}01p)^n+\frac{100r}{p}=0 \text{ oder entwickelt:}$$

$$x(1+0{,}01p)^n = \frac{100r}{p}[(1+0{,}01p)^n - 1]; \text{ folglich}$$

$$x = \frac{100r}{p}\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}01p)^n}\right).$$

59. Bezeichnet man mit x die Jahresrente, welche man erst nach einem Jahre beziehen kann, die aber jetzt ausbezahlt werden soll, so ist dieselbe jetzt zum Zinsfuße p nur $x \cdot \frac{1}{1+0{,}01p}$ bar wert. Die am Ende des 2. Jahres fällige Rente ist daher, wenn sie bar ausgezahlt wird, $x \cdot \frac{1}{(1+0{,}01p)^2}$ wert; die am Ende des 3. Jahres auszuzahlende Rente ist jetzt $x \cdot \frac{1}{(1+0{,}01p)^3}$ bar wert; . . . . . also die am Ende des n^{ten} Jahres fällig werdende Rente hat jetzt einen baren Wert von $x \cdot \frac{1}{(1+0{,}01p)^n}$. Summieren wir die baren Werte der Rente, so erhält man:

$$\frac{x \cdot \frac{1}{1+0{,}01p}\left(\frac{1}{(1+0{,}01p)^n} - 1\right)}{\frac{1}{1+0{,}01p} - 1} = \frac{100x[(1+0{,}01p)^n - 1]}{p \,.\, (1+0{,}01p)^n}.$$

Wird nun der bare Wert mit der Summe b bezahlt, so ist:

$$\frac{100x[(1+0{,}01p)^n - 1]}{p \,.\, (1+0{,}01p)^n} = b \text{ oder}$$

$$100x[(1+0{,}01p)^n - 1] = bp(1+0{,}01p)^n; \text{ folglich ist}$$

$$x = \frac{bp(1+0{,}01p)^n}{100 \,.\, [(1+0{,}01p)^n - 1]}.$$

Man kann die Rente auch aus Aufg. 58 ableiten, wenn man den dort für x gefundenen Wert = b setzt. Hiernach hat man:

$$\frac{100r}{p}\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}01p)^n}\right) = b; \text{ folglich}$$

$$r = \frac{bp}{100\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}01p)^n}\right)} = \frac{bp(1+0{,}01p)^n}{100[(1+0{,}01p)^n - 1]}.$$

60. *a*) Man denke sich, das Kapital könne 5 Jahre lang ausstehen, ehe es bezahlt zu werden braucht; dann wächst dasselbe mit Zinsen und Zinseszinsen zu $3816 \,.\, (1{,}04)^5$ ℳ an.

Durch die 5jährlichen Terminzahlungen muß das auf diese Höhe angewachsene Kapital getilgt werden. Bezahle ich nun am Ende des 1. Jahres x ℳ auf Abschlag, so habe ich dies 4 Jahre zu früh bezahlt, habe also dafür von meinem Gläubiger $x(1{,}04)^4$ ℳ zu fordern. Bezahle ich am

Ende des 2. Jahres wieder x *M*, so habe ich $x \cdot (1{,}04)^3$, bezahle ich am Ende des 5. Jahres x *M*, so habe ich x *M* zu fordern, im ganzen stellt sich also meine Forderung an meinen Gläubiger auf $x \cdot \frac{(1{,}04)^5-1}{1{,}04-1}$ *M*. Da sich hierdurch die gegenseitigen Forderungen ausgleichen sollen, so ist:

$$3816 \cdot (1{,}04)^5 = x\frac{(1{,}04)^5-1}{1{,}04-1} \text{ oder}$$

$$3816 \cdot (1{,}04)^5 = 25x((1{,}04)^5-1); \; x = 857{,}18 \textit{ M}.$$

β) Betrachtet man den Staat als solchen, der von jemand ein Kapital erhalten, um ihm dafür eine jährliche Rente, die aber den Betrag der Zinsen übersteigt, zu zahlen und zwar so, daß der Gläubiger nach 25 Jahren vom Staate nichts mehr zu fordern hat, so findet die Aufgabe 59 hier Anwendung, wenn $b=3000000$, $n=25$ und $p=5$ gesetzt wird. Demnach ist:

$$r = \frac{3000000 \cdot 5 \cdot (1{,}05)^{25}}{100[(1{,}05)^{25}-1]} = \frac{150000 \cdot (1{,}05)^{25}}{(1{,}05)^{25}-1} = 212857 \textit{ Fl.}$$

61. α) Giebt man jetzt gleich die bare Summe b, um n Jahre hindurch eine Jahresrente r zu genießen, so wächst das Kapital in dieser Zeit auf $b(1+0{,}01p)^n$ an. Da nun die Jahresrente in n Jahren ebensoviel ausmachen muß, so hat man nach den vorher gemachten Schlüssen:

$$b(1+0{,}01p)^n = \frac{r[(1+0{,}01p)^n-1]}{(1+0{,}01p)-1} \text{ oder}$$

$(100r-bp)(1+0{,}01p)^n = 100r$ und vermittelst Logarithmen $\log(100r-bp) + n\log(1+0{,}01p) = \log(100r)$; folglich

$$n = \frac{\log(100r) - \log(100r-bp)}{\log(1+0{,}01p)} \text{ Jahre.}$$

β) Setzt man hier $r = 1001\frac{1}{2}$, $b=10000$, $p=4$, so ist:

$$n = \frac{\log(100 \cdot 1001\frac{1}{2}) - \log(100 \cdot 1001\frac{1}{2} - 10000 \cdot 4)}{\log 1{,}04} \text{ oder}$$

$$n = \frac{\log 100150 - \log 60150}{\log 1{,}04} = \frac{5{,}0006509 - 4{,}7792356}{0{,}0170333} =$$

13 Jahre.

62. α) Wenn die Rente von 600 *Fl* 30 Jahre lang zu beziehen ist, so hat sie den baren Wert von

$$600\left(\frac{1}{(1{,}05)^{30}} - 1\right) = \frac{600[(1{,}05)^{30}-1]}{0{,}05 \cdot (1{,}05)^{30}} \textit{ Fl}$$

d. h. so groß müßte das Rentenkapital sein, infolge dessen die Rente genossen wird. Nun fragt es sich, wann die Rente mit $30 \cdot 600 = 18000$ *Fl* abgelöst werden kann, d. h. wann hat die Summe von 18000 *Fl* den baren Wert der 30jährigen Jahresrente? Bezeichnen wir diese Zeit mit x, dann

hat die erst nach x Jahren zu zahlende Summe von 18000 *Fl* jetzt einen baren Wert von $18000 \cdot \frac{1}{(1,05)^x}$ *Fl* und es ist daher

$$18000 \cdot \frac{1}{(1,05)^x} = \frac{600[(1,05)^{30}-1]}{0,05 \,.\, (1,05)^{30}} \text{ oder}$$

$$2 \,.\, (1,05^x) \,.\, [(1,05)^{30}-1] = 3 \,.\, (1,05)^{30}. \text{ daher}$$

$$0,0211893x = 0,2903806; \text{ folglich } x = 13,7 \text{ Jahre.}$$

β) Hier sei die Jahresrente 1, so ist der bare Wert derselben zu p pCt. in n Jahren $= \frac{(1+0,01p)^n-1}{0,01p \,.\, (1+0,01p)^n}$. Nun sei der mittlere Zahlungstermin x, d. h. nach x Jahren sei die Rente 1 mit $n \,.\, 1 = n$ zu bezahlen, so hat sie alsdann einen Wert von $n \cdot \frac{1}{(1+0,01p)^x}$. Es ist also:

$$\frac{(1+0,01p)^n-1}{0,01p \,.\, (1+0,01p)^n} = \frac{n}{(1+0,01p)^x} \text{ oder}$$

$$(1+0,01p)^x \,.\, [(1+0,01p)^n-1] = 0,01p \,.\, n \,.\, (1+0,01p)^n; \text{ also}$$

$$x \log(1+0,01p) + \log[(1+0,01p)^n-1] = \log(0,01p \,.\, n) + n \log(1+0,01p); \text{ folglich}$$

$$x = \frac{\log(0,01p \,.\, n) + n \log(1+0,01p) - \log[(1+0,01p)^n-1]}{\log(1+0,01p)} \text{ Jahre.}$$

63. Die jährlich an die Anstalt zu zahlende Summe muß in den 18 Jahren zu $3\frac{3}{4}$ pCt. verzinset, mit Zinsen und Zinseszinsen so viel ausmachen, daß sie dem nach Verlauf dieser Zeit von der Anstalt auszuzahlenden Kapital von 12000 *M* gleich kommt. Die Anstalt fordere nun dafür jährlich x *M*. Von dem Augenblicke, wo diese x *M* gezahlt werden, fängt auch schon die Verzinsung dieser Summe an. In den 18 Jahren hat man also für die zuerst gezahlten x *M* $x(1,0375)^{17}$; für die zum zweitenmale wieder gezahlten x *M* $x(1,0375)^{16}$ für die zum drittenmale gezahlten x *M* $x(1,0375)^{15}$.... und für die zuletzt gezahlten x *M* nur x *M* zu fordern. Alle diese gezahlten Werte geben die Reihe

$$x + x(1,0375) + x(1,0375)^2 + x(1,0375)^3 \ldots + x(1,0375)^{17};$$

deren Summe

$$x\frac{(1,0375)^{18}-1}{1,0375-1} = \frac{80}{3}x\big((1,0375)^{18}-1\big) \text{ ausmacht; daher}$$

$$\tfrac{80}{3}x\big((1,0375)^{18}-1\big) = 12000$$

$$x\big((1,0375)^{18}-1\big) = 450 \text{ oder } 0,9399x = 450; \; x = 478,77 \; M.$$

64. α) Die jährlich zu zahlende Summe muß in den 21 Jahren durch Zinsen und Zinseszinsen so hoch anwachsen, daß dadurch eine 8jährige Rente von 600 *M* entsteht. Da nun aber die zu zahlende Summe am Anfange, die Rente aber zu Ende eines jeden Jahres gezahlt wird, so stehen die

während 21 Jahren gezahlten Summen 22 Jahre, ehe die Nutznießung beginnt. Nun sei die jährlich zu zahlende Summe $=x$, so müssen wir den künftigen Wert der jährlichen Einzahlungen berechnen. Nun ist der künftige Wert der ersten Einzahlung $= x.(1{,}045)^{22}$; der der zweiten Einzahlung $= x.(1{,}045)^{21}$; der der dritten $= x.(1{,}045)^{20}$.... der der letzten $x.(1{,}045)$ *M* bei einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}$ pCt. Hiernach beträgt der künftige Wert sämtlicher Einzahlungen

$$\frac{1{,}045x(1{,}045^{21}-1)}{1{,}045-1} \mathcal{M}.$$

Berechnen wir jetzt den baren Wert der 8 Jahre hintereinander zu zahlenden Rente, so ist die nach dem ersten Jahre fällige Rente von 600 *M* jetzt $600\frac{1}{1{,}045}$; die nach 2 Jahren fällige Rente $600\cdot\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^2$ und die nach 8 Jahren zu genießende Rente $600\cdot\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^8$. Die Summe dieser baren Werte beträgt:

$$\frac{600\cdot\frac{1}{1{,}045}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{1{,}045}}=\frac{600.(1{,}045^8-1)}{(1{,}045-1)\cdot\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^8}.$$

Da nun der bare Wert der Rente dem künftigen Werte sämtlicher Einzahlungen gleich ist, so haben wir:

$$\frac{1{,}045x.(1{,}045^{21}-1)}{1{,}045-1}=\frac{600(1{,}045^8-1)}{1{,}045\cdot\left(\frac{1}{1{,}045}\right)^8}$$

$$x.(1{,}045)^9.(1{,}045^{21}-1)=600.(1{,}045^8-1)$$

$$1{,}4861 . 1{,}5201x=600 . 0{,}4221;\ x=112{,}103\ \mathcal{M}.$$

β) Soll m Jahre hindurch zu Anfang des Jahres die Summe x gezahlt werden, damit hieraus eine njährige zu Ende des Jahres zu zahlende Rente r entsteht, so ist beim Zinsfuß p der künftige Wert der Einzahlungen, wenn wir denselben im allgemeinen mit K bezeichnen und zur Abkürzung $(1+0{,}01p)=q$ setzen:

$$(1)\ K=xq^m+xq^{m-1}+xq^{m-2}+\ldots\ldots+xq.$$

Diese Gleichung mit q multipliziert giebt:

$$(2)\ qK=xq^{m+1}+xq^m+xq^{m-1}+\ldots\ldots+xq^2.$$

Aus (1) und (2) folgt durch Subtraktion:

$$K(q-1)=xq^{m+1}-xq=xq(q^m-1);\ \text{folglich}$$

$$K=\frac{xq(q^m-1)}{q-1}.$$

Bezeichnen wir nun den baren Wert der n Jahre hindurch zu zahlenden Rente mit K', so ist:

$$(1)\ K'=\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\frac{r}{q^3}+\ldots\ldots+\frac{r}{q^n}$$

$$(2)\ qK'=r+\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\frac{r}{q^3}+\ldots\ldots+\frac{r}{q^{n-1}}.$$

Aus (1) und (2) erhalten wir durch Subtraktion:

$$K'(q-1)=r-\frac{r}{q^n};\ \text{also}\ K'=\frac{r-\frac{r}{q^n}}{q-1}.$$

Da nun K=K', so ist auch

$$\frac{xq(q^m-1)}{q-1}=\frac{r-\frac{r}{q^n}}{q-1}\ \text{oder}\ xq(q^m-1)=r-\frac{r}{q^n};\ \text{folglich}$$

$$x=\frac{r-\frac{r}{q^n}}{q(q^m-1)};\ \text{oder}\ q=(1+0{,}01p)\ \text{eingesetzt, giebt:}$$

$$x=\frac{r-\frac{r}{(1+0{,}01p)^n}}{(1+0{,}01p)[(1+0{,}01p)^m-1]}.$$

65. Nach 59 ist der bare Wert der Rente r, welche man n Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres zu genießen hat, bei dem Zinsfuße x $\frac{100r}{x}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}01x)^n}\right)$.

Da nun dieser bare Wert =b ist, so hat man:

$$\frac{100r}{x}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}01x)^n}\right)=b\ \text{oder}\ 1-\frac{1}{(1+0{,}01x)^n}=\frac{bx}{100r}.$$

Setzt man $\frac{1}{(1+0{,}01x)}=y$, so ist $x=\frac{1-y}{0{,}01y}$.

Setzt man diese Werte in die zuletzt erhaltene Gleichung, so erhält man:

$$1-y^n=\frac{b}{100r}\times\frac{1-y}{0{,}01y}\ \text{oder entwickelt:}$$

$$ry^{n+1}-y(b+r)+b=0.$$

66. α) Kann die Jahresrente von 600 *Fl* 20 Jahre hindurch genossen werden, so hat sie beim Zinsfuße 4 einen baren Wert von $\frac{600\,.\,[(1{,}04)^{20}-1]}{(1{,}04)^{20}\,.\,(1{,}04-1)}$ *Fl.*

Nun soll die 20jährige Rente in eine 25jährige, aber alle Vierteljahre zahlbare Rente umgewandelt werden. In den bisherigen Beispielen wurden die Zinsen erst mit Ende eines jeden ganzen Jahres zum Kapital geschlagen und verzinset.

Indessen hat es auch bei dem bisherigen Verfahren sein Bewenden, wenn dies erst nach kleinern oder größern Zeitabschnitten geschehen soll, nur muß man dann nach Maßgabe dieser Zeitabschnitte den Zinsfuß ordnen. Bezeichnet man den Zinsfuß für $\frac{1}{4}$ Jahr mit y, so wird bei dieser Verzinsung das Kapital nach 25 Jahren $=600(1+0{,}01y)^{4 \cdot 25}$ und man hat, wenn der Ertrag der Zinsen auf diese Art den Zinsenertrag bei jährlicher Verzinsung zum Zinsfuße 4 nicht überschreiten soll $600 . (1+0{,}01y)^{4 \cdot 25} = 600 . (1{,}04)^{25}$, woraus

$$1+0{,}01y = \sqrt[4]{1{,}04} = (1{,}04)^{\frac{1}{4}};\text{ folglich}$$

$$y = 100[(1{,}04)^{\frac{1}{4}} - 1] = 100(1{,}00985 - 1) = 0{,}985.$$

Die letztere Rente kann man sich daher als eine $4 . 25 = 100$jährige zum Zinsfuße 0,985 denken. Bezeichnet man sie mit x, so ist der bare Wert derselben

$$\frac{x[(1{,}00985)^{100} - 1]}{(1{,}00985)^{100} . (1{,}00985 - 1)} = \frac{600[(1{,}04)^{20} - 1]}{(1{,}04)^{20} . (1{,}04 - 1)}.$$

Hieraus folgt $x = 128{,}48$ *Fl.*

β) Die n Jahre zu genießende Jahresrente r zum Zinsfuße p hat den baren Wert

$$\frac{100r[(1+0{,}01p)^n - 1]}{p . (1+0{,}01p)^n}.$$

Diese Jahresrente ist natürlich in n Terminen zu bezahlen. Nun soll dieselbe aber in eine t Jahre lang, alle $\frac{1}{m}$ Jahr zu zahlende, also im ganzen in eine in tm Terminen zu zahlende verwandelt werden. Nennen wir die $\frac{1}{m}$jährigen Zinsen q, so ist also der bare Wert derselben, wenn die gesuchte Rente mit x bezeichnet wird:

$$\frac{100x[1+0{,}01q)^{tm} - 1]}{q . (1+0{,}01q)^{tm}}.$$

Setzen wir diesen Wert dem obigen gleich, so erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von x. Es handelt sich nun aber noch darum, q durch die bekannten Größen der Aufgabe auszudrücken. Ein Kapital a stehe 1 Jahr lang auf Zinseszinsen zu q pCt., welche Zinsen alle $\frac{1}{m}$ Jahre fällig sind; dann wird aus dem Kapital, gerade wie aus einem Kapital, welches m Jahre zu q pCt. p. a. auf Zinsen steht: $a(1+0{,}01q)^m$. Das Kapital, welches dieser Art auf jährliche Zinseszinsen steht, soll nun aber jährlich p pCt. bringen; nach einem Jahre ist also daraus geworden: $a(1+0{,}01p)$. Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so wird:

$a(1+0{,}01q)^m = a(1+0{,}01p)$ und hieraus:

$$q = 100\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}} - 1\right].$$

Setzen wir diesen Wert für q in obige Formel, so haben wir:

$$\frac{x[(1+0{,}01p)^t - 1]}{(1+0{,}01p)^t\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}} - 1\right]} = \frac{100r[(1+0{,}01p)^n - 1]}{p\,.\,(1+0{,}01p)^n}.$$

Hieraus findet man:

$$x = \frac{100r(1+0{,}01p)^t\left[(1+0{,}01p)^n - 1\right]\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{p\,.\,(1+0{,}01p)^n[(1+0{,}01p)^t - 1]} \text{ oder}$$

$$x = \frac{100r}{p}\cdot\frac{(1+0{,}01p)^{t-n}\left[(1+0{,}01p)^n - 1\right]\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}{[(1+0{,}01p)^t - 1]}.$$

66. *γ)* Das Kapital 1 werde nach $\frac{1}{4}$ Jahr x *Fl*, so ist es am Ende eines ganzen Jahres x^4; da nun aus 1 bei 5 pCt. nach 1 Jahr 1,05 wird, so ist: $x^4 = 1{,}05$; folglich $x = \sqrt[4]{1{,}05} = 1{,}012272$ der vierteljährige Zinsfuß; mithin betragen die vierteljährigen Prozente 1,2272. Heißt nun die vierteljährige Rente x, so hat sie einen Wert von

$$\frac{x[(1+0{,}05) - 1]}{\left[(1{,}05)^{\frac{1}{4}} - 1\right]\cdot(1{,}05)} = \frac{0{,}05x}{0{,}012272\,.\,(1{,}05)} = \frac{x}{0{,}012272\,.\,21}.$$

Nun hat die am Ende eines jeden Jahres fällig werdende Rente von 500 *Fl* einen baren Wert von $500\,.\,\frac{20}{21}$. Daher ist:

$$\frac{x}{0{,}012272\,.\,21} = 500 \times \tfrac{20}{21} \text{ oder } \frac{x}{0{,}012272} = 10000; \text{ folglich}$$

$$x = 122{,}72 \textit{ Fl.}$$

Man kann diese Aufgabe auch mit Bezug auf den unter *β)* für x gefundenen Wert auflösen, indem hier n=t und m=4 ist. Dadurch wird:

$$x = \frac{100r}{p}\left[(1+0{,}01p)^{\frac{1}{4}} - 1\right].$$

Setzt man hierin die Werte für r und p ein, so ist

$$x = \frac{100\,.\,500}{5}\left[(1{,}05)^{\frac{1}{4}} - 1\right] \text{ oder}$$

$$x = 100\,.\,100\,.\,0{,}012272 = 122{,}72 \textit{ Fl.}$$

Gewöhnlich wird der Zinsfuß für Teile des Jahres nicht auf die hier angegebene Weise berechnet, sondern man nimmt in der Regel den aliquoten Teil des Jahreszinsfußes und berechnet danach die Zinsen oder den baren Wert eines Kapitals oder einer Rente. Bei dieser Art der Berechnung

ist der Unterschied so unbedeutend, daß er kaum in Anschlag zu bringen ist. Denn wenn, wie in dieser Aufgabe, 5 pCt. berechnet werden, so beträgt dies für den ersten Termin, der $\frac{3}{4}$ Jahr zu früh bezahlt wird, 3,75 pCt., für den zweiten 2,5 pCt. und für den dritten 1,25 pCt. Hiernach beträgt die Rente für das erste Vierteljahr $\frac{125 . 100}{103,75}=120,48$; für das zweite $\frac{125 . 100}{102,5}=121,95$; für das dritte $\frac{125 . 100}{101,25}=123,45$ *Fl* und für das vierte 125 *Fl*. Soll also die Rente jedes Vierteljahr gleich viel betragen, so muß sie $\frac{490,88}{4}=122,72$ *Fl* ausmachen, ein Wert, der sich von dem oben auf andere Weise gefundenen nicht unterscheidet.

67. Die Summe der mjährigen Rente beträgt nach den in den vorhergehenden Beispielen angestellten Betrachtungen

$$\frac{x[(1+0,01p(^m-1]}{(1+0,01p)-1}.$$

Nach Verlauf von n Jahren muß das Schulgebäude mit einem Aufwande von k *M* neugebaut werden, gemäß der Uebereinkunft aber hat der Schulvorstaud erst nach m Jahren diese Summe vom Waldbesitzer zu beanspruchen; er muß also diese Summe (m—n) Jahre früher verwenden, als er ein Recht darauf hat. Giebt er nun nach n Jahren die zum Neubau erforderlichen k *M* aus, so wachsen dieselben in m—n Jahren mit den Zinsen und Zinseszinsen zu

$$k(1+0,01p)^{m-n} \mathcal{M}$$

an, und da die m Jahre hindurch jährlich zu zahlende Rente von x *M* mit den Zinsen und Zinseszinsen gerade so viel betragen soll, als das für den Neubau aufzubringende Kapital nebst den dafür zu berechnenden Zinsen und Zinseszinsen, so ist

$$\frac{x[(1+0,01p)^m-1)}{(1+0,01p)-1}=k(1+0,01p)^{m-n};$$

$$\text{folglich } x=\frac{pk(1+0,01p)^{m-n}}{100\{(1+0,01p)^m-1\}}.$$

Wenn m=200, k=10000, n=100, p=4, so ist

$$x=\frac{40000 . 1,04^{100}}{100 . (1,04^{200}-1)}=400\cdot\frac{50,505}{2549,75}=7,9229.$$

68. *α*) Wenn man die baren Werte der in arithmetischer Progression steigenden Jahresrente r in n Jahren bestimmt, so erhält man, wenn man dieselbe mit x bezeichnet und der Abkürzung wegen (1+0,01p)=q setzt:

$$(1)\ x=\frac{r}{q}+\frac{2r}{q^2}+\frac{3r}{q^3}+\frac{4r}{q^4}+\ldots.+\frac{(n-1)r}{q^{n-1}}+\frac{nr}{q^n}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{1}{q}$, so hat man:

$$(2)\quad \frac{1}{q}x=\frac{r}{q^2}+\frac{2r}{q^3}+\frac{3r}{q^4}+\ldots+\frac{(n-2)r}{q^{n-1}}+\frac{(n-1)r}{q^n}+\frac{nr}{q^{n+1}}.$$

Subtrahiert man (2) von (1), so ist:

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)x=\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\frac{r}{q^3}+\ldots+\frac{r}{q^{n-1}}+\frac{r}{q^n}-\frac{nr}{q^{n+1}}.$$

Nun ist, da das erste Glied $a=\frac{r}{q}$, der Exponent $e=\frac{1}{q}$ und das letzte Glied $t=\frac{r}{q^n}$, nach der Formel $s=\frac{et-a}{e-1}$

$$\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\frac{r}{q^3}+\frac{r}{q^4}+\ldots+\frac{r}{q^{n-1}}+\frac{r}{q^n}=\frac{\frac{r}{q}\cdot\frac{1}{q^n}-\frac{r}{q}}{\frac{1}{q}-1}=\frac{\frac{r}{q^{n+1}}-\frac{r}{q}}{\frac{1}{q}-1}.$$

Hiernach ist:

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)x=\frac{\frac{r}{q^{n+1}}-\frac{r}{q}}{\frac{1}{q}-1}-\frac{nr}{q^{n+1}}=\frac{r(q^n-1)}{(q-1)q^n}\cdot q-\frac{nr}{q^n};\text{ folglich}$$

$$x=\frac{1}{q-1}\cdot\left\{\frac{r(q^n-1)}{(q-1)q^n}\cdot q\right\}-\frac{nr}{q^n},$$

oder wenn man $q=1+0{,}01p$ einsetzt:

$$x=\frac{1}{[(1+0{,}01p)-1]}\times$$

$$\left\{\frac{r[(1+0{,}01p)^n-1]}{[(1+0{,}01p)-1].(1+0{,}01p)^n}\cdot(1+0{,}01p)\right\}-\frac{nr}{(1+0{,}01p)^n}\text{ oder}$$

$$x=\frac{100}{p}\left\{\frac{100r}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+0{,}01p)^n}\right)\cdot(1+0{,}01p)\right\}-\frac{nr}{(1+0{,}01p)^n}.$$

Da nun nach der Aufgabe 58 der Ausdruck $\frac{100r}{p}\cdot\left\{1-\frac{1}{(1+0{,}01p)^n}\right\}$ den baren Wert einer Jahresrente r bezeichnet, die man n Jahre hindurch genießen kann, so ist, wenn wir diesen Wert mit b bezeichnen

$$x=\frac{100}{p}\left\{1+0{,}01p)b\right\}-\frac{nr}{(1+0{,}01p^n)}.$$

β) Wenn hier q vorläufig denselben Wert wie unter *α*) hat, so sind die baren Werte der jährlich in einer g e o m e t r i s c h e n Progression steigenden Renten

$$\frac{r}{q},\ \frac{er}{q^2},\ \frac{e^2r}{q^3},\ \frac{e^3r}{q^4},\ \ldots\ldots\ \frac{re^{n-1}}{q^n}.$$

Bezeichnet man die Summe dieser baren Werte mit x,

so ist, da das erste Glied $a=\frac{r}{q}$, der Exponent $=\frac{e}{q}$ und die Anzahl der Glieder $=n$ ist:

$$x=\frac{\frac{r}{q}\left\{\left(\frac{e}{q}\right)^n-1\right\}}{\frac{e}{q}-1}=\frac{r\left\{\frac{e^n}{q^n}-1\right\}}{e-q}=\frac{r\frac{e^n}{(1+0{,}01p)^n}-r}{e-1-0{,}01p}.$$

69. $(1+p)\,l$ Mischung enthalten . . . . $c+ap$; folglich
1 „ nach der ersten Mischung . . . . . $\frac{c+ap}{1+p}$.

Bei der zweiten Mischung enthalten $1+p$ l $\frac{c+ap}{1+p}+ap$; folglich enthält nach der zweiten Mischung 1 l

$$\frac{c+ap}{(1+p)^2}+\frac{ap}{(1+p)}.$$

Bei der dritten Mischung enthalten $(1+p)$ l

$$\frac{c+ap}{(1+p)^2}+\frac{ap}{1+p}+ap;$$

also nach der dritten Mischung enthält 1 l

$$\frac{c+ap}{(1+p)^3}+\frac{ap}{(1+p)^2}+\frac{ap}{1+p}.$$

Nach der vierten Mischung enthält 1 l

$$\frac{c+ap}{(1+p)^4}+\frac{ap}{(1+p)^3}+\frac{ap}{(1+p)^2}+\frac{ap}{a+p},$$

also nach der nten Mischung enthält 1 l

$$\frac{c+ap}{(1+p)^n}+\frac{ap}{(1+p)^{n-1}}+\frac{ap}{(1+p)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{ap}{1+p}.$$

Dies ist eine geometrische Reihe und bezeichnen wir ihre Summe mit s, so ist

$$(1)\quad s=\frac{c}{(1+p)^n}+\left\{\frac{ap}{(1+p)^n}+\frac{ap}{(1+p)^{n-1}}+\frac{ap}{(1+p)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{ap}{1+p}\right\}.$$

Da nun die Summe der in Klammern stehenden Reihe

$$=\frac{\frac{ap}{1+p}-\frac{1}{1+p}\cdot\frac{ap}{(1+p)^n}}{1-\frac{1}{1+p}}=\frac{ap(1+p)^n-ap}{p(1+p)^n}=a-\frac{a}{(1+p)^n},$$

so ist, wenn man diesen Wert in (1) einsetzt:

$$(2)\quad s=\frac{c}{(1+p)^n}+a-\frac{a}{(1+p)^n}=a+\frac{c-a}{(1+p)^n}\text{ Liter.}$$

70. (1) Vor der ersten Operation enthält das Gefäß A an Wein $\alpha\,l$, an Wasser also $a-\alpha\,l$, das Gefäß B aber an Wein α', an Wasser $a'-\alpha'$.

(2) Es wird nun aus jedem Gefäße 1 l der Mischung weggenommen; das aus A weggenommene l wird in B geschüttet und das aus B weggenommene in A, so daß also das Volumen der Mischung nach der ersten, so wie nach jeder Operation in jedem Gefäße dasselbe bleibt. In dem aus A genommenen l sind $\frac{\alpha}{a}$ l Wein und $\frac{a-\alpha}{a}$ l Wasser; in dem l, welches aus B weggenommen wird, sind $\frac{\alpha'}{a'}$ l Wein und $\frac{a'-\alpha'}{a'}$ l Wasser enthalten. Nach vorgenommener Mischung enthält also

das Gefäß A an Wein: $\alpha-\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha'}{a'}$ l und

" " A " Wasser: $a-\alpha-\frac{a-\alpha}{a}+\frac{a'-\alpha'}{a'}$

$=a-\alpha-\frac{\alpha'}{a'}+\frac{\alpha}{a}$ l.

Das Gefäß B an Wein: $\alpha'-\frac{\alpha'}{a'}+\frac{\alpha}{a}$ l.

" " B " Wasser: $a'-\alpha'-\frac{a'-\alpha'}{a'}+\frac{a-\alpha}{a}=$

$a'-\alpha'-\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha'}{a'}$ l.

Setzen wir nun $\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha'}{a'}=\frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}=h$, so enthält nach der ersten Operation

A an Wein $\alpha-h$ l; an Wasser $a-\alpha+h$ l;
B " " $\alpha'+h$ " " " $a'-\alpha'+h$ "

Bezeichnen wir nun $\alpha-h$ durch α_1 und $\alpha'+h$ durch α_2, so enthält A an Wein α_1, an Wasser $a-\alpha_1$; B an Wein α_2, an Wasser $a-\alpha_2$.

(3) Wiederholen wir nun dieselbe Operation, indem wir aus jedem Gefäße 1 l der Mischung nehmen und in das andere schütten, so enthält nach dieser zweiten Operation

A an Wein: α_1-h_1; an Wasser: $a-\alpha_1+h_1$;
B " " α_2+h_1; " " $a'-\alpha_2-h_1$.

Hierbei ist h_1 aus a, a', α_1 und α_2 ebenso gebildet, wie h aus a, a', α und α'; es ist also $h=\frac{a'\alpha_1-a\alpha_2}{aa'}$.

Setzen wir für α_1 und α_2 ihre Werte, so ist

der Gehalt des Gefäßes A an Wein: $\alpha-h-h_1$;
" " " " " Wasser: $a-\alpha+h+h_1$;
" " " " B " Wein: $\alpha'+h+h_1$;
" " " " " Wasser: $a'-\alpha'-h-h_1$.

(4) Fahren wir so fort, so ist nach der nten Operation der Gehalt von A an Wein: $\alpha-h-h_1-h_2-h_3-\ldots-h_{n-1}$;
" " " A " Wasser: $a-\alpha+h+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}$;
" " " B " Wein: $\alpha'+h+h_1+h_2+\ldots+h_{n-1}$;
" " " B " Wasser: $a'-\alpha'-h-h_1-h_2-\ldots+h_{n-1}$.

Dabei ist allgemein: $h_{p-1}=\frac{a'\alpha_{p-1}-a\alpha'_{p-1}}{aa'}$, wenn α_{p-1} und α'_{p-1} die vor der pten Operation, also nach der (p—1)ten Operation resp. in den Gefäßen A und B sich befindenden Weinmengen bezeichnen. Es handelt sich nun darum, h_{p-1} durch h_{p-2} oder h_p durch h_{p-1} auszudrücken.

Hierzu haben wir die Gleichungen:

$$h_p=\frac{a'\alpha_p-a\alpha'_p}{aa'};\quad h_{p-1}=\frac{a'\alpha_{p-1}-a\alpha'_{p-1}}{aa'};$$

$$\alpha_p=\alpha_{p-1}-\frac{\alpha_{p-1}}{a}+\frac{\alpha'_{p-1}}{a'};\quad \alpha'_p=\alpha'_{p-1}-\frac{\alpha'_{p-1}}{a'}+\frac{\alpha_{p-1}}{a}.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind in (2) entwickelt, freilich nur für α_1 und α sowie α_2 und α'; aber die dortigen Betrachtungen gelten offenbar für jedes a_p, da ja immer das Volumen der Mischung in jedem Gefäße dasselbe bleibt. Setzen wir nun die Ausdrücke für α_p und α'_p in die Gleichung h_p, so wird $h_p=$

$$\frac{a'\cdot\frac{aa'\alpha_{p-1}-a'\alpha_{p-1}+\alpha_{p-1}a}{aa'}-a\cdot\frac{aa'\alpha'_{p-1}-\alpha'_{p-1}a+\alpha_{p-1}a'}{aa'}}{aa'}$$

$$=\frac{aa'^2\alpha_{p-1}-a'^2\alpha_{p-1}+aa'\alpha'_{p-1}-a^2a'\alpha'_{p-1}+a^2\alpha'_{p-1}-aa'\alpha_{p-1}}{a^2a'^2}$$

$$=\frac{a'\alpha_{p-1}(aa'-a'-a)-a\alpha_{p-1}(aa'-a'-a)}{a^2a'^2}$$

$$=\frac{(a'\alpha_{p-1}-a\alpha'_{p-1})(aa'-a-a')}{a^2a'^2}=$$

$$\frac{a'\alpha_{p-1}-a\alpha'_{p-1}}{aa'}\times\frac{aa'-a-a'}{aa'}$$

$$=h_{p-1}\left(\frac{aa'-a-a'}{aa'}\right)=h_{p-1}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right).$$

Die Zahl $1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}$, womit jedes h multipliziert werden muß, um das folgende zu erhalten, bleibt konstant. Es ist also:

$$h_1=h\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right);\quad h_2=h_1\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)$$

$$=h\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^2 \text{ u. s. w.; überhaupt } h_p=h_1\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^p.$$

(5) Es ist also der Inhalt des Gefäßes A an Wein:

$$\alpha - h - h\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right) - h\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^2 - \ldots h\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^{n-1},$$

wobei $h=\frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}$. Summieren wir die vorige Reihe, so ist ihre Summe

$$a - \frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n - 1}{-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}} = a - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}} \cdot \frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}$$

$$+\frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n = \alpha - \frac{a'\alpha-a\alpha'}{a+a'}$$

$$+\frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n =$$

$$a \cdot \frac{\alpha+\alpha'}{a+a'} + \frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'}\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n \text{ Liter.}$$

Dies ist also der Wein nach der nten Operation im ersten Gefäß A. Da nun der Wein in beiden Gefäßen zusammen $\alpha+\alpha'$ beträgt, so ist in dem Gefäße B

$$\alpha+\alpha' - a \cdot \frac{\alpha+\alpha'}{a+a'} - \frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'} \cdot \left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n$$

$$= a' \cdot \frac{\alpha+\alpha'}{a+a'} - \frac{a'\alpha-a\alpha'}{aa'} \cdot \left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^n \text{ Liter enthalten.}$$

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi in Bonn.